КВАНТ
ЖУРНАЛ

1971

1 - 12

НОМЕР
1

В номере:

Вращательное движение тел — *А. К. Кикоин* — *1*

Комбинаторика — *Н. Я. Виленкин* — *13*

Движение планет — *Я. А. Смородинский* — *20*

Математический кружок

Вспомогательная окружность — *Э. Г. Готман* — *28*

Лаборатория «Кванта»

Волны в мелкой тарелке — *А. Г. Косоуров* — *32*

Задачник «Кванта» — *38*

Практикум абитуриента

Метод подстановки при решении уравнений и систем уравнений — *М. И. Сканави* — *41*

Вступительные экзамены по математике в МГПИ им. В. И. Ленина — *Е. А. Щегольков* — *45*

Письменный экзамен по физике в НГУ — *Г. В. Меледин* — *51*

Информация

Заочная математическая школа — *Ж. М Раббот* — *56*

Ответы, указания, решения — *58*

Уголок коллекционера

марки, посвященные Н. Копернику — *62*

Рецензия, библиография

Задачи, игры, опыты — *В. П. Лишевский* — *64*

«Квант» для младших школьников — *А. П. Савин* — *3-я стр. обложки*

Коротко об экспоненте — *4-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

А. К. Кикоин

Хорошо известно, что всякое тело может совершать два вида движения — *поступательное* и *вращательное*. Первое из них достаточно подробно изучается в школьном курсе физики. А вот вращательному движению «не повезло». Из-за недостатка времени ему уделяется очень мало внимания. Между тем вращательное движение встречается и в природе и в технике ничуть не реже поступательного. Во многих случаях реальное движение тел представляет собой комбинации обоих видов движений. В других случаях поступательно движущиеся или даже покоящиеся тела имеют вращающиеся детали. Сюда относятся прежде всего все устройства, имеющие колеса,— от тачки и телеги до самолета и вертолета. А попробуйте найти станок, в котором бы что-нибудь не вращалось! Такой распространенный прибор, как часы, можно сказать, «битком набит» вращающимися сцепленными друг с другом колесиками.

Вращательное движение не редкость и в природе. Достаточно вспомнить о сложных вращательных движениях планет, их спутников, о вращении Солнца и, вероятно, других звезд. Заметим кстати, что в применении к планетам слово «вращение» употребляется по отношению к двум различным видам их движений. Говорят, например, что Земля *вращается* вокруг Солнца, но говорят также о *вращении* Земли вокруг своей оси. Что же, это одинаковые движения? Можно ли сказать, что оба они вызываются одними и теми же причинами? Известно, что Земля потому движется вокруг Солнца по траектории, близкой к окружности, что на нее действует сила притяжения к Солнцу. Но можно ли сказать, что эта же или подобная ей сила заставляет Землю совершать и вращение вокруг своей оси? Очевидно, что нет. В действительности движение Земли как раз можно рассматривать как комбинации поступательного и вращательного движений — поступательного движения вокруг Солнца и вращательного движения вокруг оси, проходящей через оба земных полюса.

В этой статье рассказывается о вращательном движении тел, о том, что отличает его от движения поступательного, и о том, чем оно на него походит.

Кинематика вращательного движения

Прежде всего напомним читателям то, что им уже известно о вращательном движении из школьного курса физики. Начнем с определения.

Вращательным движением тела называется такое его движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой — оси вращения.

Если ось вращения закреплена, то тело, как целое, не перемещается, и единственное что изменяется со временем — это угол поворота, который здесь играет такую же роль, какую играет перемещение какой-нибудь точки тела при его поступательном движении.

При повороте тела на угол φ каждая его точка проходит определенную дугу окружности. Если обозначить длину дуги через S, то между значениями S и φ существует простое соотношение

$$S=\varphi r,$$

где r — расстояние точки от оси вращения. Точки, расположенные на разных расстояниях r от оси вращения, описывают различные по длине дуги, но угол φ один и тот же для всего тела.

Задача механики вращательного движения состоит в том, чтобы уметь определять угол поворота тела в любой момент времени, если известен начальный угол поворота. Для этого нужно знать быстроту изменения угла поворота, то есть *угловую скорость*, которую принято обозначать буквой ω. Для тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью,

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

где $\varphi - \varphi_0$ — изменение угла поворота за промежуток времени в t секунд.

Если угловая скорость постоянна, то значение угла поворота в любой момент времени легко находится:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t;$$

если начальный угол поворота φ_0 равен нулю, то

$$\varphi = \omega t.$$

Это выражение подобно формуле $S = vt$ для равномерного поступательного движения. Следовательно, угловая скорость при вращательном движении играет такую же роль, какую для поступательного движения играет *линейная скорость* v.

Угловая скорость, так же как и линейная, может быть и непостоянной. Тогда, для того чтобы найти скорость в любой момент времени, нужно знать *угловое ускорение*, которое подобно *линейному ускорению* a определяется как быстрота изменения угловой скорости. При равноускоренном вращении

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где ω и ω_0 — значения угловой скорости в конце и в начале промежутка времени длительностью t секунд.

Легко найти связь между угловыми скоростью и ускорением и их линейными «двойниками» v и a. Так как $\omega = \frac{\varphi}{t}$, а $\varphi = \frac{S}{r}$, то $\omega = \frac{S}{rt}$.

Но $\frac{S}{t} = v$, следовательно,

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ и } v = \omega r.$$

Точно так же, поскольку $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$, а $\omega = \frac{v}{r}$ и $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$, то $\alpha = \frac{v - v_0}{rt}$. Но $\frac{v - v_0}{t}$ равно линейному ускорению a, так что

$$\alpha = \frac{a}{r} \text{ и } a = \alpha r.$$

Таким образом, численные значения линейных величин S, v и a для какой-либо точки вращающегося тела равны соответствующим значениям угловых величин (они относятся не к отдельным точкам, а ко всему телу), умноженным на радиус r вращения этой точки.

Если пользоваться величинами φ, ω и α, то можно решать задачи, относящиеся к вращению тел, применяя хорошо известные формулы кинематики поступательного движения, но заменив в них линейные величины угловыми. Приведем некоторые формулы кинематики поступательного движения и аналоги этих формул для вращательного:

Поступательное движение		Вращательное движение
$S = vt$	равномерное	$\varphi = \omega t$
$v = v_0 + at$	равноускоренное	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$		$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

Напомним также, что угол поворота φ измеряется в радианах. Тогда угловая скорость измеряется в радианах в секунду (*рад/сек*). Единица углового ускорения — радиан, деленный на секунду в квадрате (*рад/сек*^{2}).

Описание вращательного движения, однако, неполно, если нам известны только *численные значения указанных выше угловых величин*. Для полного описания вращения нужно еще знать, вокруг какой оси и в каком направлении (по или против часовой стрелки) вращается тело. И то и другое будет определено, если считать и угол поворота и угловую скорость своеобразными векторными величинами. Принято считать, что вектор $\vec{\varphi}$, так же как вектор $\vec{\omega}$, направлен вдоль оси вращения, так что если задан *вектор одной из этих величин*, то тем самым задана и ось вращения. Направление же вращения определяется так называемым правилом буравчика-штопора или правилом винта (это далеко не единственный в физике случай, когда приходится прибегать к «услугам» такого прибора). Оно состоит в следующем: если мысленно вращать рукоятку буравчика так же, как вращается тело, то направление поступательного движения буравчика покажет направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Если, например, красная стрелка на рисунке 1 изображает вектор $\vec{\omega}$ для вращающегося диска, то это означает, что диск вращается так, как показано желтой стрелкой. Как обычно, длина вектора в избранном масштабе дает нам численное значение соответствующей угловой величины.

Угловое ускорение — тоже векторная величина. Если направление оси вращения в пространстве не меняется со временем, то вектор $\vec{\alpha}$, так же как и вектор $\vec{\omega}$, направлен вдоль оси вращения. В этом случае если угловая скорость возрастает со временем, то на-

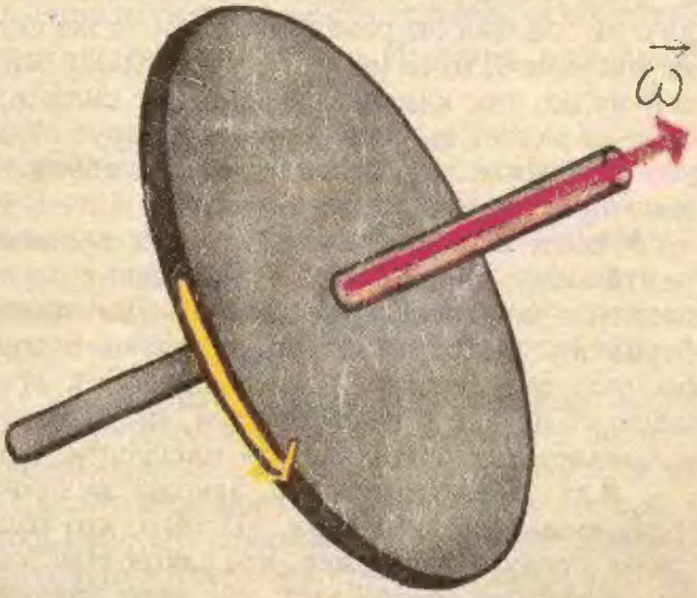


Рис. 1.

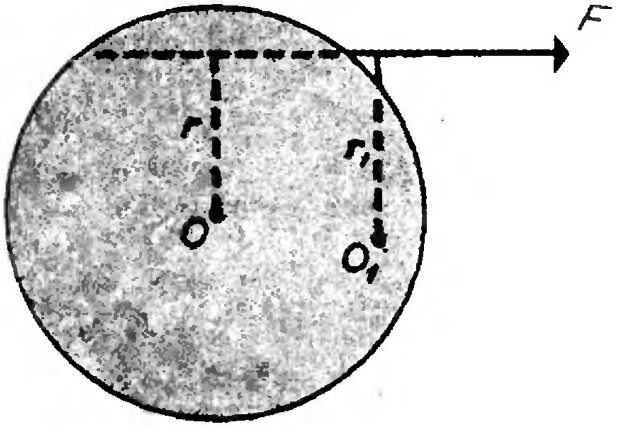


Рис. 2.

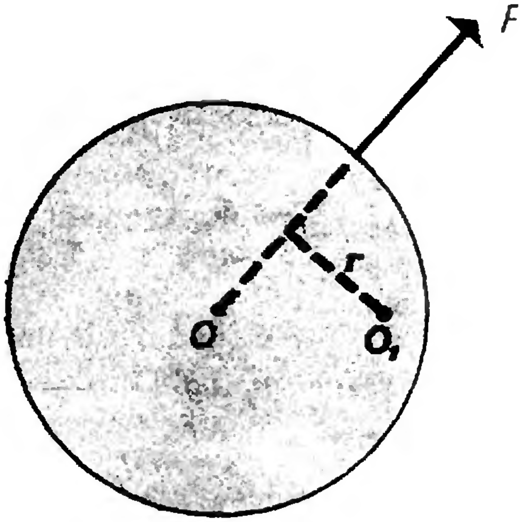


Рис. 3.

правление вектора $\vec{\alpha}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если же угловая скорость уменьшается, то направления векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\omega}$ противоположны.

Динамика вращательного движения

Динамика поступательного движения изучает, как известно, причины появления у тел ускорений и позволяет определять их величины и направления. Динамика вращательного движения делает то же самое для углового ускорения. Если ускорение поступательно движущегося тела вызывается приложенной к нему силой, то причина появления углового ускорения тела — это момент приложенной к нему силы. С ним читатели знакомы по курсу физики 8 или 9 класса. Напомним, что численное значение момента силы относительно какой-нибудь оси равно произведению силы, приложенной к телу, на длину перпендикуляра, проведенного от оси к линии действия силы. Например, если к ободу плоского диска, изображенного на рисунке 2, приложена сила F, вектор которой лежит в плоскости диска, то момент этой силы относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O, равен Fr. Если бы ось проходила не через точку O, а через точку O_1, то момент этой же силы относительно новой оси был бы другим: он был бы равен Fr_1. Если та же сила приложена так, как показано на рисунке 3, то ее момент относительно оси, проходящей через точку O равен нулю, так как линия действия силы проходит через эту точку. Такая сила не может вызвать поворот вокруг этой оси, не может изменить угловое ускорение. Но эта же сила способна вызвать вращение диска вокруг оси, проходящей через точку O_1.

Момент силы — тоже векторная величина. И направление вектора момента силы определяется с помощью того же буравчика. А именно, направлением момента силы условились считать то, в котором движется вдоль оси буравчик (винт), если его рукоятка поворачивается так, как вращалось бы тело под действием приложенной к нему силы. Например, вектор момента силы F относительно оси, проходящей через точку O, на рисунке 2 направлен перпендикулярно плоскости чертежа «от нас».

Как уже указывалось, законы механики Ньютона справедливы и для вращательного движения. Из того, что только что было сказано о моменте силы, следует, например, что закон Ньютона в применении к вращательному движению утверждает, что тело вращается с *постоянной* угловой скоростью или вовсе не вращается, если момент силы, действующей на него,

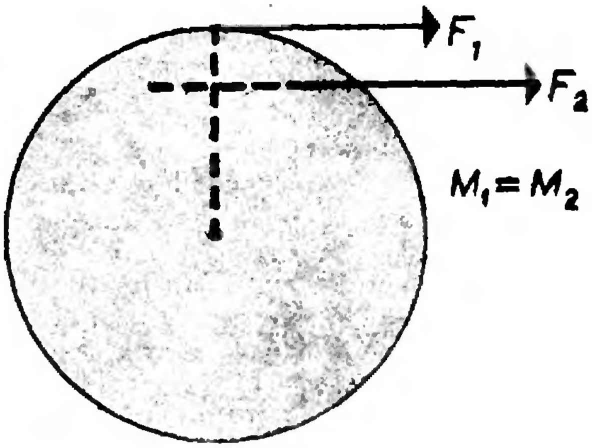


Рис. 4.

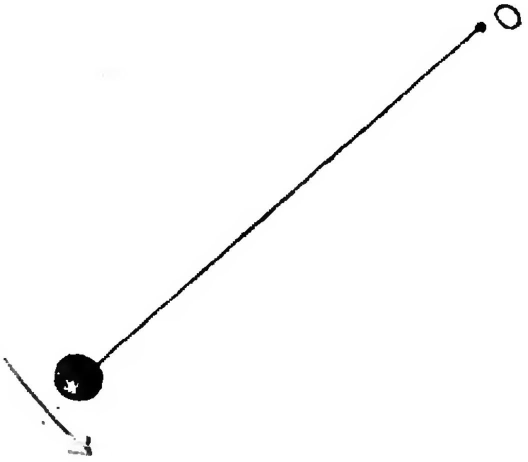


Рис. 5.

или сумма моментов всех действующих на него сил равна нулю. Не сумма сил, а сумма моментов сил должна быть равна нулю, чтобы тело вращалось равномерно или вовсе не вращалось. Если, например, Земля вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, то это значит, что среди действующих на нее сил нет таких, момент которых относительно оси ее вращения был бы отличен от нуля.

Обратимся теперь ко второму закону Ньютона.

Второй закон Ньютона для вращательного движения. Момент инерции

Для любой точки массы m вращающегося тела справедлив, конечно, второй закон Ньютона, который имеет вид

$$F = ma.$$

Так как для вращательного движения, как мы знаем, существенна не сила, а момент силы, то умножим обе части равенства на r — расстояние от оси вращения до линии действия силы. Обозначив момент силы через M, получим

$$M = Fr = mar.$$

Линейное ускорение нам, конечно, нужно заменить угловым ускорением α, которое равно $\frac{a}{r}$. Тогда уравнение второго закона Ньютона принимает вид

$$M = mr^2\alpha.$$

При рассмотрении всего тела возникает такая трудность. Как быть с расстоянием r до оси вращения? Ведь в твердом теле бесчисленное множество точек. Если, например, вращающееся тело—диск (рис. 4) с осью вращения, проходящей через его центр, то от какой его точки отсчитывать r? Быть может, от точки приложения силы? Но ведь силу можно приложить к различным точкам и получить при этом одно и то же значение момента.

Не ясно также, как быть с массой тела. Она распределена по всему телу, а радиус вращения r относится к одной какой-то точке. Чтобы понять, как найти выход из этих трудностей, мешающих нам пользоваться вторым законом Ньютона для вращательного движения, отложим пока вопрос о вращении диска и займемся более простым случаем — вращением маленького шарика, прикрепленного к тонкому твердому стержню, вокруг точки O (рис. 5). Стержень мы будем считать таким тонким, чтобы его массой можно было пренебречь, а шарик настолько малым по сравнению с длиной стержня, чтобы он мог считаться материальной точкой.

Теперь у нас сразу исчезнут все трудности. В формуле

$$M = mr^2\alpha$$

m — это масса шарика, а r — это расстояние от шарика до оси вращения. Так как для данного шарика и стержня ни m, ни r не изменяются, то произведение mr^2 есть величина постоянная и его можно обозначить одной буквой. Выберем для этой величины букву I. Тогда формула второго закона Ньютона принимает вид

$$M = I\alpha.$$

Бросается в глаза сходство этой формулы с формулой

$$F = ma.$$

Только сила F заменена моментом силы, а вместо линейного ускорения a в формулу входит угловое ускорение α, как это и должно быть, раз речь идет не о поступательном, а о вращательном движении. Роль же массы в этой формуле играет совсем новая, необычная величина, равная произведению массы на квадрат ее расстояния до оси вращения.

Подобно тому как ускорение поступательно движущегося тела зависит, помимо силы, еще и от массы ускоряемого тела, так *угловое ускорение* вращающегося тела зависит не только от момента силы, но и от величины mr^2, являющейся, так сказать, вращательным «двойником» массы. Называется эта величина *моментом инерции* тела относительной оси. Для вращательного движения важна, значит, не только масса. Важно еще, насколько удалена эта масса от оси вращения. Ясно, что малая масса на большом удалении от оси вращения может получить такое же угловое ускорение при данном моменте силы, как большая масса, расположенная вблизи оси.

Все это относится как будто бы к шарику, вращающемуся на тонком стержне. Но в действительности формула оказывается верной и тогда, когда вращается диск, колесо, цилиндр и вообще любое «настоящее» твердое тело, которое тоже обладает определенным моментом инерции. Чтобы найти момент инерции тела относительно какой-нибудь оси, нужно мысленно разбить его на множество малых частей (в пределе бесконечно малых), для каждой из них определить произведение ее массы на квадрат расстояния от этой оси и все произведения сложить. Это и будет момент инерции всего тела. Ясно, что момент инерции тела тем больше, чем больше масса тех его частей, которые расположены вдали от оси. Иными словами, момент инерции тела зависит от того, как распределена масса тела по его объему. Для различных осей момент инерции одного и того же тела будет различным. Например, момент инерции стержня длины l и массы m, относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (рис. 6), равен $\frac{ml^2}{12}$. А момент инерции того же стерж-

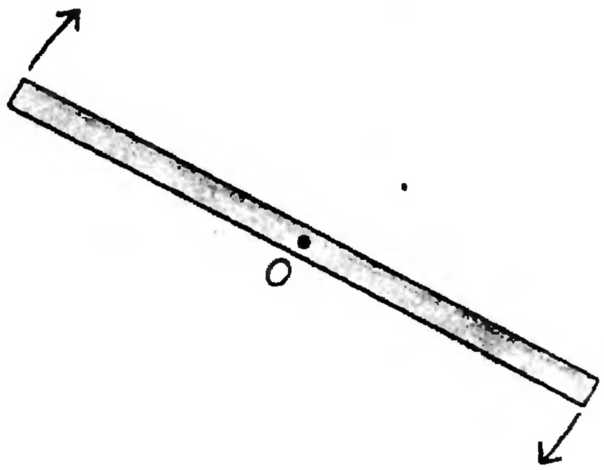


Рис. 6.

ня, отнсссительно оси, проходящей через конец (рис. 7), в 4 раза больше и равен $\frac{ml^2}{3}$: вокруг конца стержень вращать труднее, чем вокруг середины. «Труднее» — это значит, что для получения одного и того же *углового ускорения* потребуется больший момент силы.

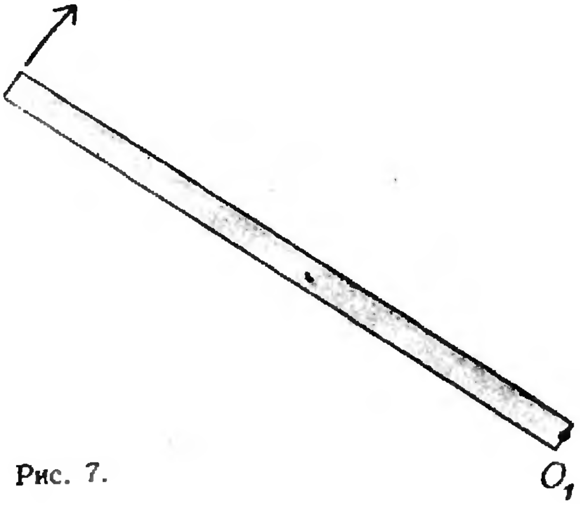


Рис. 7.

Вычисление момента инерции — задача обычно трудная. Но для тел однородных и имеющих правильную геометрическую форму такое вычисление относительно некоторых осей вращения возможно, хотя и не всегда простыми способами. Для одного особенно простого случая мы такое вычисление приведем.

Вычислим момент инерции колеса, в котором почти вся масса сосредоточена в его ободе, относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости колеса и проходящей через его центр. Примером может служить велосипедное колесо с тонкими спицами.

Разделим обод на отдельные малые части с массами m_1, m_2, m_3 и т. д. Каждую из них можно считать материальной точкой, расположенной на расстоянии R от оси вращения, где R — радиус колеса. Момент инерции каждой такой части равен m_1R^2, m_2R^2, m_3R^2 и т. д. Общий момент инерции всего колеса равен сумме моментов инерции его частей:

$$I=(m_1+m_2+m_3+\ldots)\,R^2.$$

Но сумма $m_1+m_2+m_3+\ldots$ равна, очевидно, массе всего колеса m. Так что момент инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, равен

$$I=mR^2.$$

Для тел произвольной формы или неоднородных по составу, или для относительно не столь «удобных», как в рассмотренном случае, осей вращения моменты инерции определяют опытным путем, например, по измеренному угловому ускорению при известном моменте силы *). Как мы видим, оп-

---

*) В таблице приведены формулы для моментов инерции некоторых тел.

тело	как проходит ось	момент инерции
однородный шар	через центр шара	$\frac{2}{5}mr^2$
сферическая оболочка	через центр сферы	$\frac{2}{3}mr^2$
стержень	через центр тяжести	$\frac{1}{12}ml^2$
стержень	через конец	$\frac{1}{3}ml^2$

ределение массы тел — задача значительно более простая, чем определение ее вращательного «двойника» — момента инерции. Если масса определяется простым взвешиванием, то «взвешивание» для вращательного движения — довольно сложная операция, которая к тому же для одного и того же тела, но для разных осей вращения должна проводиться отдельно, а «весов» для такого «взвешивания» не существует.

Момент количества движения, момент импульса

Итак, для вращательного движения второй закон Ньютона записывается в виде $M=I\alpha$,
где M — момент силы, I — момент инерции и α — угловое ускорение тела.

Но угловое ускорение выражается формулой

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}.$$

Поэтому формулу второго закона Ньютона можно записать в виде

$$M=\frac{I\omega-I\omega_0}{t}.$$

В таком виде формула эта означает, что момент силы равен изменению величины $I\omega$ в единицу времени. Но, как, известно, второй закон Ньютона можно записать в виде

$$F=\frac{mv-mv_0}{t},$$

где mv — величина, называемая *количеством движения* или *импульсом* тела. Ясно, что импульс mv также имеет аналог в динамике вращательного движения и этим аналогом является величина $I\omega$. Это следует уже из того, что момент инерции I играет при вращательном движении такую же роль, как масса в движении поступательном, а угловая скорость ω заменяет линейную скорость v. Величина $L=I\omega$ называется поэтому *моментом количества движения* тела или *моментом импульса*. Это тоже векторная величина (так же, как и $\vec{\omega}$, $\vec{F}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{mv}$, $\vec{M}$), направленная так же, как вектор угловой скорости. Аналогично другим приведенным нами величинам, относящимся к вращательному движению, момент импульса различен относительно различных осей вращения.

Если тело имеет такую форму или размеры или такой радиус вращения, что можно говорить о вращении точки (например, шарик на тонком стержне, планета при ее вращении вокруг Солнца), то момент импульса легко связать с импульсом. В самом деле, момент инерции I равен mr^2, а угловая скорость ω равна $\frac{v}{r}$. Поэтому

$$L=I\omega=\frac{mr^2v}{r}=rmv.$$

Момент импульса точки, следовательно, равен по величине произведению радиуса r окружности, по которой движется точка, на импульс mv. Понятно, что для тела произвольной формы такое простое соотношение написать нельзя.

Закон сохранения момента импульса

Момент количества движения (момент импульса) похож на своего «двойника» в механике поступательного движения — импульс тела — еще и тем, что для него тоже выполняется закон сохранения.

Из формулы

$$\vec{M} = \frac{I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0}{t}$$

сразу видно, что если момент $\vec{M}$ внешних сил, действующих на тело, равен нулю, то и изменение момента импульса $I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0$ тоже равно нулю, так что если тело не вращается, то никакие силы, момент которых относительно какой-либо оси равен нулю, не могут заставить его начать вращаться вокруг этой оси. Наоборот, если тело по каким-нибудь причинам уже вращается, то силы, момент которых относительно оси вращения равен нулю, не могут изменить момент импульса или прекратить вращение тела.

Как показывает опыт, это верно не только для одного тела, но и для любой группы взаимодействующих тел, на которую внешние тела не действуют с силами, моменты которых отличны от нуля. Такая группа тел называется, как мы знаем, *замкнутой системой тел*. Надо только иметь в виду, что «замкнутость» по отношению к вращению означает не отсутствие внешних сил, а отсутствие *моментов* внешних сил.

Интересным проявлением закона сохранения момента импульса является случай вращения не абсолютно твердого тела, в котором взаимные расстояния отдельных частей остаются неизменными, а, так сказать, «мягкого» тела, у которого внутренними силами можно изменить расстояние между его частями.

Когда, например, фигуристке (рис. 8) требуется увеличить скорость своего вращения, она прижимает руки к корпусу и тем самым уменьшает

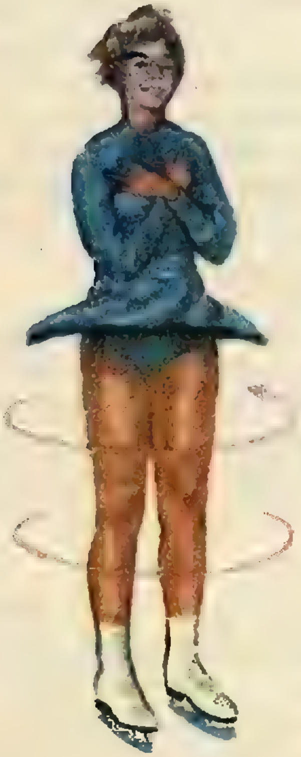


Рис. 8.

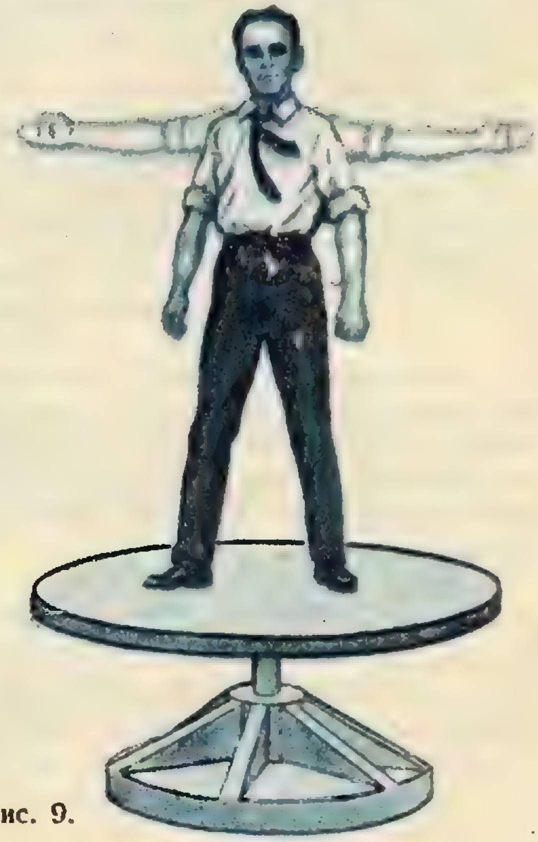


Рис. 9.

момент инерции тела относительно вертикальной оси вращения (масса рук оказывается ближе к этой оси). Так как это уменьшение момента инерции I достигается не внешними, а внутренними силами, то момент количества движения $I\omega$ не может измениться. Поэтому угловая скорость ω увеличивается во столько же раз, во сколько раз фигуристке удалось уменьшить свой момент инерции. Наоборот, перед завершением вращения, когда скорость нужно уменьшить, фигуристка широко расставляет руки, увеличивая момент инерции своего тела. Таким же образом поступают танцовщицы при выполнении пируэтов, акробаты, когда они совершают сальто, и т. д. Интересные опыты такого рода можно провести с помощью так называемой скамьи Жуковского. Она представляет собой платформу, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 9). Встав на такую вращающуюся платформу, можно, манипулируя руками, заметно изменять угловую скорость вращения.

Сохранение момента импульса означает сохранение не только численного значения величины $I\omega$. Не нужно забывать, что момент импульса — величина векторная. Поэтому сохранение момента импульса означает также сохранение его направления. Но момент импульса направлен, как мы знаем, вдоль оси вращения. Поэтому всякое вращающееся тело, на которое не действуют внешние моменты сил, не может изменить и положение оси вращения. В этом «секрет» устойчивости катящегося колеса, волчков и т. д. Именно поэтому дискоболы (метатели диска), бросая свой снаряд, приводят его во вращение. Это позволяет диску лететь, не кувыркаясь. Способность вращающихся тел сохранять положение оси своего вращения (при отсутствии моментов внешних сил) широко используется в технике. На этом свойстве основано применение так называемых гироскопических компасов, всевозможных стабилизаторов и т. д. Гироскопический компас — это в сущности вращающееся тело. Если при пуске в ход оно было установлено так, чтобы ось вращения была ориентирована на север, то она будет сохранять это направление лучше магнитного компаса, на который влияют и железный корпус корабля и изменения магнитного поля Земли. На кораблях иногда устанавливают гироскопические стабилизаторы, которые представляют собой огромные многотонные колеса, приводимые во вращение мощными двигателями. Стремясь сохранить положение оси вращения, такой стабилизатор препятствует качке корабля. Важные применения находят гироскопические стабилизаторы в технике космических полетов, в автоматических устройствах самого различного назначения.

Кинетическая энергия вращающихся тел

Вращающееся тело — это движущееся тело, так как все его части, кроме точек, расположенных на оси вращения, движутся. Поэтому оно обладает кинетической энергией. Чтобы найти выражение для кинетической энергии, начнем опять с вращения маленького шарика на тонком стержне, то есть с вращения точки. Кинетическую энергию в этом случае можно записать в обычной форме

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса шарика, а v — его линейная скорость. Но так как $v = \omega r$, то выражение для K можно написать в виде

$$K = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

В это выражение опять входит величина mr^2 — момент инерции шарика. Поэтому кинетическая энергия равна

$$K=\frac{I\omega^2}{2}.$$

Эта формула напоминает нам снова, что при вращательном движении момент инерции играет роль массы, а угловая скорость — роль линейной скорости.

Полученная формула для кинетической энергии верна не только для вращающегося шарика на стержне, но и для всякого тела, у которого масса распределена по всему объему. В самом деле, момент инерции тела мы можем получить, сложив моменты инерции его частей относительно оси вращения. Угловая же скорость одна и та же для всего тела. Поэтому, так как кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий его частей, то для всякого вращающегося тела кинетическая энергия определяется равенством $K=\frac{I\omega^2}{2}$.

Во многих случаях тела совершают одновременно и вращательное и поступательное движение. Наиболее известный пример — движение колес повозок, автомашин и т. д. В этом случае у вращающегося тела нет закрепленной оси: она сама движется поступательно. Для рассматриваемого примера катящегося колеса, у которого ось вращения проходит через центр тяжести (центр масс), общая кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращательного движения

$$K=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}.$$

v — скорость поступательного движения центра тяжести тела, а I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела.

Тот факт, что тело совершает вращательное движение или одновременное вращательное и поступательное движение, не может, разумеется, помешать ему иметь еще и потенциальную энергию, если оно взаимодействует с какими-то другими телами. Поэтому для полной энергии тела, движущегося поступательно и одновременно вращающегося, можно написать уравнение

$$E=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}+\varPi.$$

Как и в других случаях, изменение энергии вращающегося тела может произойти только тогда, когда силы, действующие на него, совершают работу. Нетрудно догадаться, что работа, совершаемая при вращении тела, выражается формулой

$$A=M\varphi,$$

аналогичной известному выражению для работы при поступательном движении. Сюда, однако, не входит косинус угла, потому что векторы момента силы M и угла поворота всегда лежат на одной прямой — оси вращения и угол между ними может быть либо 0°, либо 180°. В первом случае работа силы положительна (угловая скорость растет), во втором — отрицательна (скорость вращения уменьшается).

В заключение опять приведем для сопоставления некоторые формулы, известные читателям из механики поступательного движения, и аналогичные им формулы, относящиеся к вращательному движению.

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
$\dfrac{\Delta\left(m\vec{v}\right)}{\Delta t} = \vec{F}$	$\dfrac{\Delta\left(I\vec{\omega}\right)}{\Delta t} = \vec{M}$
$\Delta\left(m\vec{v}\right) = 0$ при $\vec{F} = 0$	$\Delta\left(I\vec{\omega}\right) = 0$ при $\vec{M} = 0$
$A = FS$	$A = M\varphi$
$K = \dfrac{mv^2}{2}$	$K = \dfrac{I\omega^2}{2}$

Задачи и вопросы

1. В каких единицах измеряется момент инерции?

2. С наклонной плоскости скатываются без проскальзывания два цилиндра одинаковых диаметров и масс. Один из них свинцовый и имеет пробковую оболочку, другой — пробковый со свинцовой оболочкой. Какой цилиндр скатится с плоскости за меньшее время?

3. Колесо, момент инерции которого равен 0,01 единицы СИ, вращается с угловой скоростью 4 *об/сек*. Каков должен быть момент силы трения, чтобы вращение колеса прекратилось после 5 оборотов?

4. Приливы в морях и океанах действуют на вращающуюся Землю подобно тормозным колодкам и создают тормозящую силу трения. Из-за этого действия приливов через 100 лет продолжительность суток на Земле будет на 1 секунду больше нынешней. Вычислить приливную силу трения.

5. Судовой гироскопический стабилизатор радиусом $R=2$ *м* и массой $M=120$ *т* приводится во вращение мотором. Какая мощность требуется для того, чтобы в течение 10 часов довести скорость вращения стабилизатора до 13 *об/сек*? Считать, что масса стабилизатора сконцентрирована на его ободе (в этом случае момент инерции равен MR^2).

6. Однородный шар радиуса R и массы M в начальный момент пущен по плоскости так, что он скользит по ней без качения со скоростью v_0. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого k. Какое расстояние пройдет шар, прежде чем прекратится его проскальзывание относительно плоскости? Какова будет к этому моменту скорость шара?

7. Два иллюминатора сферического спутника расположены в диаметрально противоположных точках оболочки. Космонавт идет из центра корабля по радиальному трапу к одному из иллюминаторов, затем идет вдоль борта корабля ко второму иллюминатору и, наконец, возвращается по радиальному трапу на свое место в центре корабля. На какой угол поворачивается при этом корабль относительно звезд, если масса корабля M, его радиус R, масса космонавта m и можно считать, что вся масса корабля сосредоточена в его оболочке.

8. Для замедления вращения спутников предлагается использовать следующее устройство. К боковой поверхности спутника прикрепляются на нитях длины l два груза массы m каждый. Грузы одновременно отпускают. Они отлетают от спутника и в тот момент, когда нити натягиваются, слетают с крючков к которым прикреплены. При какой длине нитей скорость вращения спутника после этой операции уменьшится в n раз?

Считать, что спутник — это цилиндр массы M и радиуса R, вся масса которого сосредоточена в боковой оболочке.

КОМБИНАТОРИКА

Н. Я. Виленкин

Вероятно, каждому читателю «Кванта» знакомо волнение, охватывающее болельщиков перед крупным спортивным соревнованием — будь то чемпионат мира по футболу или «матч века» по шахматам. Даже от тех, кто не совсем точно помнит правила рокировки, можно услышать глубокомысленные замечания вроде «а я бы на первую доску сборной мира поставил не Ларсена, а Портиша». Знатоки и любители шахмат спорят о шансах на победу Смыслова и Кереса, а у любителей футбола дело доходит чуть ли не до драки при обсуждении возможного исхода матча сборных команд Бразилии и Англии.

Очень часто перед такими соревнованиями газеты объявляют конкурс знатоков, предлагая угадать как исход соревнования в целом (предсказать, кому достанется «Золотая богиня», или счет, с которым сборная СССР по шахматам победит сборную мира), так и исходы отдельных состязаний. На первый взгляд есть совсем простой способ победить в таком конкурсе: послать в редакцию столько писем, сколько есть теоретически возможных исходов соревнования, и в каждом письме дать один из вариантов. Хоть одно письмо попадет в цель!

Но дело совсем не так просто — вариантов слишком много. Конечно, если надо предсказать только счет, с которым окончится матч века, то достаточно послать 81 письмо: игралось 40 партий, и сборная СССР могла набрать любое число очков от 0 (брр...) до 40 (вот было бы здорово!). Но если требуется еще указать исход матча на каждой доске (хотя бы предсказать, кто в нем победит), то число возможных вариантов растет катастрофически.

Задачи, в которых надо найти число возможных вариантов для той или иной операции, того или иного события, возникают в самых разных областях человеческой деятельности. Эти задачи называют комбинаторными, а область математики, изучающую методы их решения, — комбинаторикой. В этой статье мы и расскажем, как решаются комбинаторные задачи (хотя комбинаторику сейчас в школе и не проходят, она изучается факультативно).

1. Правила суммы и произведения. В основе решения комбинаторных задач лежат два простых правила — правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если в нашем распоряжении m способов выбрать элемент a и (независимо от них) n способов выбрать элемент b, то выбор «или a или b» можно сделать $m+n$ способами.

Например, если на тарелке лежат 5 яблок и 9 груш, то выбор «яблоко или грушу» можно сделать 14 способами — выбрать либо одно из 5 яблок, либо одну из 9 груш.

Несколько сложнее правило произведения. В нем речь идет о выборе пары элементов (a, b)*).

Правило произведения. Если в нашем распоряжении m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то пару (a, b) можно выбрать mn способами.

Таким образом, если на блюде лежат 5 яблок и 9 груш, то пару (яблоко, груша) можно выбрать $5 \cdot 9 = 45$ способами.

---

*) Две пары, получающиеся друг из друга перестановкой элементов, считаются различными, например пара (1, 4) считается не совпадающей с парой (4, 1).

Чтобы убедиться в справедливости правила произведения, обозначим все способы выбора элемента a через $a_1, \ldots, a_m$, а все способы выбора элемента b — через $b_1, \ldots, b_n$. Тогда все пары, которые можно составить из этих элементов, располагаются в следующую таблицу из m строк и n столбцов:

$$\begin{array}{l}(a_1,\ b_1),\ \ldots,\ (a_1,\ b_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_m,\ b_1),\ \ldots,\ (a_m,\ b_n).\end{array}$$

В этой таблице как раз mn пар.

Заметим, что иногда выбор бывает более сложным — надо сначала выбрать элемент a, а потом, в зависимости от этого выбора, элемент b. Но если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то число различных пар (a, b) опять равно mn. Докажите это сами.

Конечно, может случиться, что нам надо сделать не два, а несколько выборов. В этом случае надо перемножить числа вариантов для каждого выбора. Иными словами, верно следующее правило.

Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 — n_2 способами, элемент a_k — n_k способами, то набор $(a_1, \ldots, a_k)$ можно выбрать $n_1 \ldots n_k$ способами (при этом наборы, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, считаются различными).

Теперь мы уже можем решить задачу о числе возможных исходов матча века. На каждой доске могло быть 3 исхода: победа, ничья и поражение. Так как число досок равно 10, то различных исходов могло быть $3^{10} = 59\,049$. А если надо предсказать не только исход каждого поединка, но и его счет, то получится ответ 9^{10}.

С помощью правила произведения можно решать и довольно сложные задачи, в которых на выбор вариантов наложены дополнительные условия.

Пример. В русском алфавите 33 различные буквы. Сколько слов, содержащих по 5 букв, можно составить, если не допускать слов, в которых две одинаковые буквы идут подряд?

Конечно, «слова» здесь имеют иной смысл, чем в филологии, — допускаются такие «слова», как *абвгд* или *абаба*. Но слова типа *ссора*, *пресс*, *аахен* не допускаются — в них есть две идущие подряд одинаковые буквы.

Чтобы решить этот пример, будем выбирать буквы одну за другой — сначала первую, потом вторую, третью, четвертую, пятую, Первую букву можно выбрать 33 способами — ведь в нашем распоряжении все 33 буквы русского алфавита. А вот вторую букву можно выбрать лишь 32 способами — ведь она должна отличаться от первой. 32 способами можно выбрать и третью букву — она должна отличаться от второй; четвертую и пятую буквы тоже можно выбрать 32 способами. А всего получается

$$33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 34\,603\,008$$

различных слов, удовлетворяющих поставленному условию.

2. k-подмножества. С помощью правил суммы и произведения можно решать различные задачи комбинаторики. Но это не всегда удобно, так же, как далеко не всегда удобно сводить решение любой геометрической задачи к аксиомам. Наряду с аксиомами мы используем в геометрии теоремы, что позволяет сократить решение задачи. Точно так же в комбинаторике есть несколько простейших, «стандартных» задач, к которым часто удается свести решение других задач.

Эти задачи формулируются на языке теории множеств. Если читатель не знаком с тем, что такое «множество», «элемент множества», «пересечение множеств», «объединение множеств», отсылаем его к литературе, список которой приведен в конце статьи. Впрочем, мы будем пользоваться лишь простейшими понятиями теории множеств, которые теперь будут изучаться в 4-м и 5-м классах средней школы, а в качестве примера мы возьмем множество из четырех элементов и будем изображать его подмножества и слова, составленные из элементов этого множества (рис. 1—5).

Рис. 1. Пусть множество N состоит из четырех элементов: коня, слона, ферзя и ладьи.

Решим следующую задачу. 5 студентов сдают зачет по плаванию. Зачет сдан, если студент проплывает 100 метров (время любое). Если же студента приходится вылавливать, то зачет не сдан. Сколькими способами может окончиться заплыв?

Возможны различные случаи. Может случиться, что все студенты окажутся хорошими пловцами, а может случиться, что всех пятерых придется спасать. Общее число исходов можно сосчитать так. Расположим всех студентов в каком-то порядке, скажем по алфавиту: Андреев, Борисов, Володин, Григорьев, Дмитриев. Для каждого из них есть две возможности — либо он сдаст зачет, либо нет. В первом случае поставим в соответствие этому студенту цифру 1, а во втором — цифру 0. Тогда исход заплыва выразится последовательностью длины 5 из нулей и единиц. Например, последовательность 0, 1, 1, 0, 1 означает, что достаточно хорошо плавают только Борисов, Володин и Дмитриев. А если зачет сдаст только Григорьев, то отчет об исходе соревнований будет иметь такой вид: 0, 0, 0, 1, 0. Последовательность 0, 0, 0, 0, 0 означает, что ни один студент не достиг финиша.

Таким образом, задача о числе всех исходов заплыва свелась к следующей: сколько последовательностей длины 5 можно составить из цифр 0 и 1? Ответ на эту задачу дается правилом произведения: поскольку на каждом месте последовательности у нас выбор из двух возможностей, то общее число исходов равно $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$. Итак, имеется 32 возможных исхода заплыва.

В разобранной задаче нам надо было узнать, сколько подмножеств можно составить из множества N: {Андреев, Борисов, Володин, Григорьев, Дмитриев}.

При этом допускалось и пустое подмножество, а также подмножество, совпадающее со всем множеством N. Ответ оказался равным $32=2^5$. Точно так же доказывается, что если множество N содержит n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств. Этот же результат можно доказать, воспользовавшись математической индукцией.

В олимпийских играх поступают так: в финал выходят двое лучших. Выясним, сколько исходов могут иметь соревнования в этом случае. Математически задача формулируется так: сколькими способами можно выбрать 2 элемента из множества, содержащего 5 элементов? Легко проверить, что это можно сделать 10 способами (выпишите сами все эти способы). Но такой метод «прямого перебора» годится лишь при малом числе участников. Хотелось бы иметь формулу, позволяющую сразу давать ответ на вопрос. Итак, нам надо решить следующую задачу.

Сколько k-подмножеств содержится в множестве N из n элементов?

Здесь мы для краткости говорим «k-подмножество» вместо «подмножество, содержащее k элементов».

Выбор подмножества из данного множества N можно наглядно представить себе следующим образом. Элементы множества N сложим в мешок, а затем запустим в этот мешок руку и вытащим подмножество. Разумеется, все k элементов подмножества вытаскиваются сразу и никакого разумного порядка для них установить нельзя.

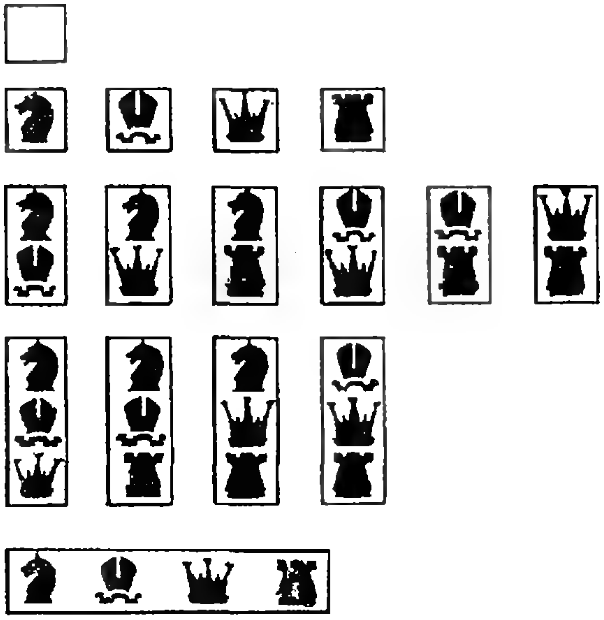


Рис. 2. В N имеется всего 2^4 подмножеств:
$C_4^0=1$ 0-подмножество (пустое),
$C_4^1=4$ 1-подмножества,
$C_4^2=6$ 2-подмножеств,
$C_4^3=4$ 3-подмножества,
$C_4^4=1$ 4-подмножество (все множество N).

Обозначим число k-подмножеств в множестве из n элементов через C_n^k *).

Числа C_n^k (их называют биномиальными коэффициентами) обладают целым рядом любопытных свойств. О многих из них было рассказано в статье Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов» («Квант», № 6, 1970). В этой статье было доказано, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \qquad (1)$$

и с помощью метода математической индукции получена формула для C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ **)}. \qquad (2)$$

Оба утверждения были выведены из равенства $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, но их можно доказать и комбинаторными рассуждениями.

Чтобы доказать, например, равенство (1), зафиксируем один элемент a из N и разобьем все k-подмножества в N на два класса: содержащие a и не содержащие a. Проверьте, что число подмножеств первого класса равно C_{n-1}^{k-1}, а число подмножеств второго класса равно C_{n-1}^k. Так как каждое k-подмножество принадлежит либо первому, либо второму классу, общее число всех k-подмножеств равно C_n^k, то равенство (1) доказано.

Чтобы вывести формулу (2), выясним сначала, как получаются k-подмножества из $(k-1)$-подмножеств. Ясно, что для этого надо к $(k-1)$-подмножествам присоединить не входящие в них элементы. Так как все множество N содержит n элементов, то в данное $(k-1)$-подмножество не входит $n-(k-1)$ элементов. Значит, из каждого $(k-1)$-подмножества можно получить $n-k+1$ различных k-подмножеств. Но одно и то же k-подмножество может быть получено из различных $(k-1)$-подмножеств — мы не знаем, какой из k элементов оказался присоединенным в последнюю очередь. Иными словами, любое k-подмножество может быть получено k различными способами из $(k-1)$-подмножеств. Поэтому общее число k-подмножеств в k раз меньше, чем $(n-k+1)\, C_n^{k-1}$. Итак,

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}\, C_n^{k-1}.$$

Пользуясь этой формулой и мето-

---

*) Это число называют числом сочетаний из n элементов по k (C — первая буква французского слова combinaison — сочетание).

**) Через $n!$ обозначают произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Например: $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

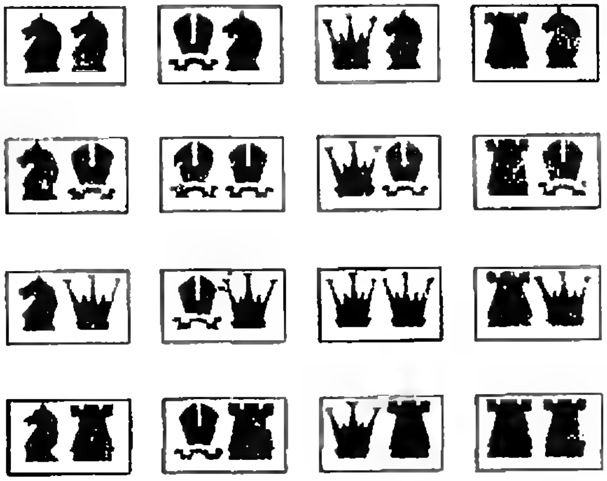


Рис. 3. Существует $4^2=16$ 2-слов, составленных из элементов множества N.

дом математической индукции, легко доказать и формулу (2).

3. k-слова. Снова возьмем в руки мешок с элементами множества N, но на этот раз будем вытаскивать элементы *не сразу, а по очереди*. Сначала вынем один элемент, обозначим его a_1, запишем и положим обратно в мешок. Потом вытащим второй элемент (может случиться, что нам снова попадется тот же самый элемент a_1), запишем его и т. д. После k выборов у нас получится запись вида $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_1, \ldots, a_k$ какие-то элементы из множества N. Такую запись мы назовем словом длины k или k-словом (иначе ее называют кортежем), составленным из элементов множества N.

Два k-слова считаются совпадающими, если у них одинаковые первые элементы, одинаковые вторые элементы, одинаковые k-е элементы.

С k-словами мы часто встречаемся на практике. Например, десятичные записи чисел — это «слова», составленные из 10 цифр, обычные слова — это «слова», составленные из русских букв, фразы — это «слова», составленные из русских слов. Решим следующую задачу.

Дано множество N, состоящее из n элементов. Сколько k-слов можно составить из элементов этого множества?

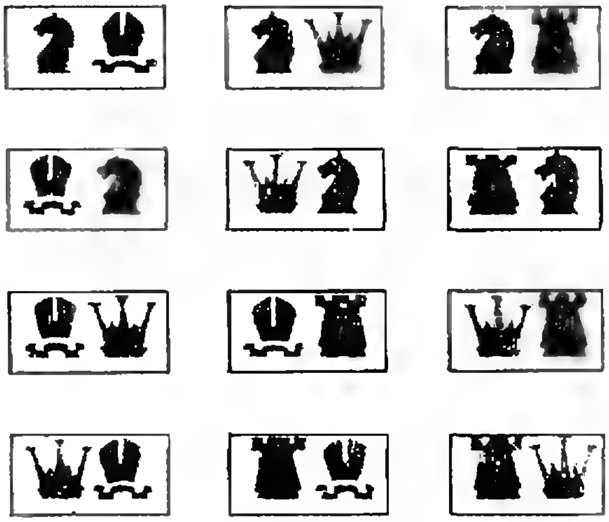


Рис. 4. Существует $A_4^2=12$ 2-слов без повторений, составленных из элементов множеств N.

Поскольку первый элемент можно выбрать n способами, второй тоже n способами, ..., k-ый тоже n способами, то k-слово можно выбрать n^k способами.

Окончательно: *из n элементов можно составить n^k слов длины k.*

Многие комбинаторные задачи решаются по этому правилу. Найдем, например, сколькими способами можно разделить k различных предметов между n людьми. Для этого расположим элементы в каком-то порядке и над каждым предметом укажем, кому он предназначается. Например, запись

1	1	3	2	2	1	2	3	3	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

показывает, что первому участнику раздела достанутся 1-й, 2-й, 6-й, 10-й предметы, второму — 4-й, 5-й, 7-й, а третьему — 3-й, 8-й, 9-й предметы.

Мы видим, что каждый способ раздела задается k-словом (где k — число предметов) из n элементов (номеров участников раздела). Значит, число способов раздела равно n^k.

4. k-слова без повторений. Опять возьмем в руки мешок, в который сложены элементы множества N и нач-

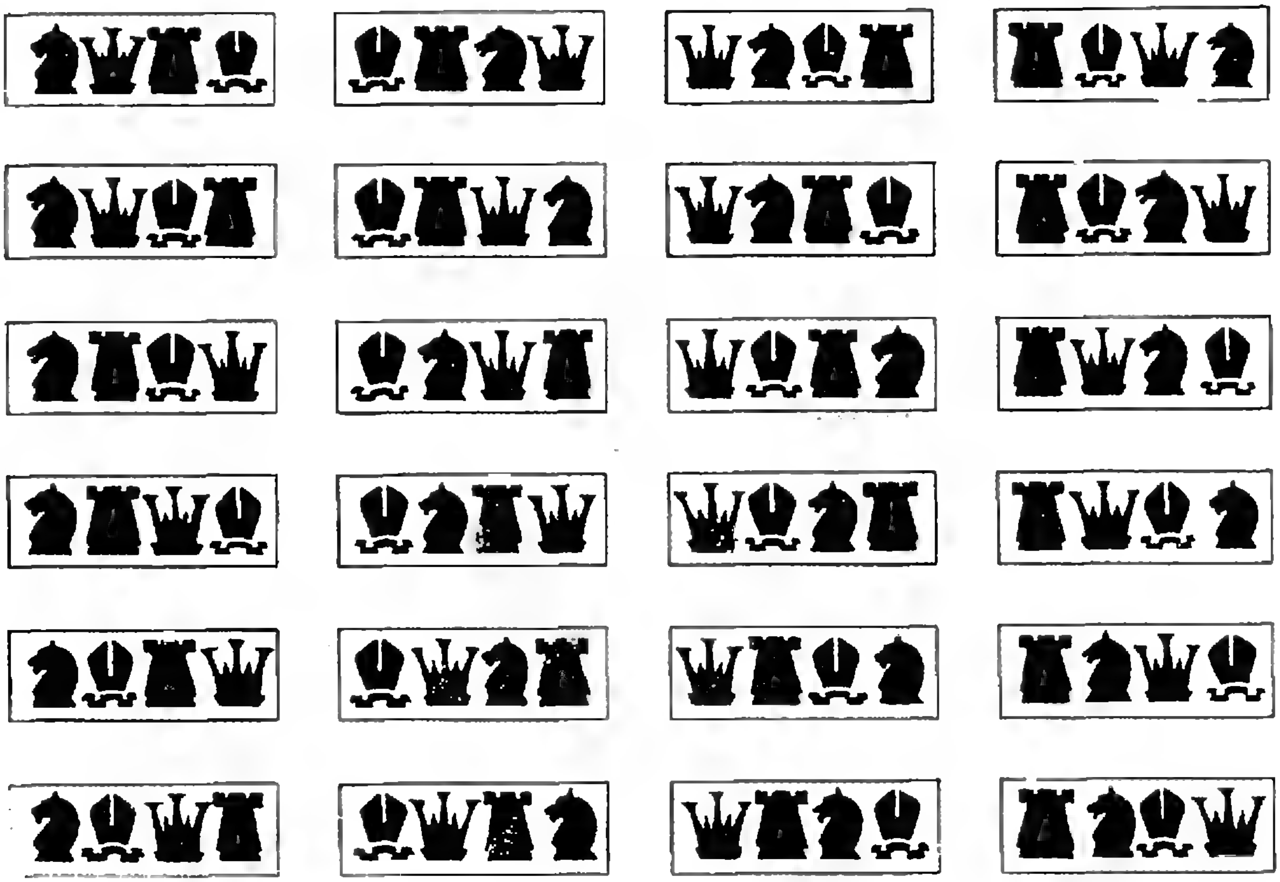


Рис. 5. Существует $P_4=4!=24$ перестановки элементов множества N.

нем вытаскивать из него один за другим элементы этого множества. Но на этот раз не будем возвращать эти элементы в мешок, а выложим их в ряд. После k выборов у нас снова появится k-слово $(a_1, \ldots, a_n)$, но на этот раз среди элементов $a_1, \ldots, a_n$ нет повторяющихся *). По-другому можно сказать, что k-слова без повторений — это упорядоченные k-подмножества множества N.

Число k-слов без повторений из n элементов обозначают A_n^k. Из правила произведения сразу вытекает, что

$$A_n^k=n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1). \qquad (3)$$

В самом деле, первый элемент можно выбрать n способами, второй — только $n-1$ способами, ведь взять уже выбранный элемент нельзя. Третий элемент можно выбрать $n-2$ способами, ..., k-й — $(n-k+1)$ способами. Значит, общее число способов действительно выражается формулой (3).

Например, если из 10 членов комиссии надо назначить председателя, его заместителя и секретаря, то это можно сделать $10\cdot9\cdot8=720$ способами.

5. Перестановки. Если из мешка вытаскиваются и выкладываются в ряд один за другим *все* элементы множества N (и ни один элемент не возвращается обратно), то в конце концов все элементы множества N окажутся расположенными в некотором порядке. В этом случае говорят о *перестановках без повторений* из n элементов. Таким образом, перестановка из n элементов — это n-слово без повторений из n элементов. Полагая в формуле (3) $k=n$, получаем, что число перестановок из n элементов равно $n!$ Его обозначают символом P_n. Итак,

$$P_n=n!$$

6. Перестановки с повторениями. Мы уже знаем, что из n «букв» можно составить n^k слов длины k. Некоторые из них отличаются друг от друга своим составом, а другие — только порядком элементов. Соберем все слова, имеющие один и тот же состав, а именно такие, в которые входят k_1 раз первая буква, k_2 раз вторая буква, ..., k_n раз n-я буква (мы считаем, что «буквы» в «алфавите» расположены в каком-то порядке). Ясно, что $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$. Число «слов» в этом подмножестве обозначим через $P(k_1, \ldots, k_n)$. Мы докажем сейчас, что

---

*) Такие k-слова называются размещениями без повторений.

$$P(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \quad (4)$$

Для этого заметим, что буквы, входящие в данное слово, можно переставлять друг с другом $k!$ способами. Но не все из этих способов изменяют слово. Например, слово *баллада* не изменяется при перестановке второй и пятой или третьей и четвертой букв (в первом случае переставляются между собой две буквы *а*, а во втором — две буквы *л*). Подсчитаем число перестановок букв, не изменяющих слово состава (k_1, k_2, ... k_n). Легко видеть, что число таких перестановок равно $k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_n!$ (например, для слова *баллада* число таких перестановок равно 3! 2! — мы можем переставлять друг с другом 3! способами буквы *а* и 2! способами буквы *л*; буквы *б* и *д* входят лишь один раз). Поэтому, чтобы сосчитать число перестановок с повторениями, надо $k!$ разделить на $k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_n!$ Формула (4) доказана.

Найдем, например, сколько различных слов получается при перестановке букв слова *метаматематика*. В это слово входят 3 буквы *м*, 2 буквы *е*, 3 буквы *т*, 4 буквы *а*, 1 буква *и* и 1 буква *к*, а всего 14 букв. Значит, число перестановок букв этого слова равно

$$P(3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1) \quad \frac{14!}{3!2!3!4!1!1!} =$$

$$50\,450\,400.$$

С помощью формулы для перестановок с повторениями можно получить новое доказательство формулы (2). Мы уже знаем, что каждое подмножество множества N можно зашифровать с помощью нулей и единиц. Если множество N содержит n элементов, а подмножество — k элементов, то получим k единиц и $n-k$ нулей. Значит, в множестве из n элементов есть столько же k-подмножеств, сколько перестановок можно сделать из k единиц и $n-k$ нулей. Таким образом,

$$C_n^k = P(k,\ n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!}.$$

Задачи

1. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число

$$q = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — некоторые натуральные числа (включая делители 1 и q)?

2. Сколькими способами можно переставить между собой буквы слова *перешеек* так, чтобы четыре буквы *е* не шли подряд?

3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове *камелия* так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова *огород* так, чтобы три буквы *о* не стояли рядом?

5. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (любую из цифр можно использовать несколько раз).

6. Найдите сумму четырехзначных чисел, которые получаются при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

7. Решите ту же задачу для цифр 1, 2, 2, 5.

8. С помощью комбинаторных рассуждений докажите тождества:

а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} \quad C_m^k C_n^m$.

Литература

1. Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер и др. Алгебра, «Просвещение», 1968.

2. Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах, «Наука», 1969.

3. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика «Наука», 1969.

4. Дополнительные главы по курсу математики 7—8 классов для факультативных занятий. Сборник статей, составитель К. П. Сикорский. «Просвещение», М., 1969.

5. Б. В. Гнеденко, И. Г. Журбенко. Теория вероятностей и комбинаторика. «Математика в школе», 1968, № 2, 3.

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

Я. А. Смородинский

В этой статье рассказывается о некоторых свойствах эллипса и о разных закономерностях движения планет, самые важные из которых называются законами Кеплера

Сила тяжести

Закон инерции кажется сейчас самым элементарным и естественным законом — с него начинается изучение механики. Однако чтобы понять его, надо было отвлечься от того, что происходит непосредственно перед глазами. В обычных условиях движению тела в горизонтальной плоскости мешают трение и сопротивление воздуха; при движении в вертикальной плоскости на тело действуют сила сопротивления воздуха и сила тяжести. От их влияния надо было освободиться хотя бы мысленно. На это ушло много лет.

Только после того как был понят закон инерции — закон движения тел при идеализированных условиях, можно было рассматривать движение тел под действием сил.

Закон падения тел на Земле установил Галилей (1564—1642). Он первым поставил перед собой задачу понять, как меняется скорость падающего тела в последовательные промежутки времени. Таким образом, он ввел в механику ускорение и установил, что ускорения всех тел, падающих на землю, одинаковы и постоянны. Но то, что причина ускорения — сила тяжести, было лишь позже понято Ньютоном.

Почти через сто лет после публикации работы Галилея Ньютон открыл закон всемирного тяготения (1687 г.), согласно которому сила тяжести не постоянна, а убывает с увеличением расстояния между телами как квадрат этого расстояния.

Если бы физика исторически развивалась в таком порядке, в каком она излагается в учебниках, то только после открытия Ньютона можно было бы перейти к изучению законов движения планет. Но развитие науки не подчиняется логике учебника. Значительно раньше Ньютона эти законы установил современник Галилея Иоган Кеплер (1571—1630).

Познания Кеплера в механике по сравнению со знаниями современного школьника были крайне скудными. Он не только не знал законов Ньютона (они еще не были открыты), но и имел весьма смутное представление о том, что такое сила. Все, что было в руках Кеплера, — это очень аккуратные дневники наблюдений движения небесных тел, которые в течение многих лет вел его учитель Тихо Браге *) и продолжал вести он сам. Только необычайное трудолюбие и уверенность в существовании простых законов, управляющих движением планет, позволили ему открыть законы, которые с тех пор носят его имя.

Законы Кеплера и сейчас не так уж очевидны. В основном это связано с тем, что эллипсы — кривые, по которым движутся планеты, плохо известны обычному читателю. В действительности же получить законы Кеплера не так уж трудно. Для этого нужно воспользоваться двумя законами механики: законом сохранения энергии (который не был известен ни Кеплеру, ни Ньютону) и законом сохранения момента количества движения. Последний, как мы увидим, эквивалентен второму закону Кеплера: *площади, заметаемые радиусом-вектором планеты за одинаковые промежутки времени, одинаковы.*

---

*) Тихо Браге был одним из последних астрономов, наблюдавших движение небесных тел невооруженным глазом.

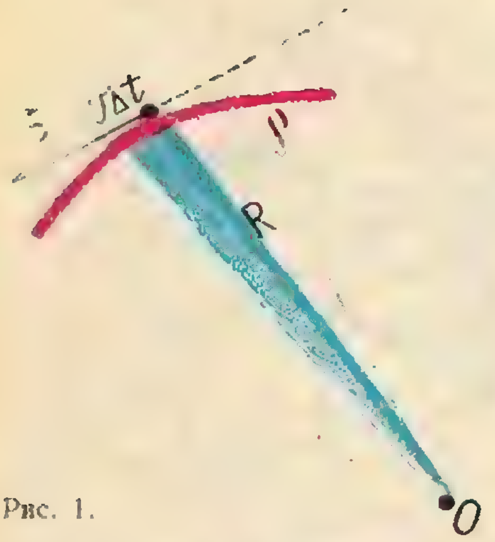


Рис. 1.

Закон сохранения момента количества движения

Мы не будем выводить этот закон, а только сформулируем его для случая движения одной частицы под действием силы тяжести Солнца или Земли.

Если частица с массой m движется в поле тяжести Солнца или Земли (точка O на рисунке 1) со скоростью $\vec{v}$, то ее *количество движения* (*импульс*)

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

На рисунке 1 изображен кусочек траектории частицы. Вектор $\vec{P}$ направлен по касательной к траектории. Опустим из начала координат — точки O — перпендикуляр на прямую, определяемую вектором $\vec{P}$. Расстояние ρ от начала координат до этой прямой (длину опущенного нами перпендикуляра) называют *прицельным параметром*.

Моментом количества движения или угловым моментом L называется произведение

$$L = \rho m v = \rho P.$$

Так как момент силы тяжести относительно точки O равен нулю, *момент количества движения частицы не изменяется при ее движении.*

Покажем, что закон сохранения момента количества движения эквивалентен закону площадей Кеплера.

Действительно, если посмотреть на голубой треугольник с основанием, равным $v\Delta t$, то легко заметить, что его площадь равна

$$S = \frac{1}{2}(v\Delta t)\,\rho.$$

Здесь ρ — высота треугольника и в то же время прицельный параметр.

Если Δt мало, то основание треугольника практически совпадает с кусочком траектории, который частица проходит за время Δt, а сам треугольник — это кусочек площади, которую проходит (иногда говорят «заметает») радиус-вектор частицы за время Δt. Но $\rho m v = L$, поэтому

$$S = \frac{1}{2m} L\Delta t.$$

Так как момент количества движения L не меняется со временем, то площадь, которую «заметает» радиус-вектор частицы, пропорциональна времени. За равные промежутки времени радиус-вектор частицы всегда «заметает» равные площади.

Второй закон Кеплера можно рассматривать как обобщение закона инерции. *При свободном движении остается постоянным путь, проходимый частицей в единицу времени, и при движении в поле тяжести остается постоянной площадь, «заметаемая» радиусом-вектором частицы.*

Кеплер не знал закона сохранения момента количества движения и открыл его эмпирически. Сначала он думал, что скорости движения планет обратно пропорциональны их расстояниям до Солнца. Но такое предположение не сходилось с наблюдениями, записанными в журналах Тихо Браге. Тогда Кеплер попробовал найти несколько более сложный закон. Он стал рассматривать все возможные радиусы-векторы планеты одновременно. Такая картина — своего рода эквивалент вычисления площади. И Кеплер обнаружил, что площади, покрываемые радиусом-вектором планеты в единицу времени, одинаковы на всех участках орбиты.

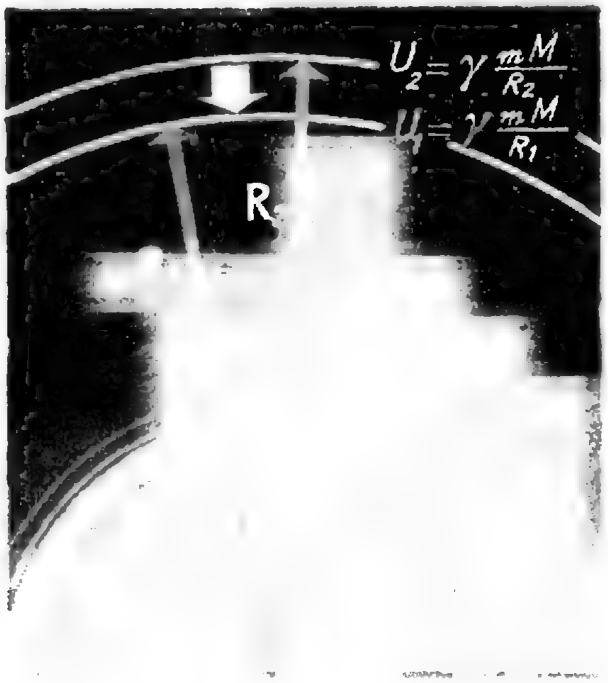


Рис. 2.

Закон сохранения энергии

На поверхности Земли сила тяжести равна mg. Если ввести потенциальную энергию тела в поле тяжести $U=mgh$ (h — расстояние от тела до Земли), то можно утверждать, что при движении тела сумма его кинетической и потенциальной энергий $E=\frac{mv^2}{2}+mgh$ не меняется.

Однако выражение для U, которое мы написали, справедливо только при небольших расстояниях от тела до Земли, когда h мало по сравнению с радиусом Земли и силу тяжести можно считать постоянной. Если высота становится большой, то сила тяжести уменьшается с расстоянием. Согласно закону Ньютона

$$|F|=\gamma\frac{mM}{R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Земли и R — расстояние от тела до центра Земли.

Если пользоваться точным выражением для силы тяжести, то потенциальную энергию надо заменить на $U=-\gamma\frac{mM}{R}$. Проверим это. Вспомним, что работа, которую совершает тело при движении, равна уменьшению его потенциальной энергии. Сосчитаем работу, совершаемую телом, падающим с высоты R_2 до высоты R_1 от центра Земли (рис. 2). Для этого надо вычислить разность потенциальных энергий тела:

$$\text{работа}=U_2-U_1=$$
$$=\gamma mM\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)=$$
$$=\gamma mM\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right).$$

Если $R_2-R_1\ll R_1$ ($R_2\approx R_1$), то произведение R_1R_2 можно заменить на R^2 — квадрат среднего геометрического R_1 и R_2 (при $R_2\approx R_1$: $R\approx R_2\approx R_1$), а R_2-R_1 заменить на l — путь, пройденный телом. Тогда последняя формула приобретет вид

$$\text{работа}=\text{сила}\times\text{путь}=\underbrace{\gamma\frac{mM}{R^2}}_{\text{сила тяжести}}\ \underbrace{l}_{\text{путь}}.$$

Это и означает, что выражение для U, которое мы написали выше, — действительно потенциальная энергия тела.

Теперь нам по-другому нужно записать формулу для полной энергии тела:

$$E=\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R}=m\left(\frac{v^2}{2}-\gamma\frac{M}{R}\right).$$

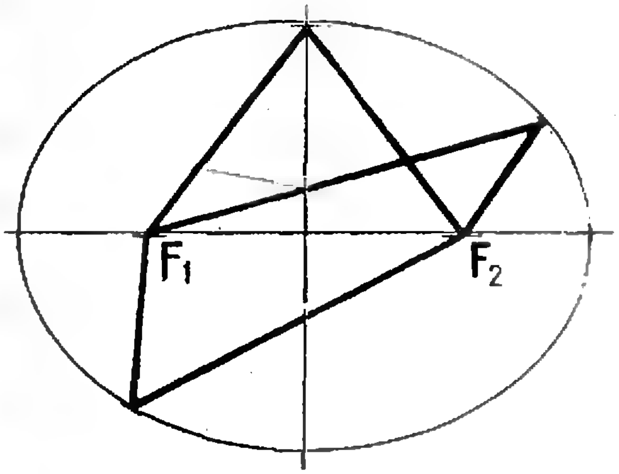


Рис. 3.

Эллипс

Начнем с обычного определения эллипса (рис. 3). *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух точек (фокусов эллипса) постоянна.*

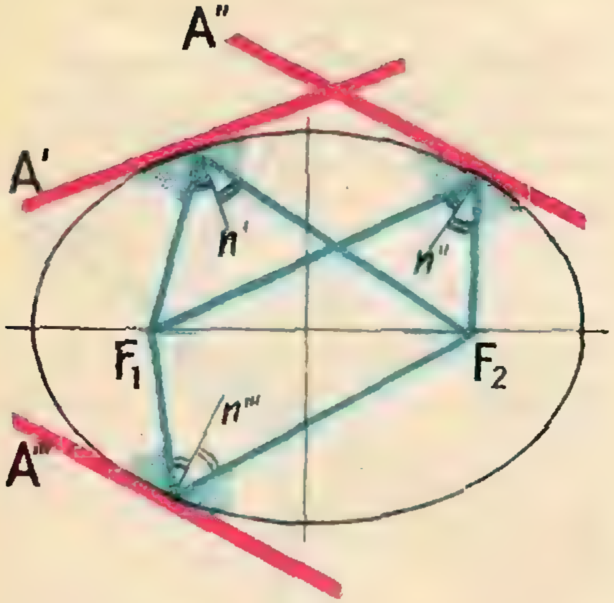


Рис. 4.

Из этого определения можно вывести интересное «оптическое» свойство эллипса: если в одном из фокусов зеркального эллипсоида *) поместить источник света, то все лучи, вышедшие из него, соберутся в другом фокусе эллипсоида **). Это означает, что углы между прямыми, идущими в точку эллипса из его фокусов, и касательной к эллипсу равны между собой (рис. 4).

Докажем, что эллипс обладает еще одним свойством, которое даже удобно принять за определение эллипса. Для этого проведем касательную t к эллипсу в точке A и опустим из обоих фокусов эллипса перпендикуляры на эту касательную (рис. 5). Один из перпендикуляров продолжим за прямую t на расстояние $F_2'N_2$, равное N_2F_2. Соединим теперь точки F_2' и F_1 с точкой A. Покажем, что $F_2'AF_1$ — прямая.

Это сразу видно из того, что $\alpha_1 = \alpha_2$ (по построению) и $\alpha_1 = \alpha_3$ (согласно оптическому свойству эллипса). Следовательно, $\alpha_2 = \alpha_3$, а, значит, $F_2'AF_1$ — прямая.

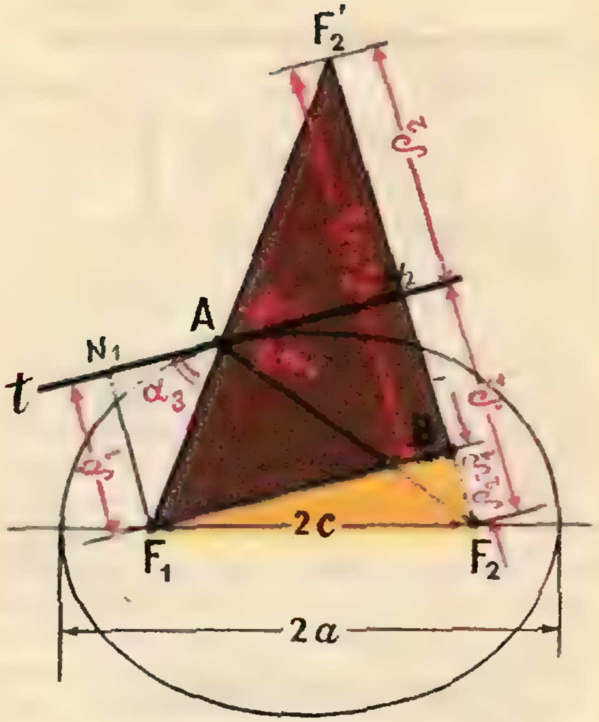


Рис. 5.

Далее, так как $AF_2' = AF_2$, то $F_1F_2' = F_1A + AF_2' = F_1A + AF_2$, то есть отрезок F_1F_2' равен сумме расстояний от точки эллипса до фокусов. Обозначим эту сумму $2a$. Опустим теперь перпендикуляр F_1B на прямую F_2F_2', вычислим длину катета F_1B из двух прямоугольных треугольников — коричневого и желтого — и приравняем оба выражения для F_1B друг другу:

$$(2a)^2 - (\rho_1+\rho_2)^2 = (2c)^2 - (\rho_2-\rho_1)^2.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\rho_1\rho_2 = a^2 - c^2.$$

Итак, произведение $\rho_1\rho_2$ не зависит от того, в какой точке проведена касательная. Проведем ее в конце малой полуоси (рис. 6). В этом случае $a^2 - b^2 = c^2$. Поэтому $\rho_1\rho_2 = b^2$.

Таким образом, мы получили основную теорему:

Произведение расстояний от двух фокусов до любой касательной эллипса есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

---

*) Эллипсоидом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек постоянна. Такая поверхность получается при вращении эллипса вокруг своей оси.

**) Доказать это свойство эллипса проще всего, воспользовавшись принципом Ферма (см. «Квант» № 11, 1970).

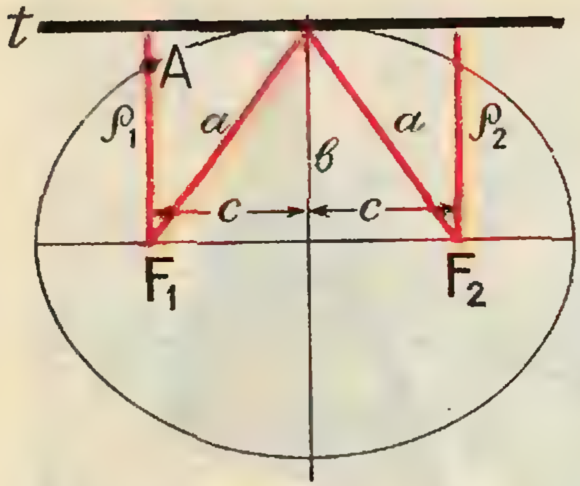


Рис. 6.

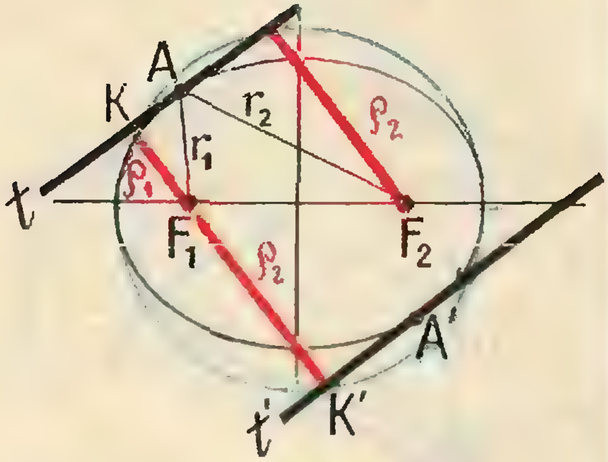


Рис. 7.

Первый закон Кеплера

Теперь мы можем рассмотреть движение планеты. Для простоты мы не будем доказывать, что орбита планеты — эллипс, а, предположив это и используя законы сохранения момента количества движения и энергии, найдем его полуоси и убедимся в том, что движение по эллипсам в поле тяжести не противоречит законам сохранения.

Отметим два положения планеты A и A', симметричные относительно центра эллипса (рис. 7). Можно сказать и иначе: точка A — истинное положение планеты в некоторый момент времени, а A' — получена из первой переносом Солнца в другой фокус, в то время как планета остается на прежнем месте.

Запишем закон сохранения энергии. Отмечая величины индексом 1 для точки A и индексом 2 для точки A', получим ($E_1 = E_2 = E$)*).

$$-E = \frac{mv_1^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_2}.$$

Угловой момент планеты равен произведению количества движения mv_1 (или mv_2) на «плечо» — прицельный параметр ρ_1 (или ρ_2), причем угловой момент для обоих положений планеты одинаков:

$$L = mv_1\rho_1 = mv_2\rho_2.$$

Вычислим произведение кинетических энергий планеты в точках A и A':

$$T_1T_2 = \frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{mv_2^2}{2} = \left(-E + \frac{\alpha}{r_1}\right)\times$$

$$\times\left(-E + \frac{\alpha}{r_2}\right).$$

(Здесь $\alpha = \gamma Mm$.)

Заменив в этом уравнении скорости их выражениями через момент количества движения, после простых преобразований получим:

$$\frac{1}{4}\,\frac{L^4}{m^2\rho_1^2\,\rho_2^2} - E^2 = \frac{-\alpha(r_1 + r_2)E + \alpha^2}{r_1r_2}.$$

Нетрудно увидеть, что это равенство выполняется, если орбита планеты — эллипс. Действительно, для этого нужно положить

$$r_1 + r_2 = \frac{\alpha}{E} = 2a$$

и

$$\rho_1\rho_2 = \frac{L^2}{2mE} = b^2.$$

Оба эти равенства — не что иное, как два определения эллипса, приведенные выше.

Таким образом, наша траектория — эллипс с полуосями: большой

$$a = \gamma\frac{mM}{2E} \text{ и малой } b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}.$$

---

*) Кинетическая энергия планеты меньше потенциальной (иначе планета улетела бы от Солнца), поэтому полная энергия $T + U = -E < 0$.

Еще одно уравнение эллипса

Вернемся к закону сохранения энергии. Выразив опять скорость планеты через ее момент количества движения L и подставив затем в выражение для полной энергии планеты, получим

$$\frac{L^2}{2mE\rho^2}-\gamma\frac{mM}{RE}=-1.$$

Если в этом уравнении заменить выражение $\gamma\frac{mM}{2E}$ на a, а выражение $\frac{L^2}{2mE}$ на b^2, то мы получим, что

$$\frac{b^2}{\rho^2}-\frac{2a}{R}=-1$$

или

$$\frac{b^2/a}{\rho^2}=\frac{2}{R}-\frac{1}{a}.$$

Здесь R — расстояние от точки на эллипсе (планеты) до какого-либо фокуса (Солнца), а ρ — длина перпендикуляра, опущенного из этого же фокуса на касательную к той же точке.

Можно показать, что $\frac{b^2}{a}=l$ — ордината точки эллипса, для которой абсцисса равна c (точка A на рис. 6). Тогда закон сохранения энергии можно записать так:

$$\left(\frac{l}{\rho}\right)^2=\frac{2}{R}-\frac{1}{a}.$$

Так как мы знаем, что планеты движутся по эллипсам, то это равенство можно рассматривать как уравнение траектории, связывающее расстояние R до планеты с расстоянием до касательной ρ. Оно называется *полярно-касательным* уравнением эллипса. Если бы мы его знали раньше (оно редко приводится в учебниках), то сразу могли бы сказать, что *первый закон Кеплера — это просто закон сохранения энергии* для движения планет.

Скорость

Оказывается, мы можем определить не только траекторию планеты, но и ее скорость в любой точке траектории. Пусть это точка A на рисунке 7.

Напишем опять

$$\rho_1\rho_2=b^2 \text{ и } L=mv_1\rho_1.$$

Отсюда

$$v_1=\frac{L}{mb^2}\rho_2.$$

Далее, так как $b=\frac{L}{\sqrt{2mE}}$, то $v_1=\frac{2E}{L}\rho_2$.

Таким образом, величина скорости пропорциональна расстоянию от касательной к эллипсу в точке A до второго фокуса эллипса. Направлена скорость, конечно, по касательной к эллипсу.

Проведем еще касательную t' к эллипсу в точке A' (рис. 7). Очевидно, что расстояние от фокуса F_1 до касательной t' также равно ρ_2. Поэтому при движении планеты отрезок KK' вращается вокруг точки F_1 так, что его длина меняется, но произведение отрезков KF_1 и $K'F_1$ остается постоянным.

Из формулы $\rho_1\rho_2=b^2$ можно получить интересное свойство траектории планеты. Заменяя прицельные параметры ρ_1 и ρ_2 на скорости $\left(\rho_1=\frac{v_1L}{2E}\right.$ и $\left.\rho_2=\frac{v_2L}{2E}\right)$ и подставляя вместо b^2 выражение $\frac{L^2}{2mE}$, получим

$$v_1v_2=\frac{2E}{m}.$$

Здесь v_1 и v_2 — скорости планеты в двух точках эллипса, симметричных относительно центра.

Упростим эту формулу. Если бы частица с энергией E двигалась свободно, то ее скорость была бы равна $v_0=\sqrt{\frac{2E}{m}}$ (так как $\frac{mv_0^2}{2}=E$). Будем измерять скорость в единицах v_0*).

---

*) Введя v_0, выражение для малой полуоси эллипса можно записать в таком виде:

$$b=\frac{L}{mv_0}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что скорость планеты на концах малой полуоси как раз равна v_0.

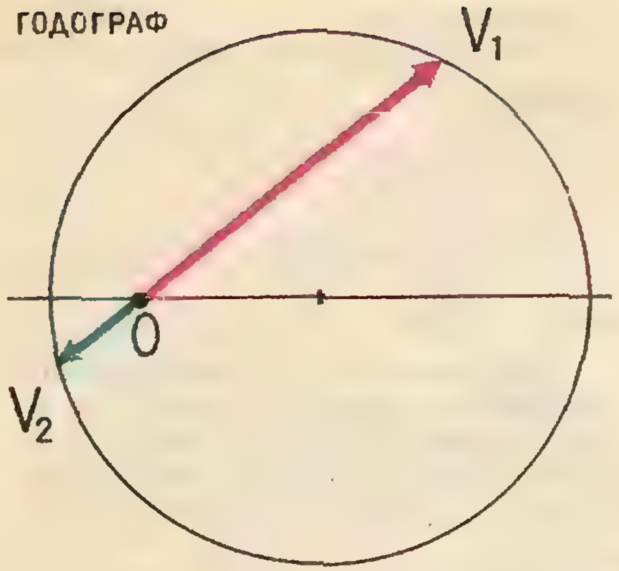


Рис. 8.

Тогда скорость планеты будет безразмерной. Скорость — это число, показывающее, сколько раз v_0 содержится в скорости планеты:

$$\beta_1 = \frac{v_1}{v_0} \text{ и } \beta_2 = \frac{v_2}{v_0}.$$

Согласно предыдущему скорости β_1 и β_2 связаны соотношением

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta_2}.$$

Что это значит? Если частица движется в какой-то точке орбиты со скоростью β, то в точке, симметричной относительно центра орбиты, ее скорость будет равна $\frac{1}{\beta}$

Мы описывали траекторию планеты, задавая ее положение (координаты) в каждый момент времени. Можно поступить и иначе — задавать скорости планеты. Кривая, которую мы при этом получим, называется *годографом скорости* (*можно сказать, что это* траектория в пространстве скоростей). Так как произведение отрезков β_1 и β_2 постоянно, то годограф скорости планеты — окружность (рис. 8) (вспомните теорему: «Пусть внутри окружности дана точка. Тогда для всех хорд, проходящих через эту точку, произведения длин отрезков, *на которые делит* хорды эта точка, одинаковы»).

Если мы заменим скорость β на $\frac{1}{\beta}$ в каждой точке годографа, то годограф не изменится, а просто скорость повернется на 180°. Это свойство называется инвариантностью *движения относительно инверсии* скорости.

Если траектория планеты круговая, то $\beta = 1$ (докажите!). В этом случае годограф — окружность с центром в начале координат.

Период обращения

Для того чтобы вычислить период обращения — время полного оборота планеты вокруг Солнца или искусственного спутника вокруг Земли, — надо сосчитать время прохождения *каждого участка траектории* (отдельно, так как скорость все время меняется) и просуммировать затем по всем участкам. Сделать это элементарно, конечно, нельзя, но можно обойти все трудности.

Из второго закона Кеплера мы знаем, что за время Δt радиус-вектор планеты «заметает» площадь, равную $\frac{L}{2m}\Delta t$ (напомним, что $L = \text{const}$). Значит, период обращения можно вычислить, поделив площадь эллипса на постоянную скорость «заметания»

$$T = \frac{S_{\text{эллипса}}}{L/2m}.$$

Так как эллипс получается из окружности, сжатой в одном направлении в $\frac{b}{a}$ раз*), то площадь эллипса равна

$$S_{\text{эллипса}} = S_{\text{круга}} \cdot \frac{b}{a} = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Из этих формул получаем

$$T = \frac{2\pi abm}{L}.$$

Но $b = \frac{L}{\sqrt{2Em}}$, поэтому

$$T = \pi a \sqrt{\frac{2m}{E}}, \quad (*)$$

---

*) См. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» («Квант» № 9, 1970).

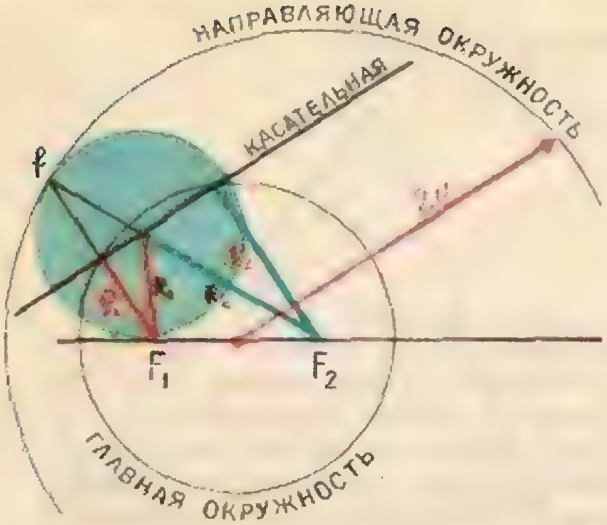


Рис. 9.

Эллипс — геометрическое место центров окружностей, проходящих через фокус и касающихся заданной окружности (направляющей окружности).

или, подставив сюда выражения для a $\left(a=\gamma\frac{Mm}{2E}\right)$ и заменив $\left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2}$ на v_0^3, получим

$$T=2\gamma\pi M\frac{m}{2E}\sqrt{\frac{m}{2E}}=2\frac{\pi\gamma M}{v_0^3}.$$

Из этой формулы видно, что период сбращения зависит только от величины v_0. Если из одной и той же точки над поверхностью Земли выпущено несколько одинаковых спутников в разных направлениях, но с одной и той же скоростью v_0, то все они одновременно (через время T) соберутся в той же точке.

Третий закон Кеплера

Если теперь в формулу (*) для периода обращения планеты вместо энергии E подставить ее выражение через большую полуось $\left(E=\gamma\frac{mM}{2a}\right)$, то получим

$$T=2\pi a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\gamma M}}.$$

Следовательно, T^2 пропорционально a^3, то есть квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси эллипса. А это и есть третий закон Кеплера.

В этой статье мы рассказывали понемногу о геометрии, об оптике и механике. Решите теперь задачи.

Оптическая задача

В одном из фокусов эллипсоида, внутренняя поверхность которого зеркальна, находится точечный источник света. Построить изображение этого источника для наблюдателя, находящегося во втором фокусе эллипсоида.

Геометрическая задача

Показать, что эллипс есть геометрическое место центров окружностей, проходящих через фокус и касающихся заданной окружности (направляющей окружности) (рис. 9).

На рисунке видно, что основания перпендикуляров ρ_1 и ρ_2 лежат на «главной окружности». Случайно ли это?

Космическая задача

Орбита спутника Земли имеет параметры: наибольшее расстояние R, наименьшее расстояние r. Вычислить полную энергию и угловой момент спутника. Найти скорости спутника на концах большой и малой осей.

Красивое построение

Рисунок на обложке журнала построен так: внутри окружности выбрана точка, и из нее как из центра проведена окружность меньшего радиуса. Из центра этой второй окружности проведены лучи до встречи с большой окружностью. Через точку на каждом луче, лежащую посередине между двумя окружностями, проведена хорда, перпендикулярная этому лучу. Пятно внутри имеет форму эллипса.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Э. Г. Готман

Решение многих геометрических задач начинается с проведения вспомогательных линий, которые помогают установить связь между данными и неизвестными элементами фигуры. Отыскать удачное вспомогательное построение часто бывает нелегко. Поэтому к каждой решенной задаче следует присмотреться и постараться выяснить, почему те или иные вспомогательные линии приводят к цели. Нельзя ли найденный прием использовать при решении некоторых других задач?

На очередном заседании математического кружка рассмотрим один из интересных приемов решения геометрических задач, который состоит в том, что в чертеж вводится вспомогательная окружность.

Пример 1. В остроугольном треугольнике проведены высоты AP, BQ и CR. Доказать, что $\angle ABQ = \angle APR$ *).

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 1). Так как $\angle APB$ и $\angle CRB$ прямые, то около четырехугольника $BPHR$ можно описать окружность, приняв BH за диаметр. Построив ее, замечаем, что $\angle ABQ = \angle APR$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

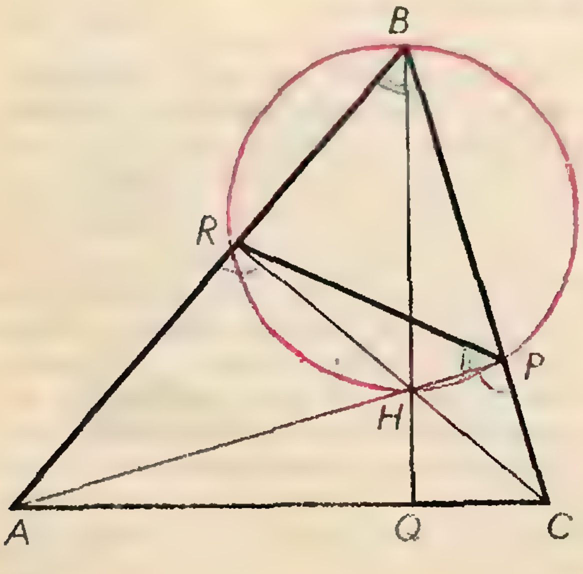


Рис. 1.

Таким образом, построение вспомогательной окружности позволило использовать теорему о вписанных углах и благодаря этому установить связь между указанными в задаче углами.

Выясните, как изменится результат, если $\angle B$ треугольника ABC тупой.

Решите самостоятельно несколько аналогичных задач.

1. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу AB перпендикуляр MN. Доказать, что $\angle MAN = \angle MCN$.

2. Доказать, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, внешне построенного на гипотенузе, делит прямой угол треугольника пополам.

3. Из произвольной точки M внутри данного угла опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из вершины угла A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Доказать, что $\angle KAP = \angle MAQ$.

Пример 2. Доказать, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

---

*) См. «Квант» № 1, 1970, стр. 59.

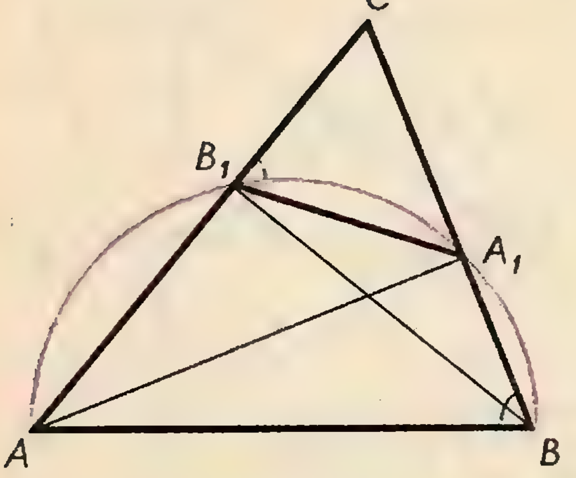


Рис. 2.

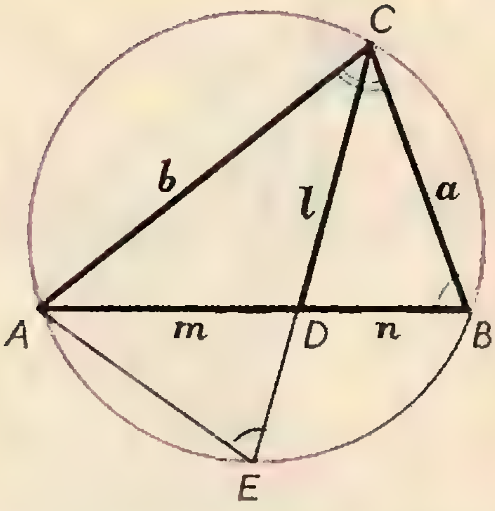


Рис. 3.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 2). $\angle AA_1B$ и $\angle AB_1B$ прямые, поэтому окружность, построенная на стороне AB треугольника как на диаметре, пройдет через точки A_1 и B_1. Далее, $\angle ABC = 180° - \angle AB_1A_1$, $\angle A_1B_1C = 180° - \angle AB_1A_1$, поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C$, и треугольники ABC и A_1B_1C подобны.

Эту задачу можно решить и без вспомогательных построений, если заметить, что треугольники AA_1C и BB_1C подобны, и записать пропорцию

$$\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}.$$

Решите каждую из двух следующих задач обоими способами.

4. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены высоты AM и AN. Доказать, что треугольники AMN и ABC подобны.

5. Из основания H высоты CH треугольника ABC опущены на стороны AC и BC перпендикуляры HM и HN. Доказать, что треугольник CMN подобен треугольнику ABC.

Иногда выгодно описать окружность и около треугольника.

Пример 3. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением заключающих ее сторон и произведением отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой.

Решение. Около треугольника ABC опишем окружность и продолжим биссектрису CD треугольника до встречи с окружностью в точке E (рис. 3). Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$, $BD = n$, $CD = l$, $DE = x$.

По условию $\angle ACE = \angle BCE$, кроме того, $\angle AEC = \angle ABC$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ACE и BCD подобны и справедливо равенство $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$, откуда $l^2 = ab - lx$. Хорды AB и CE пересекаются в точке D. Поэтому выполняется равенство $lx = mn$. Следовательно, $l^2 = ab - mn$.

Пример 4. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение. Пусть высота CH и медиана CM треугольника ABC образуют со сторонами AC и BC равные углы (рис. 4). Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим медиану CM до встречи с окружностью в точке D. Рассмотрим треугольники ACH и BCD. Так как $\angle ACH = \angle BCM$ по условию и $\angle A = \angle D$,

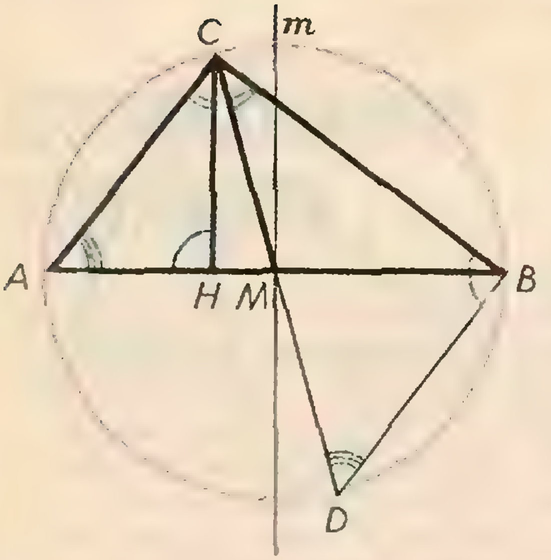


Рис. 4.

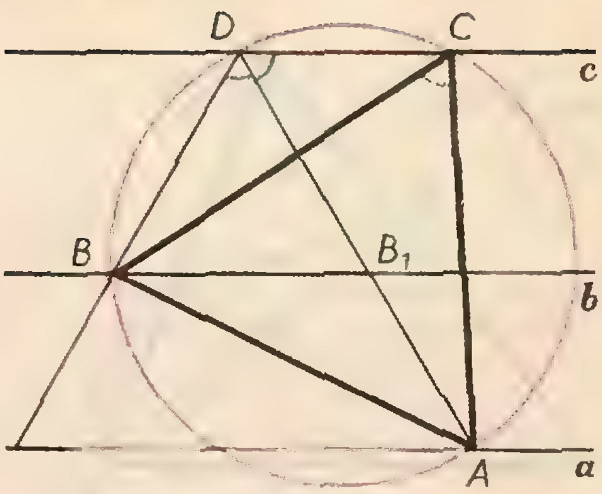


Рис. 5.

как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то $\angle AHC = \angle CBD = 90^\circ$. Следовательно, CD — диаметр окружности.

Центр окружности лежит на диаметре CD и на перпендикуляре m к стороне AB в ее середине M. Так как медиана CM не является высотой, то прямые CD и m имеют только одну общую точку M, которая и является центром описанной окружности. Следовательно, AB — диаметр окружности и $\angle ACB = 90^\circ$.

Используйте полученный результат для решения следующих двух задач.

6. Определить углы треугольника, в котором

а) медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части;

б) медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части.

7. Построить треугольник, зная углы, которые образуют медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной вершины.

Пример 5. Построить равносторонний треугольник так, чтобы вершины его лежали соответственно на трех данных параллельных прямых.

Известно несколько решений этой интересной задачи с использованием вращения вокруг точки, подобия и алгебраического метода. Весьма краткое решение получается с помощью построения вспомогательной окружности.

Решение. Пусть ABC — искомый равносторонний треугольник, вершины которого лежат соответственно на параллельных прямых a, b и c (рис. 5). Окружность, описанная около него, пересекает прямую c, кроме точки C, еще в некоторой точке D. Тогда на основании свойства вписанных углов имеем $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$.

Отсюда вытекает следующее построение. Из произвольной точки D прямой c проведем лучи, образующие с прямой c углы 60° и 120°. Пусть один из лучей пересечет прямую a в точке A и прямую b в точке B_1, а другой пересечет прямую b в точке B. Тогда отрезок AB будет стороной треугольника ABC.

Отложим на прямой c отрезок DC, равный отрезку AB_1, так, чтобы точки C и A лежали по одну сторону от прямой BD. Тогда точка C — третья вершина треугольника ABC, так как треугольники ABB_1 и BCD равны, откуда следует, что $AB = BC$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Таким образом, прием построе-

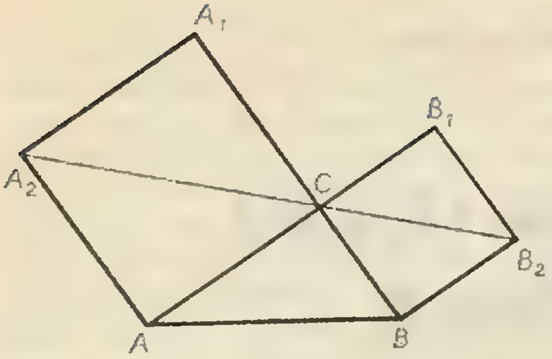


Рис. 6.

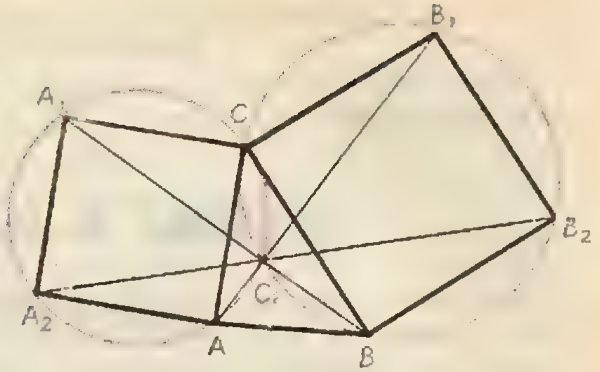


Рис. 7.

ния вспомогательной окружности целесообразно применять и при решении некоторых задач на построение.

Рассмотрим еще одну более сложную задачу, при решении которой самое трудное — догадаться описать около квадратов окружности.

Пример 6. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Доказать, что прямые AB_1, A_1B и A_2B_2 пересекаются в одной точке, и определить углы между этими прямыми.

Решение. Если $\angle ACB = 90^\circ$, то справедливость теоремы очевидна. Прямые AB_1 и A_1B перпендикулярны и каждая из них пересекает прямую A_2B_2 в точке C под углом 45° (рис. 6).

Если $\angle ACB \neq 90^\circ$, то окружности, описанные около квадратов, имеют кроме точки C еще одну общую точку C_1, которая как раз и оказывается точкой пересечения прямых AB_1, A_1B и A_2B_2 (рис. 7). Действительно, $\angle A_2C_1C = 90^\circ$, как вписанный, опирающийся на полуокружность. Аналогично $\angle CC_1B_2 = 90^\circ$. Поэтому $\angle A_2C_1C + \angle CC_1B_2 = 180^\circ$, т. е. лучи C_1A_2 и C_1B_2 составляют прямую.

Точно так же доказывается, что точка C_1 лежит на прямых AB_1 и A_1B.

Рассматривая полученные вписанные углы, находим, что прямые AB_1 и A_1B взаимно перпендикулярны и каждая из этих прямых образует с прямой A_2B_2 угол 45°.

Следующая задача имеет много общего с предыдущей.

8. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и каждая из них образует с другой угол 60°.

9. Доказать, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче второй диагонали.

Приведем еще две задачи на максимум и минимум, для решения которых также целесообразно определенным образом построить вспомогательную окружность.

10. На одной стороне угла с вершиной в точке S даны точки A и B. Найти на другой стороне точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

11. Из произвольной точки M, лежащей на стороне AB треугольника ABC (или на ее продолжении), проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам AC и BC. При каком условии отрезок PQ будет наименьшим?

Таким образом, разнообразные геометрические задачи решаются с помощью одного и того же приема. Построение вспомогательной окружности позволяет увеличить число теорем, которыми можно пользоваться при решении задачи, и благодаря этому отыскивать зависимость между элементами фигуры.

А. Г. Косоуров

ВОЛНЫ В МЕЛКОЙ ТАРЕЛКЕ (ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ)

> Бросая в воду камешки, наблюдай круги, ими образуемые.
>
> К. Прутков

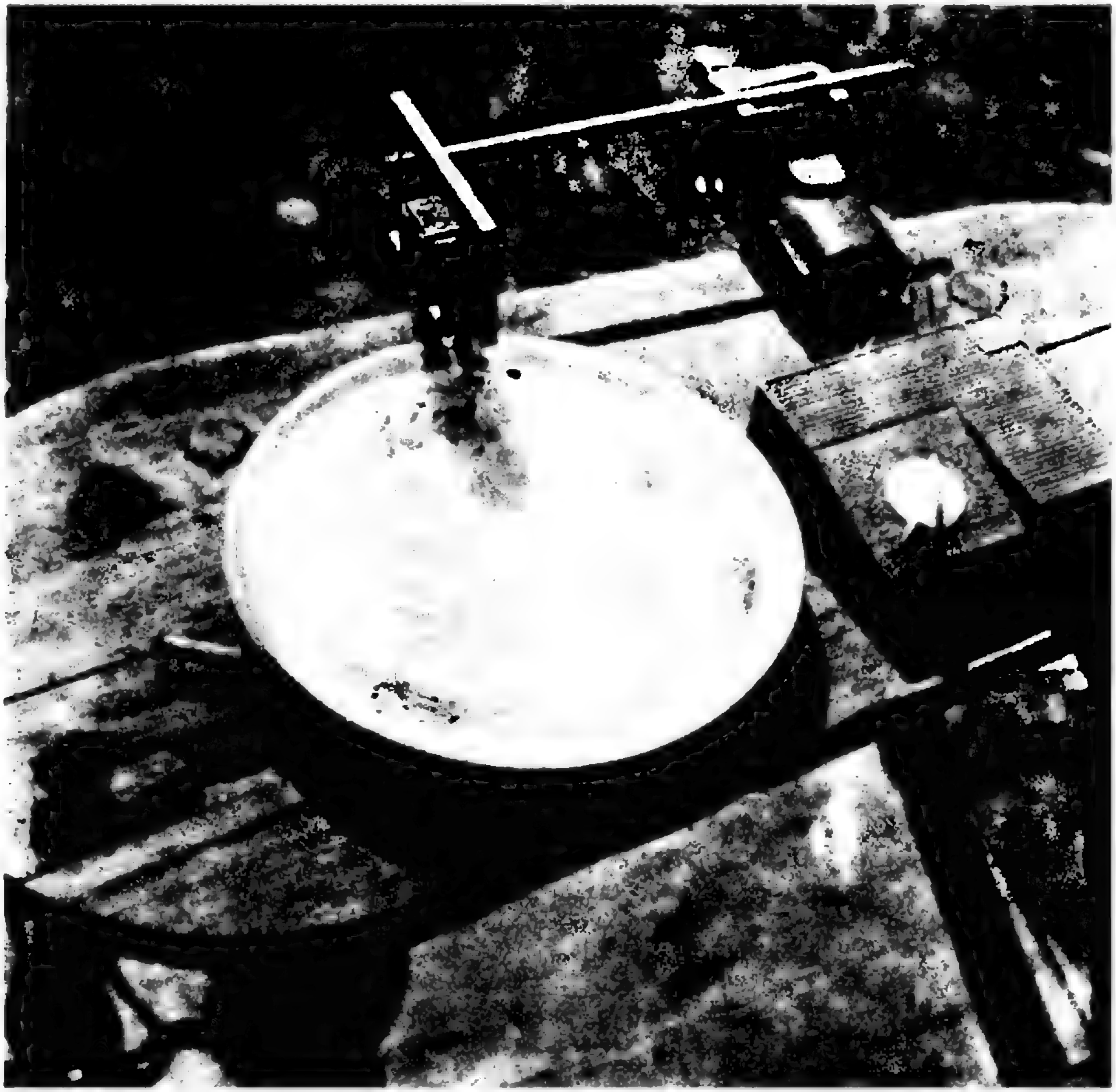


Рис. 1. Установка для наблюдения волн. Одиночный источник.

Нет в природе явления более универсального, чем распространение волн. Волны на поверхности воды, звук, свет, радио, передача деформации от одних частей твердого тела к другим — все это волновые процессы. Квантовая механика показывает, что и движением микрочастиц управляют волновые законы. Все эти волны имеют разную физическую природу, разные скорости распространения, разные частоты и длины волн. Но независимо от этого в движении любых волн много общего. Изучив законы распространения волн одной природы, можно большинство их них практически без изменения перенести на волны другого типа. Изучать же волны удобнее всего на поверхности воды.

Что такое волна? Бросьте в пруд камень. На спокойной горизонтальной поверхности пруда возникнут разбегающиеся круги. Точки поверхности воды, до которых дошла волна, начинают колебаться относительно своего равновесного положения. Это положение соответствует горизонтальной поверхности. Чем дальше находится точка от места падения камня, тем с большим запозданием «узнает» она о падении камня. Возмущение распространяется с определенной скоростью. Точки, до которых возмущение дошло одновременно, находятся в одинаковой стадии колебательного движения (в одинаковой фазе). Скорость перемещения этой фазы и есть скорость волны. Она измеряется в направлении нормали к фронту волны.

Для волн любой природы всегда можно указать физические объекты, которые под действием волны испытывают возмущение, то есть отклонение от своих равновесных значений. Для звука — это периодические повышения и понижения давления. Для радиоволн и света — быстрые изменения напряженности электрического и магнитного поля.

Свойства всех без исключения сред таковы, что возмущение, возникшее в некоторой области, распространяется, передаваясь от точки к точке с конечной скоростью, которая зависит от природы возмущения и свойств среды.

Для возникновения волны необходим источник возмущения, т. е. внешняя причина, вызывающая в некоторой области среды нарушение равновесия. Источник малого размера, как, например, камень, брошенный в воду, излучает в однородной среде (т. е. в такой среде, в которой скорость волны не зависит от направления ее распространения) сферические волны (на поверхности воды — круговые), распространяющиеся по радиусам. Такие источники волн называют точечными.

Один из основных принципов элементарной волновой теории — принцип независимости волн или принцип суперпозиции. Он утверждает, что возмущение, которое вызывает волна в точке наблюдения, не зависит от того, что через эту точку одновременно проходят другие волны. Принцип суперпозиции дает простое правило для нахождения суммарного действия волн от нескольких источников: суммарное колебание просто равно сумме колебаний, вызываемых каждым источником в отдельности.

Характерная особенность волновых процессов — интерференция волн. Интерференцией называют совокупность явлений, возникающих в среде при распространении волн от двух или нескольких источников, колеблющихся согласованно (синхронно). При этом оказывается, что в некоторых точках среды колебания, вызванные одновременным действием двух источников, будут сильнее или слабее, чем колебания, вызванные каждым источником в отдельности. Может случиться, что согласованные волны вообще погасят одна другую.

На первый взгляд явление интерференции противоречит принципу суперпозиции. Прежде чем обсуждать это, постараемся посмотреть на интерференцию собственными глазами. Искушенный глаз без труда увидит интерференцию при пересечении волн от двух брошенных в пруд камней. Однако для изучения интерференции этот способ не годится. Мы получим устойчивую интерференционную картину водяных волн на лабораторном столе.

Прежде всего необходим сосуд с водой. Чтобы волны, отраженные от его стенок, не маскировали волн, идущих от источников, нужен сосуд с пологими стенками. В этом отношении хороша обыкновенная мелкая тарелка, в которую вода наливается почти до самого верха. Набегая на стенки, волны быстро затухают и почти не отражаются. Генератором волн может служить электрический звонок с отвинченным колпачком. К молоточку звонка прикрепите кусок проволоки, на ее конец наденьте пробковый шарик, который и будет точечным источником волн. Проводя опыты, следите за тем, чтобы провода были хорошо изолированы.

Звонок нужно укрепить над тарелкой так, чтобы поворотом звонка можно было погружать пробковый шарик в воду у края тарелки. Питать звонок лучше всего через автотрансформатор. Это позволит регулировать амплитуду колебаний. Очень удобен автотрансформатор от детской железной дороги. Подойдет и трансформатор от прибора для выжигания. Включив устройство, мы увидим на поверхности воды круговые волны с расстоянием между соседними горбами — длиной волны — около 1 *см* (рис. 1 на стр. 36).

Наблюдать волны лучше всего по тени на дне тарелки при прямом солнечном свете или свете яркой лампы. Каждая волна, действуя как цилиндрическая линза, дает на дне тарелки светлую полосу, повторяющую форму фронта волны. Однако волны, бегущие со скоростью около 10 *см/сек*, сливаются для взгляда, фиксированного на неподвижной тарелке. Они видны только вблизи источника, где их амплитуда велика. Чтобы увидеть их на всей поверхности воды, нужно быстро поворачивать голову. Точно так же при быстрых движениях головы можно рассмотреть спицы катящегося колеса. Очень эффектно наблюдать волны на матовом стекле фотоаппарата, особенно крупноформатного. Держа камеру в руках и плавно покачивая ее, легко добиться, чтобы волны были видны на всей поверхности. При этом кажется, что они бегут очень медленно. Можно смотреть на отражение поверхности воды и в зеркале. Легкие движения зеркала также делают волны видимыми по всей поверхности. Но удобнее всего наблюдать волны при стробоскопическом освещении. Если освещать установку короткими вспышками света с частотой, равной частоте источника волн, то от одной вспышки до другой волны переместятся на одну длину волны, и волновая картина волн будет казаться неподвижной. Такое освещение чрезвычайно легко осуществить. Достаточно параллельно обмоткам магнита звонка включить небольшую лампочку. С расстояния 0,5—1 *м* она хорошо и равномерно осветит установку, и неподвижная теневая картина волн будет хорошо видна. Для фотографирования лучше воспользоваться прямым солнечным светом.

Укрепите теперь на молоточке звонка согнутую из проволоки вилку с кусочками пробки на концах. Расстояние между концами вилки 2—3 *см*. Если концы будут опускаться в воду одновременно, получится два источника волн, колеблющихся не только синхронно, т. е. в такт, но и синфазно, т. е. волны от обоих источников будут возникать в один и тот же момент времени. Картина будет примерно такой, как на рисунке 2. От источников волн веером расходятся области больших амплитуд, разделенные областями «молчания». Центральная область больших амплитуд расположена перпендикулярно линии, соединяющей источники. Как области молчания, так и области больших амплитуд проходят между источниками.

Исследование интерференционной картины с линейкой покажет, что расстояние между двумя максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине расстояния между двумя горбами, т. е. половине длины вол-

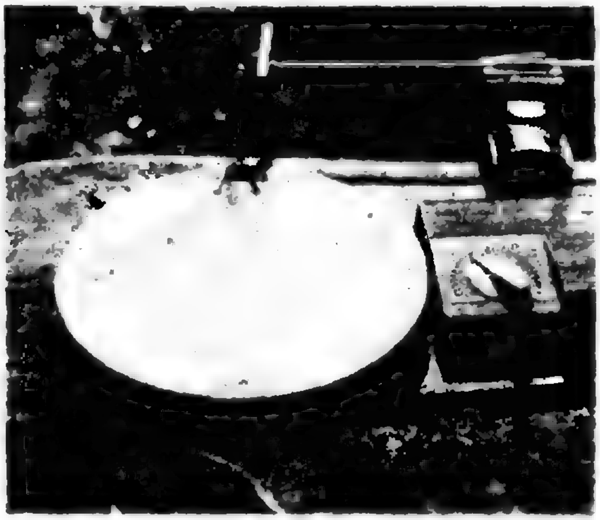


Рис. 2. Интерференция волн от двух источников ($2d/\lambda=4$).

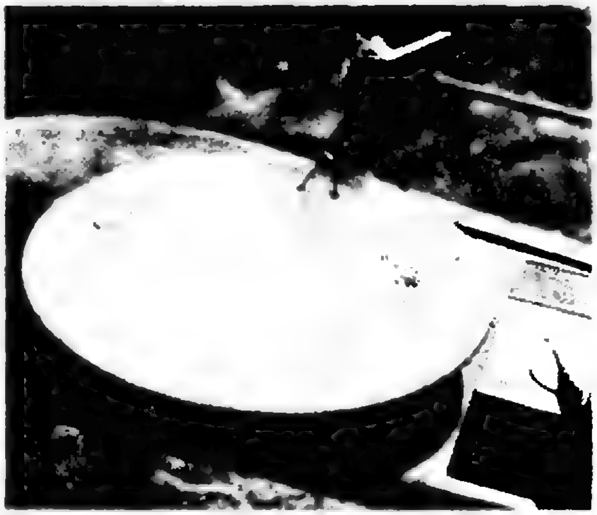


Рис. 3. Интерференция волн от двух источников ($2d/\lambda=2$)

ны. Если изменить расстояние между источниками, то изменится и число полос большой амплитуды (рис. 3). Чем больше расстояние между источниками, тем больше «перьев» в нашем веере. Но расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, всегда равно половине длины волны. Поэтому общее число полос с максимальной амплитудой будет вдвое больше, чем число длин волн, укладывающееся на расстоянии между источниками. Отсюда следует, что если расстояние между источниками меньше половины длины волны, то интерференции вообще не будет. Такие источники действуют как один, давая одну систему круговых волн. Это можно увидеть, постепенно уменьшая расстояние между источниками. Обратите внимание еще и на то, что, продолжая в какой-нибудь области больших амплитуд фронт волны, проходящий через горб, мы в соседней области встретим впадину. Другими словами: при переходе через нулевую область фаза волны меняется на половину полного колебания.

Теперь представьте себе, что у нас не два молоточка, а два источника света, излучающих световые волны, и перпендикулярно поверхности воды мы помещаем экран. Мы увидим освещенные места, соответствующие пересечению экрана и областей с большой амплитудой, и темные, не освещенные места. Мы увидим темные и светлые интерференционные полосы. О том, как осуществить интерференционный опыт в оптике, поговорим как-нибудь в другой раз, а сейчас попробуем объяснить то, что увидели.

Нарисуем на листе бумаги обе системы волн так, словно они замерли в какой-то момент (рис. 4). Горбы волн отметим красным цветом, а впадины — синим. Перенумеруем волны, отметив одинаковыми числами те, которые вышли из источников одновременно. Из чертежа видно, что на линию, равноудаленную от источников, одновременно приходят волны, имеющие одинаковые номера. Это и понятно, так как до точек этой прямой волны прошли одинаковые пути. По принципу суперпозиции мы можем заключить, что на этой линии удвоятся как высоты горбов, так и глубины впадин. Правее и левее этой линии лежат точки, в которых горбы одной системы волн совпадут со впадинами другой. В то время как волны от одного источника вызовут в этих точках отклонение вверх, волны от другого в тот же момент вызовут в этих точках отклонение вниз. Суммарное отклонение в этих точках будет близко к нулю. Соединим все та-

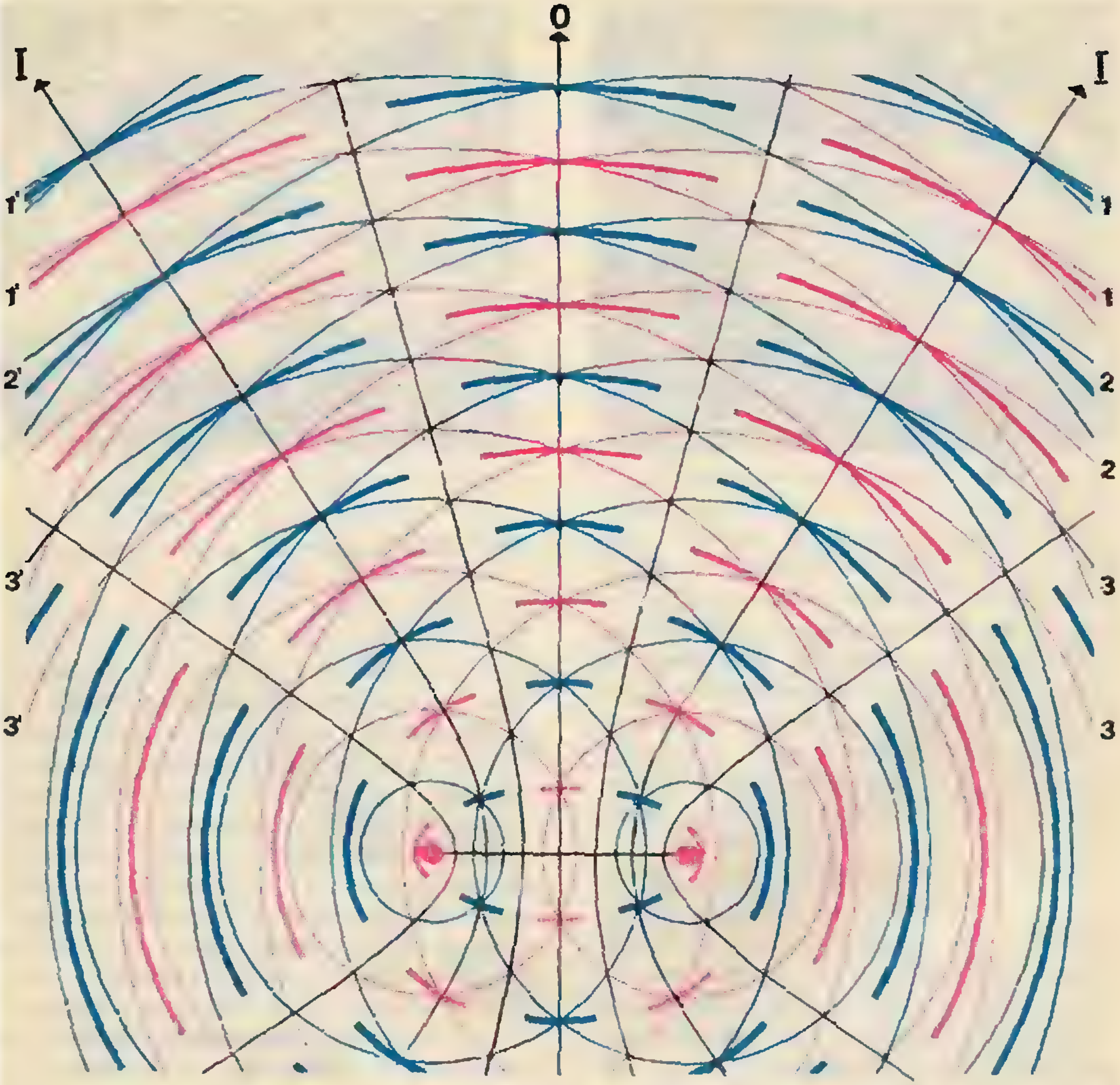


Рис. 4. Сложение колебаний при интерференции волн от двух точечных источников, $2d/\lambda=3{,}6$. Красные линии — горбы, синие — впадины. Утолщенными линиями показаны результирующие волны.

кие точки непрерывной линией. Если проследить за нумерацией горбов и впадин, легко заключить, что до всех точек правой линии левые волны проходят путь на половину длины волны бо́льший, чем правые. Для левой линии на половину длины волны отстают правые волны.

Справа и слева от нулевых линий лежат точки пересечения первого горба со вторым, второго с третьим и т. д. Легко понять, что это тоже области максимумов. Соединив эти точки, мы получим линию, до точек которой одна система волны отстает от другой на одну длину волны.

Продолжая анализ чертежа, можно найти все нулевые линии и все линии максимумов. Линии, которые мы получили, математики называют гиперболами *).

Теперь совершенно ясно, почему расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине длины волны. Действительно, в среднюю точку этой линии волны приходят в одинаковой фазе и усиливают друг друга. Если сместиться из этой точки на полдлины волны, то путь одной волны увеличится на половину длины волны, а другой — уменьшится на такую же величину. Разность хода между волнами в этой точке (разность путей, пройденных волнами от источников до точки) будет равна одной длине волны, и волны снова будут взаимно усиливаться и т. д. через каждую половину длины волны.

Максимум, соответствующий нулевой разности хода, называют нулевым максимумом или нулевым порядком интерференции. Максимумы с разностью хода в одну длину волны — максимумами первого порядка интерференции и т. д. Максимальный порядок интерференции определяется целым числом, ближайшим к $2d/\lambda$, где d — расстояние между источниками, а λ — длина волны. Теперь попробуйте проанализировать сами с помощью чертежа, а может быть, и проверить экспериментально, как изменится картина, если один из источников будет излучать волны с запозданием на половину периода или на какую-нибудь другую его часть. А если сдвиг между колебаниями будет меняться случайным образом? Для экспериментального осуществления волн со сдвигом фаз достаточно сделать концы вилки разной длины.

Из записной книжки экзаменатора

Рентгеновская трубка состоит из стеклянного баллона, наполненного вакуумом.

* * *

Источники света разделяются на два лагеря: естественные и искусственные.

* * *

Единица частоты — герц — названа в честь ученого, открывшего эту единицу.

* * *

Индуктивность измеряется в генрях.

* * *

Чем дальше находится предмет от линзы, тем изображение будет действительнее, чем ближе, тем мнимее.

* * *

Линзы бывают двояковыпуклые и однояковыпуклые.

* * *

Атом сложен и он долго морочил голову ученым.

* * *

Все окружающие нас предметы: столы, стулья и т. д. давят на нас с силой, равной своему весу.

* * *

У нормальных людей зрение хорошее, как вблизи, так и на большом расстоянии.

* * *

Гамма-лучи имеют большую проницательность.

* * *

Насыщенные пары отличаются от ненасыщенных тем, что они уже насытились.

* * *

Луч красного цвета самый длинный, а луч фиолетового — самый короткий.

* * *

Угловая скорость выражается в омегах.

---

*) Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек (фокусов) постоянна.

ЗАДАЧНИК кванта

Этот раздел журнала ведется у нас из номера в номер. В нем публикуются задачи по физике и математике, некоторые из которых довольно трудны. Даже специалистам физикам и математикам решение их дается нелегко. Поэтому не отчаивайтесь, если не сумеете справиться с той или иной задачей. Попробуйте со временем вернуться к ней снова.

Решить задачу — это значит понять, какой математический аппарат, какие уравнения (или теоремы) для этого нужно использовать, какие факторы учесть, а какими — пренебречь; это значит попытаться также установить, где и как применяются на практике указанные в задаче явления. Но вот решение найдено. Вы удовлетворены. Не следует, однако, на этом успокаиваться. Подумайте, как можно обобщить задачу.

Во второй части раздела (примерно через полгода после начала публикации самих задач) мы будем помещать их решения с учетом присланных читателями писем. Такое время нам требуется потому, что на подготовку к печати очередного номера уходит более четырех месяцев.

Школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и удачные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады школьников наравне с победителями Всесоюзной заочной олимпиады. Кроме того, редакция журнала установила несколько специальных премий для авторов наиболее интересных решений.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие из них мы опубликуем в «Задачнике Кванта».

Свои решения и новые задачи присылайте по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта», математика (физика). Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть написано на отдельном листке (листках), страницы пронумерованы. В конце укажите свою фамилию, имя, отчество, а также класс и школу. Решения рассматриваются только в том случае, если они получены не позднее, чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

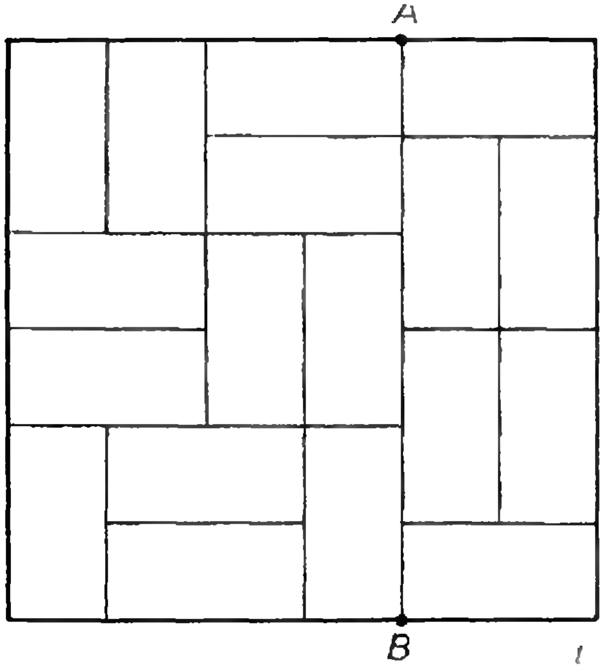


Рис. 1.

М61. Два мудреца играют в новую игру, состоящую в следующем. Выписаны числа 0, 1, 2,..., 1024. Первый мудрец вычеркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычеркивает 256 из оставшихся чисел, затем снова первый вычеркивает еще 128, потом второй — еще 64 числа и т. д. Своим последним пятым ходом второй вычеркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как надо играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

XXXII Московская математическая олимпиада

М62. Докажите, что для любого нечетного числа a найдется такое натуральное b, что 2^b-1 делится на a.

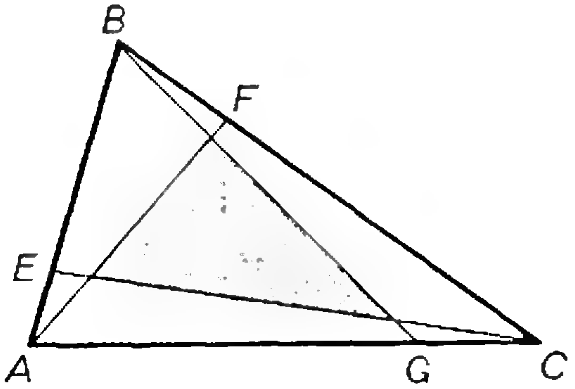


Рис. 2.

М63. Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? (Например, такое расположение плиток, как на рисунке 1, не годится, так как здесь есть «шов» AB.)

А. А. Кириллов

М64. На плоскости даны прямая l и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM, наименьшее.

Г. А. Палатник

М65. а) Пусть E, F, G — такие точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, для которых

$$\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{CG}{GA}=k, \quad \text{где} \quad 0<k<1.$$

Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AF, BG и CE, к площади треугольника ABC (рис. 2).

б) Разрежьте треугольник шестью прямыми на такие части, из которых можно сложить семь равных треугольников.

А. Л. Сойфер

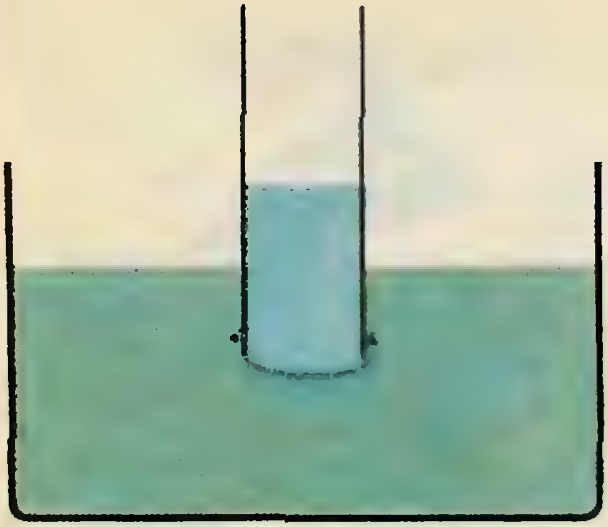


Рис. 3.

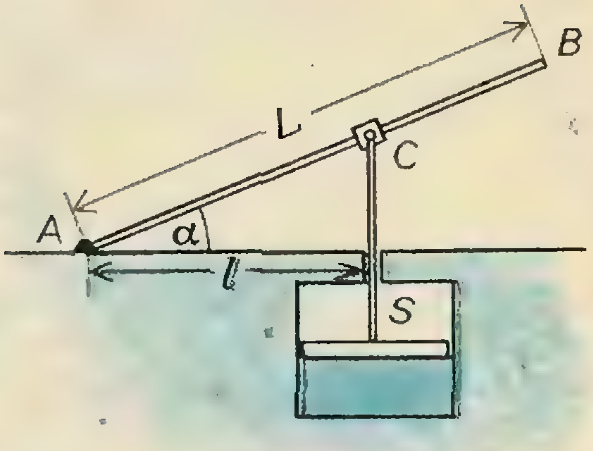


Рис. 4

Ф72. Почему в марте продолжительность дня меняется быстрее, чем в декабре?

Г. Л. Коткин

Ф73. Внутрь стеклянной трубки налит раствор сахара. Нижний конец трубки затянут пленкой, проницаемой для воды, но непроницаемой для молекул сахара. Трубку погружают в чистую воду до уровня раствора сахара и закрепляют в этом положении. Уровень жидкости в трубке при этом начинает подниматься и через достаточный промежуток времени устанавливается на некоторой высоте над уровнем воды (рис. 3).

Чем объясняется это засасывание воды внутрь цилиндра? Откуда берется энергия для поднятия жидкости?

Ф74. Два конденсатора включены последовательно. Первый имеет емкость C_1 и рассчитан на максимальное напряжение U_1, второй — емкость C_2 и рассчитан на напряжение U_2. К какому максимальному напряжению можно подключить эту батарею конденсаторов?

А. Р. Зильберман

Ф75. Поршень с площадью S шарнирно связан с шайбой C, скользящей без трения по рычагу AB. Длина рычага L. Какую наименьшую силу нужно приложить к рычагу AB для того, чтобы увеличить давление в жидкости на Δp (рис. 4)?

Б. Б. Буховцев,
физическая олимпиада МГУ, 1970 г.

Ф76. Тяжелый обруч с невесомыми спицами расположен в вертикальной плоскости и может вращаться вокруг его горизонтальной оси, проходящей через центр. В толще его обода закреплена материальная точка, имеющая такую же массу, как и сам обруч. Каким будет период колебаний обруча вокруг оси? Как он изменится, если: а) маятник перенести на Луну, б) поместить его в жидкость, в которой он будет двигаться без трения?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

М. И. Сканави

Метод подстановки заключается в переходе от искомой величины к некоторой другой величине. Он позволяет свести решаемые уравнения к более просто устроенным или к уравнениям изученных типов. Велико разнообразие случаев, когда приходится пользоваться этим методом. Охватить их какой-либо общей рекомендацией, разумеется, невозможно. Поэтому успех в выборе целесообразной подстановки существенно зависит от таких достоинств решающего, как его опыт, смекалка, интуиция... Рассматриваемые ниже примеры демонстрируют метод подстановки в действии.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

Решение. Разность дробей, расположенных в левой части данного уравнения, представляет собой дробь, у которой знаменатель есть многочлен четвертой степени относительно x. В таком случае шаблонная обработка уравнения приведет его к уравнению четвертой степени, что решающего устроить не может. После обдумывания начинаем понимать, что полезно выбрать подстановку

$$x^2+2x=z, \qquad (*)$$

поскольку она преобразует данное уравнение к значительно более простому:

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}.$$

Относительно z получаем квадратное уравнение с корнями $z_1=3$ и $z_2=-4$. Подстановка $(*)$ приводит к двум квадратным уравнениям относительно x:

$$x^2+2x=3$$

и

$$x^2+2x=-4.$$

Из них мы находим все четыре корня данного уравнения:

$$x_1=1,\ x_2=-3,\ x_3=-1+\sqrt{3}i,$$
$$x_4=-1-\sqrt{3}i$$

и непосредственной проверкой убеждаемся в пригодности каждого из них.

Пример 2. Решить уравнение $4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0$.

Решение. Предложено для решения так называемое возвратное уравнение — коэффициенты членов, равноотстоящих от концов его левой части, равны. Для возвратных уравнений разработан стандартный способ приведения их к уравнению более низкой степени. Представление об этом способе можно получить, проследив за тем, как он применяется к уравнению, которое предстоит решить. Заметив, что $x\neq0$, разделим уравнение на x^2; получим

$$4x^2+12x-47+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=0.$$

Теперь следующим образом сгруппируем члены:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0.$$

При такой записи уравнения уже

нетрудно сообразить, что оказывается эффективной подстановка

$$x+\frac{1}{x}=u.$$

В самом деле, находим, что тогда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$$

и решаемое уравнение преобразуется к уравнению

$$4u^2+12u-55=0,$$

квадратному относительно новой величины u. Решив его, найдем, что $u_1=\frac{5}{2}$ и $u_2=-\frac{11}{2}$. Для отыскания x получаем два уравнения

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}.$$

Из них находим, что

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4},$$

$$x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}.$$

Расширяя границы нашей беседы, сообщим читателю, что если приходится решать возвратное уравнение нечетной степени, то какова бы ни была эта степень, один корень такого уравнения пишется сразу — он равен (—1). Проверить это можно на примере возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Если $x=-1$, то

$$-a+b-c+c-b+a=0.$$

После деления на $(x+1)$ это уравнение сводится к возвратному уравнению четвертой степени, которое можно в общем виде решить при помощи способа, показанного при решении примера 2.

Пример 3. Решить уравнение $10x^3-3x^2-2x+1=0$.

Решение. Читателю должно быть известно, что целые корни алгебраического уравнения следует искать среди делителей свободного члена. Но здесь он равен единице, а 1 или —1 как легко проверить, корнями данного уравнения не являются. Итак, целых корней данное уравнение не имеет. Посоветуем читателю для всех уравнений, у которых нет целых корней, попробовать подстановку

$$x=\frac{1}{y}.$$

В нашем случае эта подстановка приводит к уравнению

$$\frac{10}{y^3}-\frac{3}{y^2}-\frac{2}{y}+1=0,$$

$$y^3-2y^2-3y+10=0.$$

Испытав делители свободного члена этого уравнения, с радостью обнаруживаем, что делитель (—2) служит его корнем. В таком случае, понизив при помощи этого корня степень уравнения, находим остальные два корня $y_2=2+i$ и $y_3=2-i$. Следовательно,

$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i,$$

$$x_3=\frac{1}{2-i}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$$

Решение. Если пытаться освободить уравнение от радикалов возведением его в квадрат, то страшно подумать о том, какая получится степень уравнения после того, как все радикалы исчезнут! Ясно, что этот прием ничего хорошего нам не сулит. Но и тут после обдумывания можно заключить, что подстановка

$$x^2+x+1=t$$

приведет нас к более простому уравнению относительно t, а именно к такому:

$$\sqrt{t+3}+\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}.$$

Это иррациональное уравнение посоветуем решать так (прием, который мы сейчас используем, хорош и для многих других иррациональных уравнений, содержащих радикалы второй степени!): составим разность подкоренных выражений радикалов, расположенных слева, и получим, что

$$(t+3)-t=3.$$

Теперь эту разность разложим на множители (при помощи формулы для разности квадратов) и найдем, что

$$\left(\sqrt{t+3}+\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+3}-\sqrt{t}\right)=3.$$

Отсюда делением на первоначальное уравнение (относительно t) получаем, что

$$\sqrt{t+3}-\sqrt{t}=\frac{3}{\sqrt{2t+7}}.$$

Вычитанием из первоначального уравнения того, что мы сейчас получили, обнаруживаем, что

$$2\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}-\frac{3}{\sqrt{2t+7}},$$

$$2\sqrt{t}=\frac{2t+4}{\sqrt{2t+7}},\quad \sqrt{t}=\frac{t+2}{\sqrt{2t+7}}.$$

Процедура, которую мы сейчас провели, позволяет освободиться от радикалов посредством только одного возведения частей уравнения в квадрат. Проделаем это:

$$t=\frac{t^2+4t+4}{2t+7},\quad t^2+3t-4=0.$$

Отсюда $t_1=1$, $t_2=-4$. Далее заметим, что нас интересуют только положительные значения t, поскольку

$$t=x^2+x+1>0$$

для всех значений x. Отбрасываем поэтому непригодный корень t_2 и получаем для отыскания x одно квадратное уравнение

$$x^2+x+1=1,\qquad x^2+x=0$$

с корнями $x_1=-1$ и $x_2=0$. Как нетрудно проверить, оба они являются корнями данного иррационального уравнения.

Пример 5. Решить систему уравнений

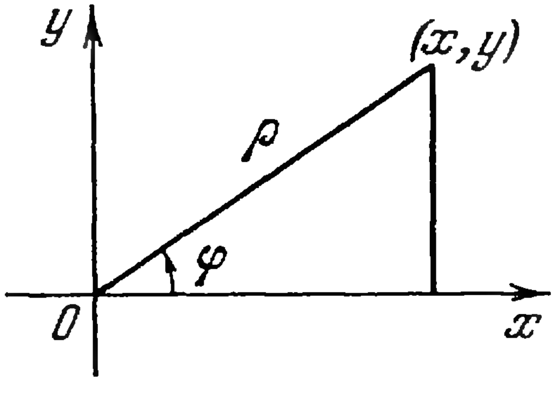
$$\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}+xy=40,\\[2mm] \dfrac{y^3}{x}+xy=10.\end{cases}$$

(Ограничиться отысканием действительных решений).

Решение. Метод подстановки при решении систем уравнений учащимися практикуется значительно реже. Вместе с тем и в этих случаях он сплошь и рядом оказывается весьма эффективным. Прежде, чем приступить к решению предложенной системы, я позволю себе высказать некоторые общие соображения по поводу метода подстановки при решении систем двух уравнений с двумя искомыми величинами. Если эти последние обозначены буквами x и y, то часто бывает полезным перейти к новым величинам ρ и φ в соответствии со следующими равенствами:

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\varphi.\end{aligned}\qquad (!)$$

Читатель, достаточно хорошо знакомый с методом координат на плоскости, поймет, что если x и y служат декартовыми координатами некоторой точки, то ρ и φ являются так называемыми полярными координатами той же точки. Геометрический смысл полярных координат и их связь с декартовыми станет ясным из рисунка, который мы всем рекомендуем сейчас внимательно рассмотреть:



Замечаем, что начало координат O имеет $\rho=0$, а угол φ для него определенного значения не имеет. Все остальные точки плоскости будут снабжены единственной парой полярных координат (ρ, φ), если потребовать, чтобы было

$$0 \leqslant \rho < +\infty,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Используем равенства (!) для решения данной системы уравнений, для чего вместо x и y в оба уравнения системы подставим их выражения через ρ и φ; получим, что

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^3 \cos^3 \varphi}{\rho \sin \varphi} + \rho \cos \varphi \, \rho \sin \varphi = 40, \\ \dfrac{\rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho \cos \varphi} + \rho \cos \varphi \, \rho \sin \varphi = 10 \end{cases}$$

или после обработки, что

$$\begin{cases} \rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = 40, \\ \rho^2 \operatorname{tg} \varphi = 10. \end{cases}$$

Делением первого уравнения на второе найдем, что

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = 4.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \varphi = 2$ или $\operatorname{ctg} \varphi = -2$. Второе (отрицательное) значение $\operatorname{ctg} \varphi$ немедленно отбрасываем, так как у нас $\operatorname{ctg} \varphi$ и ρ^2 имеют одинаковые знаки, а ρ^2 не может быть отрицательным. Теперь по известному котангенсу надо найти синус и косинус угла φ. Сделаем это без слов:

$$\operatorname{cosec}^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 5,$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = \sqrt{5},$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = -\sqrt{5},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Далее найдем ρ из того, что

$$\rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = \rho^2 \cdot 2 = 40, \quad \rho^2 = 20.$$

Получаем, что $\rho = 2\sqrt{5}$. При помощи равенств (!) по известным ρ и φ в качестве решений данной системы уравнений найдем следующие две пары чисел:

$$x_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4,$$
$$y_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2;$$
$$x_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -4,$$
$$y_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2.$$

Неверно считать, что данную систему можно решить только при помощи перехода к полярным координатам (ее можно решить, например, еще и так: перенести xy из левых частей уравнений в правые, затем результаты перемножить и получить квадратное уравнение относительно xy; дальнейшее очевидно). Между тем этот прием следует взять на вооружение. Он позволяет в известном смысле регламентировать наши преобразования и дает возможность пользоваться всем аппаратом тригонометрии. В каких случаях выгодно пользоваться этим приемом, а в каких нет? Ответить на этот вопрос поможет ваш личный опыт, обогатить который можно собственным трудом!

Пока до вступительных экзаменов есть время — действуйте!

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГПИ им. В. И. ЛЕНИНА В 1970 году

Е. А. Щегольков

Письменный экзамен по математике на нашем факультете в 1969 году (отчет о нем можно прочитать в «Кванте» № 3 за 1970 г.) был несколько необычным. Необычность состояла в некотором подражании конкурсным экзаменам на мехмате МГУ. В результате из 475 поступавших 224, то есть около половины, написали работу на двойку и выбыли из дальнейшей «борьбы». Такой способ отбора абитуриентов представляется не вполне подходящим для педагогического института, слишком много кандидатов оказалось вне личного знакомства с экзаменаторами.

В 1970 году приемная комиссия математического факультета решила пойти по другому пути. В письменную работу были включены четыре задания хорошо знакомые школьникам.

1. Стереометрическая задача с приложением тригонометрии.
2. Задача на составление квадратного уравнения с физическим или другим содержанием.
3. Алгебраическое уравнение или неравенство.
4. Тригонометрическое уравнение.

Все задания не требовали каких-либо особых знаний или натренированности. Но в то же время они предполагали основательные знания школьной математики и известные способности у абитуриентов. На выполнение письменной работы отводилось 4 часа.

При оценке письменных работ «пять» ставилось, лишь если все задачи были решены; «четыре» — если все задачи были решены, но с несущественными недочетами: «Два» ставилось, например, если первые две задачи не были решены из-за грубых ошибок. При этом оценка «три» приобрела больший удельный вес и не выбивала абитуриента из участия в конкурсе.

В 1970 году на математический факультет поступало 508 человек, а мест было 175, конкурс — около трех человек на место.

Из 508 абитуриентов, писавших письменную работу, 120 написали ее на «четыре» и «пять», 233 на «три» и 155 на «два».

В качестве примера ниже мы разберем вариант письменной работы и укажем на типичные ошибки, допущенные абитуриентами при его решении.

Вариант

1. Длина образующей конуса равна l, угол образующей с плоскостью основания равен α. Найти объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β.

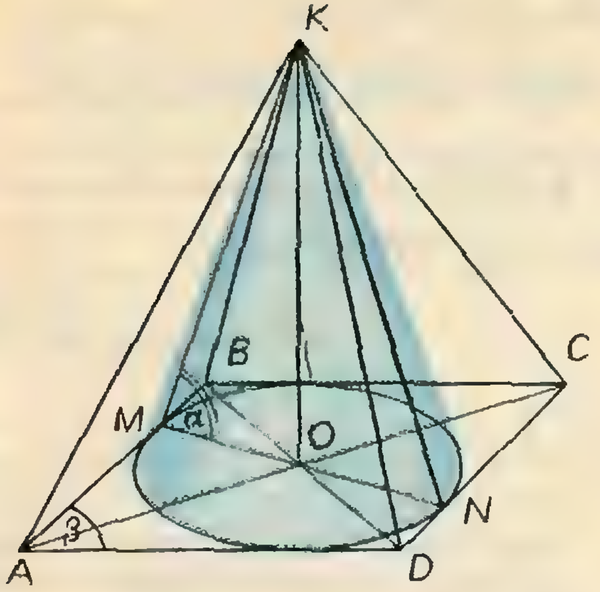
2. За n часов трактор вспахивает на p гектаров больше лошади. Сколько гектаров вспашет за n часов лошадь и сколько гектаров вспашет за n часов трактор, если трактор вспахивает один гектар на t часов скорее лошади.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt{x+4}<1.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$$



Решения

1. Построим конус (см. рисунок), O — центр основания, OK — высота. Опишем около конуса пирамиду, основанием которой является ромб $ABCD$, $\angle BAD=\beta$.

Рассмотрим грань AKB. Пусть $KM=l$ — образующая конуса, общая с этой гранью. Тогда сторона AB касается окружности основания в точке M, поэтому $MO\perp AB$. Так как MO есть проекция KM на плоскость основания, то $\angle KMO=\alpha$.

Найдем объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}hS, \qquad (1)$$

где h — высота пирамиды (OK); S — площадь ромба $ABCD$. Высоту h найдем из прямоугольного треугольника KOM: $h=OK=KM\sin\alpha$, то есть

$$h=l\sin\alpha. \qquad (2)$$

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

Центр окружности основания конуса лежит на пересечении диагоналей описанного ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят друг друга и углы ромба пополам, поэтому треугольники AOM и BOM прямоугольные ($MO\perp AB$). Кроме того, $\angle MOB=\angle MAO=\frac{\beta}{2}$. Эти углы равны, так как их соответственные стороны взаимно перпендикулярны. Очевидно, $AC=2AO$, $BD=2BO$.

Из треугольника AOM находим $MO=AO\sin\frac{\beta}{2}$; из треугольника BOM находим $MO=BO\cos\frac{\beta}{2}$; из треугольника KOM находим

$$MO=l\cos\alpha.$$

Из этих соотношений получаем

$$AC=\frac{2l\cos\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$BD=\frac{2l\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

откуда

$$S=\frac{4l^2\cos^2\alpha}{\sin\beta}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$V=\frac{2l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3\sin\beta}.$$

Некоторые из поступавших площадь ромба находили как площадь параллелограмма, по высоте MN и основанию AB. Так тоже можно. Тогда $S=AB\cdot MN$, $MN=2MO=2l\cos\alpha$. Рассматривая треугольник AOB, получаем $AO=AB\cos\frac{\beta}{2}$, следовательно, $AB\cos\frac{\beta}{2}=\frac{MO}{\sin\frac{\beta}{2}}$, откуда

$$AB=\frac{2l\cos\alpha}{\sin\beta} \text{ и } S=\frac{4l^2\cos^2\alpha}{\sin\beta}.$$

Но здесь требуются дополнительные рассуждения и обоснования, главным образом по поводу высоты MN.

Заметим, что часть абитуриентов, используя второй способ вычисления площади ромба, ошибочно полагала, что высота MN ромба параллельна сторонам BC и AD; это является грубой ошибкой.

Как вы уже заметили, при решении этой задачи трижды пришлось решать прямоугольные треугольники. Поступающие и здесь допускали ошибки. Твердое умение решать прямоугольные треугольники является непременным условием успешного решения большинства стереометрических задач.

2. Пусть трактор вспахивает за n часов x (*га*), следовательно, 1 (*га*) за $\frac{n}{x}$ часов.

Лошадь вспахивает за n часов $(x-p)$ (*га*), а 1 (*га*) за $\frac{n}{x-p}$ часов.

По условию задачи $\frac{n}{x}$ меньше $\frac{n}{x-p}$ на t часов, то есть $\frac{n}{x}+t=\frac{n}{x-p}$ $(x\neq 0,\ x\neq p)$. После преобразований получаем уравнение $tx^2-ptx-np=0$. Решая его, находим

$$x_{1,2}=\frac{pt\pm\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}.$$

Какой из этих двух корней удовлетворяет условиям задачи? По условию $n>0, t>0, p>0$, поэтому $\sqrt{(pt)^2+4ptn}$ имеет действительное значение.
$(pt)^2+4ptn>(pt)^2$ и, следовательно, $\sqrt{(pt)^2+4ptn}>pt$.
Таким образом, корень

$$x_1=\frac{pt+\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}$$

дает ответ на вопрос задачи, именно столько гектаров вспашет трактор за n часов, а лошадь вспашет за n часов

$$x-p=\frac{-pt+\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}.$$

Второй корень уравнения отрицателен и отпадает по смыслу задачи.

При составлении исходного уравнения из величин $\frac{n}{x}$, $\frac{n}{x-p}$, t некоторые из поступавших почему-то вычитали из меньшего большее и получали уравнение $\frac{n}{x-p}+t=\frac{n}{x}$. Это результат невнимательности.

При решении задач с конкретным физическим или другим содержанием следует быть особенно внимательным и все время проверять свои рассуждения. Формальные выкладки должны соответствовать действительному положению вещей. Кроме того, следует помнить, что целью решения такого рода задач является не решение составленного уравнения, а получение ответа на поставленный в задаче вопрос.

3. Найдем область допустимых значений для x (ОДЗ):

$$\begin{cases} 1+2x\geqslant 0 \\ x+4\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geqslant -\frac{1}{2} \\ x\geqslant -4. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ определяется условием

$$x\geqslant -\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Преобразуем исходное неравенство так:

$$\sqrt{1+2x}<1+\sqrt{x+4}.$$

В отмеченной ОДЗ обе части последнего неравенства неотрицательны; возведя их в квадрат получим

$$\sqrt{x+4}>\frac{x}{2}-2. \qquad (2)$$

Левая часть неравенства (2) положительна, а правая часть может быть и положительной, и отрицательной, и нулем. Поэтому рассмотрим два случая:

1) $\frac{x}{2}-2<0$, следовательно,

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<4.$$

При таких значениях x неравенство (2) заведомо выполнено, так как правая часть отрицательна, а левая положительна.

2) $\frac{x}{2}-2\geqslant 0$ и по условию

$$\sqrt{x+4}>\frac{x}{2}-2.$$

Решая первое из этих неравенств, получим $x\geqslant 4$. Для решения второго неравенства, возведем обе его части в квадрат (теперь это можно сделать, так как обе части неотрицательны). Получим

$$x^2-12x<0. \qquad (3)$$

Решая (3), находим $0<x<12$. Окончательно во втором случае получаем $4\leqslant x<12$. Объединяя оба случая, запишем решения исходного неравенства:

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<12.$$

Типичной ошибкой при решении подобных неравенств является бесконтрольное возведение в квадрат обеих частей неравенства. Известно, что полученное при этом неравенство может оказаться не равносильным первоначальному. Поэтому при возведении в квадрат следует учитывать знаки обеих частей неравенства и при необходимости рассматривать различные случаи.

4. Запишем уравнение следующим образом:

$$\frac{3\left(\cos 2x+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0. \qquad (1)$$

Теперь нам легко определить ОДЗ. В самом деле, при $\sin 2x=0$ теряет смысл $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$, а при $\cos 2x=0$ знаменатель дроби равен нулю и вся дробь теряет смысл. Следовательно, ОДЗ определяется условиями $\sin 2x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$. После сокращения на $\cos 2x$ и упрощения уравнение (1) примет вид

$$3(\sin 2x+1)-2(\sin 2x+1)(1-\sin 2x)=0 \qquad (2)$$

(в знаменателе был множитель $1-\sin 2x$, который не обращается в нуль в ОДЗ, поскольку $\cos 2x\neq 0$). После вынесения за скобку общего множителя уравнение (2) распадается на два:

1) $1+2\sin 2x=0$;
2) $1+\sin 2x=0$.

Решая первое уравнение, находим

$$\sin 2x=-\frac{1}{2};\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Все эти значения содержатся в ОДЗ.

Решая второе уравнение, получаем $\sin 2x=-1$, откуда $\cos 2x=0$, что исключается ОДЗ.

Итак, решениями исходного уравнения являются лишь значения

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Многие поступавшие при решении данного уравнения не учитывали ОДЗ и причисляли к решениям значения $\cos 2x=0$, то есть $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Некоторые не смогли записать общий вид решения.

Из 68 работ этого варианта 3 работы оценены на «пять», 8 работ — на «четыре», 39 работ — на «три» и 18 работ — на «два».

Отметим ошибки, которые допускали абитуриенты при решении задач в других вариантах, а также общие недостатки при выполнении письменной работы.

При решении стереометрической задачи во многих случаях чертежи были неудачными (неясными, грязными) или просто неверными. Происходило это оттого, что решающий задачу неправильно представлял себе или неправильно изображал положение данной фигуры, тела, сечения и других элементов, особенно когда речь шла об описанных или вписанных телах.

Чертеж и последующие построения во многих случаях не сопровождались необходимыми пояснениями, не давалось обоснования выводов, получаемых в результате построений.

Отсутствие пояснений к построениям на чертеже и обоснований выводов влекло за собой снижение оценки за решение стереометрической задачи.

В задаче с содержанием на составление уравнения некоторые не сумели по условиям задачи составить уравнение.

Другие, правильно составив уравнение и решив его, не исследовали полученные корни с точки зрения пригодности их в качестве решения задачи.

Третьи, хотя и исследовали полученные корни уравнения, но не смогли выбрать нужное решение.

При решении алгебраических и тригонометрических уравнений часто сокращали на выражение, содержащее неизвестные. В результате теряли корни уравнения. В других случаях не обращали внимания на ОДЗ и из-за этого получали посторонние корни.

Несколько слов об устном экзамене. Экзаменационные билеты содержали два вопроса. Первый по геометрии, второй по алгебре или тригонометрии. Формулировки экзаменационных вопросов почти дословно повторяли формулировки программы вступительных экзаменов в вузы 1970 года.

При ответах на вопросы билета требовалось дать аккуратное доказательство теоремы или вывод формулы, точно формулировать необходимые определения.

Кроме вопросов экзаменационного билета, абитуриенту задавались дополнительные задания или задавались примерно такие вопросы.

1. Построить график функции:

а) $y = \lg_{\frac{1}{2}} x$;

б) $y = -x^2 - x$;

в) $y = \frac{2}{x} - 3$;

г) $y = \sin 2x$;

д) $y = \cos\frac{x}{2}$.

2. Решить уравнение:

а) $2^x = -1$;

б) $|2x - 3| = 1$;

в) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$;

г) $\arcsin x = x$.

3. Решить неравенство:

а) $\lg_{\frac{1}{2}} x > 0$; б) $x^2 > 5$;

в) $\frac{6}{x-2} < 0$;

г) $|x - 2| \geqslant 1$.

4. Какой знак имеют числа $\sin 3{,}14$; $\cos\frac{9\pi}{10}$; $\sin 2$?

5. Найти $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

6. Найти период функции $y = \sin 3x$.

7. Построить окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

8. Привести пример двух несоизмеримых отрезков.

9. Могут ли стороны треугольника относиться как 1:2:3?

10. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

11. При каком условии в прямой круговой цилиндр можно вписать шар?

12. Найти угол между диагональю куба и плоскостью его основания.

Наиболее слабые знания абитуриенты обнаружили по следующим вопросам школьной программы: обобщение понятия о показателе степени, комплексные числа, числовые последовательности, бесконечная геометрическая прогрессия, метод математической индукции, объемы и поверхности тел. Не все абитуриенты давали четкие определения тригонометрических функций, длины окружности, площади круга, объема и поверхности цилиндра и конуса.

Недостаточно хорошо владеют понятиями: иррациональное и действительное число, абсолютная величина числа, соизмеримые и несоизмеримые отрезки, радианная мера углов.

В геометрии неуверенно решают задачи на построение. Многие абитуриенты имеют недостаточно развитое пространственное воображение.

Поступавшие неуверенно решали задачи на построение как на плоскости, так и в пространстве. Особенно заметно у подавляющей части абитуриентов неглубокое и неполное знакомство с понятием функции. Многие с трудом приводили примеры функциональных зависимостей, мало кто обнаружил хорошее понимание и использование свойств монотонности и периодичности функций.

И наконец, о понятии предела. Это важнейшее понятие усвоено в большинстве случаев поверхностно. А о применении предела и говорить не приходится. Таким образом, разделы школьного курса математики, связанные с понятием предела, усвоены недостаточно.

Вместе с тем следует отметить и положительные стороны в знаниях школьников по математике.

Лучшим стало владение формально-вычислительным аппаратом в алгебре и тригонометрии, увереннее строили графики различных функций, лучше усвоили логарифмы, более свободно (по сравнению с прошлыми годами) обращались с тригонометрическими уравнениями.

Следует отметить, что число отлично выполненных письменных работ и отличных ответов на устном экзамене по математике возросло по сравнению с предшествующими годами. Радует также и то, что среди отличников много молодежи из сельской местности.

В заключение предлагаем читателям для самостоятельного упражнения один подлинный вариант, и один сборный, составленный из задач различных вариантов, предлагавшихся на экзаменах.

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с периметром $2p$ и углом α при основании. Определить объем пирамиды, если боковые грани ее наклонены к плоскости основания под углом β.

2. По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся два автомобиля. Один из них делает полный круг на t секунд быстрее второго. Время между двумя последовательными встречами автомобилей равно a. Определить скорости обоих автомобилей.

3. При каких действительных неотрицательных значениях a уравнение

$$a+x-x^2=\sqrt{a+x}+x$$

имеет действительные неотрицательные корни? Найти эти корни.

4. Решить уравнение

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

Вариант 2 (сборный)

1. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α. Найти объем призмы.

2. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m кГ и n кГ, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

3. Решить неравенство

$$\log_{0,5}x+\sqrt{1-4(\log_{0,5}x)^2}<1.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{2\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2x}\right).$$

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В НГУ

Г. В. Меледин

Три варианта задач, которые мы печатаем в этом номере журнала, предлагались в этом году тем, кто поступал на физический факультет Новосибирского государственного университета. После условия каждой задачи стоят четыре числа. Первое из них — процент решивших эту задачу из числа поступивших, второе — из числа непоступивших, третье — из общего числа поступавших. В скобках указано количество баллов, которым оценивалось правильное решение задачи.

Для того чтобы получить удовлетворительную оценку, необходимо было набрать 5—9 баллов. Отличная оценка ставилась, если абитуриент набирал не менее 17 баллов.

Вариант 1

1. Спортивный молот — это ядро на тросике, которое бросают, раскрутив вокруг себя с достаточной скоростью. Найти максимальное расстояние, которое может пролететь молот, если удерживающее усилие спортсмена перед броском ядра в n раз превышало вес молота. Расстояние от оси вращения до ядра вдоль тросика равно l. Сопротивлением воздуха и ростом спортсмена пренебречь. 90, 53, 66 (5).

2. Проволочная прямоугольная рамка с током со сторонами длиною a и b закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны a (рис. 1). Вес стороны a равен P_1, а стороны b — P_2. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B. Найти величину тока в рамке, если угол наклона рамки к горизонту равен α.

3. Космический корабль движется к Луне под влиянием ее притяжения. На большом расстоянии скорость корабля относительно Луны была нулевой. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны в $n = 6$ раз меньше, чем на Земле $\left(g_л = \frac{g}{6}\right)$. Радиус Луны R около 1700 *км*. На какой высоте h должен быть включен тормозной двигатель для осуществления мягкой посадки, если считать, что двигатель создает пятикратную перегрузку ($5g$)? Изменением массы корабля при торможении за счет сгорания топлива и зависимостью силы притяжения Луны от расстояния на этапе торможения можно пренебречь (h много меньше R). 83, 14, 39 (7).

4. На гладкий клин массы M, который может скользить лишь горизонтально, падает

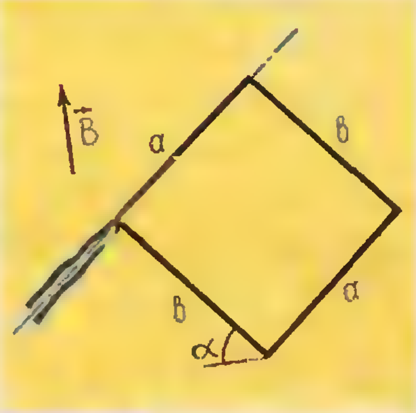


Рис. 1.

Рис. 2.

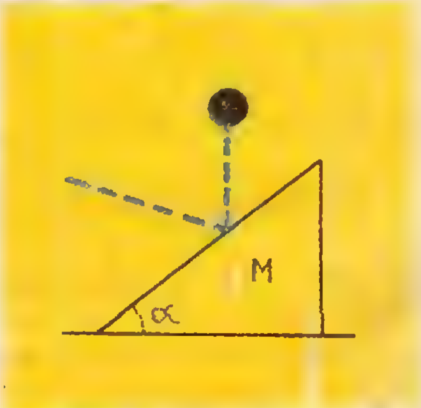


Рис. 3.

шарик массы m (рис. 3). Шарик упруго ударяется о грань, образующую угол α с горизонтом. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна v и направлена вертикально вниз. Найти скорость клина после удара. Трением можно пренебречь. 7, 2, 4 (7).

Решения

1. Дальность полета ядра максимальна, если угол его вылета равен 45°. Примем, что $n \gg 1$. Тогда можно считать, что при раскручивании ядра центростремительное ускорение сообщает ему сила натяжения нити. В момент броска $\frac{mv^2}{l} = nmg$. Это означает, что скорость, которую сообщает ядру спортсмен при броске равна $v = \sqrt{lng}$.

Теперь нетрудно найти дальность полета ядра. Запишем кинематические уравнения его движения:

по вертикали $y = v_{\text{верт}} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, по горизонтали $x = v_{\text{гор}} \cdot t$.

В момент падения на землю $y=0$. Подставляя это значение в первое уравнение, найдем время полета ядра $t = \frac{2v_{\text{верт}}}{g} = \frac{v\sqrt{2}}{g}$. (корень $t=0$ соответствует моменту броска).

За это время ядро пролетит по горизонтали расстояние

$$x = v_{\text{гор}} \frac{v\sqrt{2}}{g} = \frac{v^2}{g} = nl.$$

2. Запишем условие равенства нулю суммы моментов сил, действующих на рамку, учитывая, что моменты сил, действующих в магнитном поле на боковые стороны рамки уравновешивают друг друга (так как токи, идущие по ним, противоположны). $P_1 b \cos\alpha + 2P_2 \frac{b}{2} \cos\alpha - BIa \sin\alpha = 0$.

Отсюда $I = (P_1 + P_2) \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{a}$.

3. Запишем закон сохранения энергии для этапа подлета корабля к Луне. Из аналогии гравитационного поля с электростатическим можно заключить, что если потенциальную энергию тела считать равной нулю бесконечно далеко от Луны, то на расстоянии H от ее центра потенциальная энергия равна $-\gamma \frac{Mm}{H}$, где γ — гравитационная постоянная, M — масса Луны и m — масса тела. Если потенциальную энергию отсчитывать от поверхности Луны, то $П = \gamma\frac{Mm}{R} - \gamma\frac{Mm}{H}$.

Далеко от Луны корабль имел только потенциальную энергию $G\frac{Mm}{R}$, а на высоте h от поверхности Луны, он имел кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальную энергию $П = \gamma\frac{Mm}{R} - \gamma\frac{Mm}{R+h}$.

Поэтому $\gamma\frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2} + \gamma\frac{Mm}{R} - \gamma\frac{Mm}{R+h}$.

Учитывая, что на поверхности Луны $\gamma\frac{Mm}{R^2} = mg_{\text{л}}$ и потому $\gamma M = R^2 g_{\text{л}} = \frac{1}{6} R^2 g$, мы можем записать, что

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{6} g \frac{R^2}{R+h}. \qquad (1)$$

Изменение энергии корабля при торможении равно работе двигателя. Так как при работе двигателя создается пятикратная перегрузка, то его сила тяги должна быть равна 5 mg. Поэтому

$$5mgh = \frac{mv^2}{2} + mg_л h = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{6} mgh$$

(так как $h \ll R$, то $П = \gamma \frac{Mm}{R} - \gamma \frac{Mm}{R+h} =$

$$= \gamma \frac{Mmh}{(R+h)R} \approx \gamma \frac{Mm}{R^2} h = mg_л h).$$

Отсюда $\frac{v^2}{2} = \frac{29}{6} gh.$

Подставляя это выражение для $\frac{v^2}{2}$ в уравнение (1), найдем $h \approx \frac{R}{29} \approx 59$ *км*.

4. Используя закон сохранения энергии и условие сохранения составляющих импульса системы в горизонтальном направлении и вдоль клина, можно записать:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad mv_x = Mn,$$

$$v_0 \sin \alpha = v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha.$$

Отсюда $u = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2 \alpha}$.

Вариант 2

1. Самолет летит по прямой из города M в город H и обратно. Найти отношение полных времен полета в случаях, когда от M к H дует ветер, скорость которого равна u, и когда ветер с той же скоростью дует перпендикулярно линии $M—H$.

Скорость самолета относительно воздуха в том и другом случае равна c. 89, 74, 90 (5).

2. На верхнюю точку закрепленного шара поставлен ванька-встанька (рис. 4). Нижняя поверхность игрушки — полушар такого же радиуса, что и у закрепленного шара; центр тяжести игрушки — точка A — расположен на половине радиуса полушара. Упадет ли ванька-встанька с шара? Проскальзывания нет. 83, 22, 44 (6).

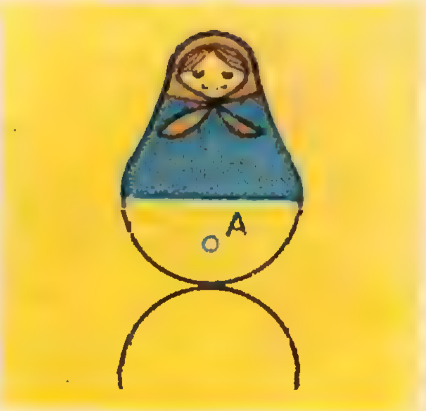


Рис. 4.

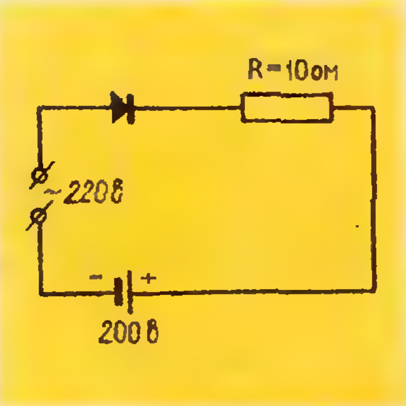


Рис. 5.

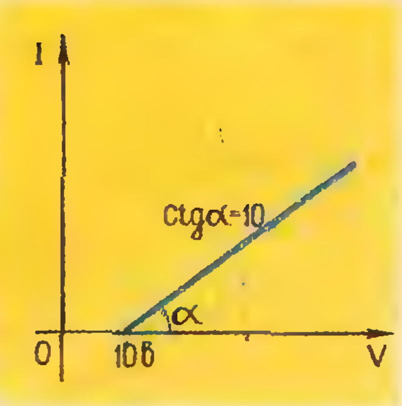


Рис. 6.

3. *Схема, изображенная на рисунке* 5, подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой 220 *в* и периодом $^1/_{50}$ *с*. Найти максимальное значение напряжения на сопротивлении R и долю периода, в течении которого ток в цепи отличен от нуля. Нарисовать график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени.

Считать, что зависимость тока через диод от приложенного к нему напряжения имеет вид, показанный на рисунке 6. 83, 14, 39 (7).

4. При фотографировании очень удаленного объекта перед объективом фотоаппарата на расстоянии, равном трем фокусным расстояниям, поместили тонкую *линейку ширины* D. Плоскость линейки перпендикулярна оптической оси объектива. Объектив представляет собой тонкую линзу диаметром d ($d<D$). Определить ширину тени на пленке (ширину области, в которой линейкой будут затенены все лучи, идущие от фотографируемого объекта). 29, 5, 14, (8).

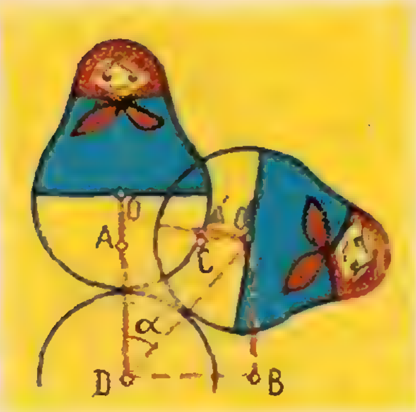


Рис. 7.

Решения

1. Отношение времен равно

$$\frac{\frac{L}{c+u}+\frac{L}{c-u}}{\frac{L}{\sqrt{c^2-u^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-u^2}}}=\frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

(L — расстояние между городами). Если ветер дует перпендикулярно линии $M—H$, то скорость c самолета относительно воздуха должна быть направлена так, чтобы ее сумма со скоростью ветра и была направлена по линии $M—H$.

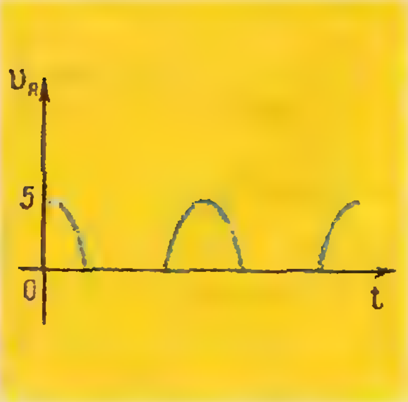


Рис. 8.

2. Отклоним игрушку на небольшой угол α и посмотрим, что произойдет с центром тяжести игрушки. Если опустится, то положение равновесия неустойчиво и игрушка упадет; если поднимется, то положение равновесия устойчиво.

На нашем чертеже (рис. 7) линии $O'B$ и $A'C$ вертикальны, а отрезок $O'C$ горизонтален. $O'B = 2R\cos\alpha$, $\angle A'O'D = \alpha$, а $\angle DO'C = 90^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle A'O'C = \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ$ и

$$A'C = A'O' \sin(2\alpha - 90^\circ) = -\frac{1}{2} R\cos 2\alpha.$$

Найдем смещение центра тяжести.

$$\Delta h = AD - O'B + A'C =$$
$$= \frac{3}{2}R - 2R\cos\alpha + \frac{R}{2}\cos 2\alpha =$$
$$= R(1-\cos\alpha)^2 > 0.$$

Таким образом, мы видим, что центр тяжести игрушки опустился. Ванька-встанька упадет с полушара.

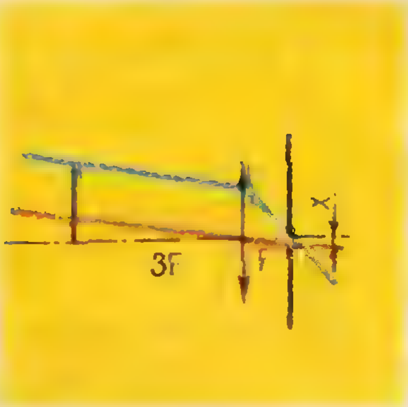


Рис. 9.

3. График зависимости тока через диод от напряжения расшифровывается просто: через диод не идет ток, пока приложенное к нему напряжение не достигнет +10 *в*. При дальнейшем увеличении напряжения диод эквивалентен сопротивлению в 10 *ом*.

Пусть переменное напряжение меняется со временем по закону $u(t) = 220\cos\frac{2\pi t}{T}$. Если учесть э.д.с. батареи, то ясно, что диод открывается, когда $u(t_1) = 210$ *в* и закрывается, когда напряжение снова упадет до $u(t_2) = 210$ *в*. То есть он открыт, пока $\cos\frac{2\pi t}{T} \geqslant \frac{210}{220}$. Поэтому доля периода в течении которой диод открыт, равна $\frac{t}{T} = \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{21}{22}$.

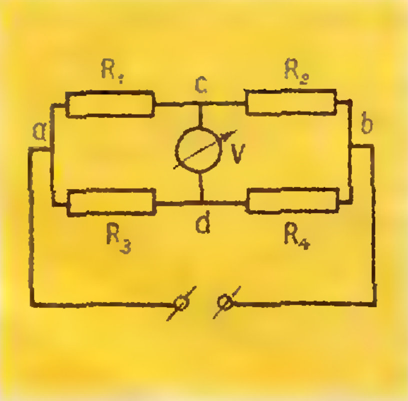


Рис. 10.

Максимальное напряжение на сопротивлении R равно 5 *в* (10 *в* делится поровну между диодом и сопротивлением R). Качественный график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени показан на рисунке 8.

4. Построим изображение тени, учитывая, что пленка в фотоаппарате расположена в фокальной плоскости (рис. 9). Так как фотографируется удаленный объект, то объектив собирает в фокусе параллельный пучок лучей.

Из построения видно, что $x = \frac{D-d}{2}$.

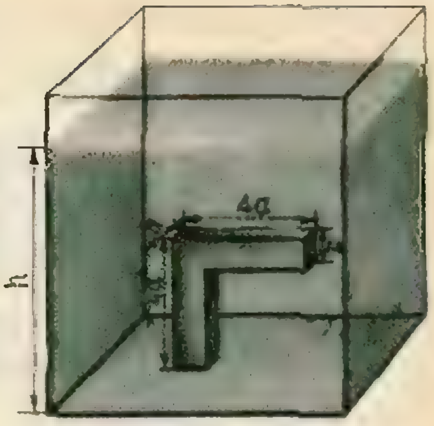


Рис. 11.

Попробуйте теперь самостоятельно решить задачи варианта 3.

Вариант 3

1. К контуру из сопротивлений R_1; R_2, R_3 и R_4 (рис. 10) в точках a и b подключен источник постоянного напряжения U, а в точках c и d подсоединен высокоомный вольтметр. Какую разность потенциалов покажет вольтметр? 94, 55, 70 (3).

2. *На дне сосуда с жидкостью,* удельный вес которой d, стоит Г-образное тело с размерами, указанными на рисунке 11. Жидкость под нижнюю грань тела не подтекает. Удельный вес тела $d_0 = 2d$. При какой высоте h уровня жидкости в сосуде равновесие тела нарушится? 78, 22, 40 (6).

3. Когда конденсатор веса P подвесили на пружине, ее длина увеличилась на l. На сколько еще изменится длина пружины, если в этот конденсатор параллельно пластинам входит пучок *электронов? Ток пучка* I, скорость частиц v. Пройдя конденсатор, пучок меняет направление на угол α.

Заряд электрона e, масса m. 87, 29, 51 (7).

4. На крыше с углом наклона φ лежит свинцовый лист веса P. Коэффициент трения свинца о крышу $k > \operatorname{tg} \varphi$. Коэффициент линейного расширения свинца α. Считая, что температура в течение суток повышается, достигая наивысшего значения t_1^0 С, а затем понижается до t_2^0 С, определить положение точек, которые неподвижны соответственно при нагревании и остывании листа в течении суток, если длина листа при минимальной температуре t_1^0 С равна l. Найти, на какое расстояние сползет лист за N *суток устойчивой погоды.* 42, 4, 19 (9).

ИНФОРМАЦИЯ

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в *Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются. Занятия в школе* начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1971 года. После проверки работы (примерно в июле 1971 г.) будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 *см* с написанным на нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область:	*Вологодская*
Фамилия, имя, год рождения:	*Иванов Петр, 1956 г.*
Школа (полное название):	*Школа № 2 г. Тотьмы*
Класс:	*8 класс «Б»*
Фамилия, имя, отчество учителя математики:	*Никаноров Николай Алексеевич*
Должность родителей:	*отец — шофер,* *мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес:	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8*

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

(заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской ССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: Ленинград, П-228, *ул.* Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ЗМШ 1971 ГОДА

1. В полукруг диаметра 2 вписаны две окружности, которые касаются между собой. Каждая из них касается диаметра и дуги полукруга. Найти диаметр одной из них, если диаметр другой равен 1.

2. Найти наибольший общий делитель чисел 987654321 и 123456789.

3. Основания трапеции $ABCD$ равны: $AB=a$, $CD=b$. O — точка пересечения диагоналей. Определить отношение площади треугольника OAB к площади трапеции.

4. Известно, что $x+\frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда число $x^8+\frac{1}{x^8}$ — тоже целое.

5. О треугольнике ABC были сделаны следующие 4 утверждения:

1) Треугольник ABC прямоугольный;
2) $\angle A=30^\circ$;
3) $AB=2BC$;
4) $AC=2BC$.

Известно, что два из этих утверждений верны, а два других неверны. Найти периметр треугольника ABC, если $BC=1$.

6. Известно, что $a+в+c<0$ и что уравнение $ax^2+вx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить, какой знак имеет число c?

7. Про точки A, B и C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

8. Сколько делителей имеет число 1971^{1971}? (То есть, сколько существует различных целых положительных чисел, на которые это число делится?)

9. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

10. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, 3 ..., 9 по кругу в таком порядке, чтобы сумма *любых* двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Жители города Правдии всегда говорят правду, а жители города Лгунов всегда лгут. В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

А (обращаясь к *Б* и *В*): Я не был на матче. Скажите, кто выиграл?

Б : *Г* сказал мне, что их команда проиграла.

В: Наша команда выиграла.

Г (садясь в автобус, идущий в другой город и обращаясь к *А*): Поедем вместе. *А*, ведь мы из одного города.

А: Вы ошибаетесь, *Г*. Я живу здесь. Это *В* из вашего города.

Определить, кто из какого города, где происходил матч и какая команда выиграла.

12. По шоссе в одном направлении с постоянной скростью через равные интервалы времени без остановок идут автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 *км*, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 *км*, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 *км*. Сколько автобусов при этом его обогнали? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью).

13. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E, и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и H. Найти длину отрезка KH, если $AE=a$, $EB=в$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Вращательное движение тел».

1. В килограммах, умноженных на квадратный метр ($кг \cdot м^2$).

2. Времена скатывания цилиндров одинаковы, так как их моменты инерции равны. (Докажите!).

3. Работа силы трения $A = M \cdot \varphi$ (где $\varphi = \varphi = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ *радиан*) должна быть равна энергии колеса перед торможением

$$M\varphi = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Отсюда $M = \dfrac{I\omega_0^2}{2\varphi} = \approx 0{,}05$ *нм*.

4. Найдем вначале, какую угловую скорость будет иметь Земля через 100 *лет*.

Так как время, необходимое для одного оборота, связано с угловой скоростью формулой $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$, что $\Delta\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_2} - \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, где ω_1 — угловая скорость Земли сейчас ($\omega_1 = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ *рад/с* $= 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ *рад/с*), ω_2 — ее угловая скорость через 100 лет и $\Delta\tau = 1$ *с*.

Запишем теперь уравнение движения Земли. $M_{тр} = I\alpha$. I — момент инерции Земли. Он равен

$$\frac{2}{5} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{24}\ кг \cdot 4 \cdot 10^{13} м^2 =$$

$$= 9{,}4 \cdot 10^{37}\ кг \cdot м^2.$$

Подставляя в уравнение движение Земли вместо α его выражение через ω_1 и ω_2, получим

$$M_{тр} = I\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = 2{,}6 \cdot 10^{19}\ нм.$$

5. Работа, которую необходимо совершить за время $t = 10$ *час* $= 3{,}6 \cdot 10^4$ *с*, равна изменению кинетической энергии стабилизатора

$\Delta K = \dfrac{I\omega^2}{2}$. Поэтому

$$N = \frac{I\omega^2}{2t} = \frac{Mr^2\omega^2}{2t} = 4{,}5 \cdot 10^4\ вт.$$

6. Действующая на шар сила трения $F_{тр} = kmg$ замедляет поступательное движение его центра масс и увеличивает скорость его вращения. Поэтому

$$F_{тр} = ma \text{ и } F_{тр} \cdot r = I\alpha,$$

где a — ускорение поступательного движения шара, α — ускорение вращательного движения и $I = \dfrac{2}{5}mr^2$ — момент инерции шара.

К моменту t шар будет иметь скорость поступательного движения $v = v_0 - at = v_0 - \dfrac{F_{тр}}{m}t = v_0 - kgt$ и угловую скорость вращения

$$\omega = \alpha t = \frac{F_{тр}r}{I}t = \frac{kmgr}{\frac{2}{5}mr^2} \cdot t = \frac{5}{2}\,\frac{kgt}{r}.$$

Если в этот момент проскальзывание прекратится, то $\omega = \dfrac{v}{r}$, или

$$\frac{5}{2}\,\frac{kgt}{r} = \frac{v_0 - kgt}{r}.$$

Отсюда $t = \dfrac{2}{7}\,\dfrac{v_0}{kg}$.

В момент t скорость поступательного движения шара равна $v_0 - kg\dfrac{2v_0}{7kg} = \dfrac{5}{7}v_0$.

Путь, пройденный шаром за время t, равен $v_0t - \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{12}{49}\,\dfrac{v_0^2}{kg}$.

7. Запишем закон сохранения момента импульса

$$I\omega = mR^2\omega_1,$$

где ω — угловая скорость корабля, а ω_1 — угловая скорость космонавта и $I = \dfrac{2}{3}MR^2$ — момент инерции корабля.

Это равенство означает, что $I\varphi = mR^2\varphi_1$, где φ — угол поворота корабля и φ_1 — угол поворота космонавта относительно звезд. Так как $\varphi_1 + \varphi = \pi$, то

$$I\varphi = -mR^2\varphi + mR^2\pi.$$

Отсюда

$$\varphi = \pi\,\frac{mR^2}{\left(\frac{2}{3}M + m\right)R^2} = \frac{3}{2}\pi\,\frac{m}{M + 3m}.$$

8. Записав закон сохранения момента импульса, получим

$$(MR^2 + 2mR^2)\omega = [MR^2 + 2m(R + l)^2]\omega_1.$$

Так как $\omega_1 = \dfrac{1}{n}\omega$, то после несложных преобразований и этого уравнения найдем, что

$$l = R\left(\sqrt{n + \frac{M}{2m}(n - 1)} - 1\right).$$

К статье «Комбинаторика»

1. Число p_k может войти в делитель q с показателями $0, 1, \ldots, \alpha_k$ всего α_k+1 способами. По правилу произведения число делителей равно

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

2. В перестановках, где 4 буквы e идут подряд, их можно объединить и считать одной буквой. Число таких перестановок равно 5!, остается $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$.

3. Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы *к* имеем 5 мест; после того как она вписана, для буквы *м* — 6 мест, для *л* — 7 мест. Всего $5\cdot6\cdot7=210$ способов.

4. Аналогично задаче $2P(3, 1, 1, 1) - 4! = 96$.

5. Каждая цифра в каждом разряде встречается $4^2=16$ раз. Поэтому сумма цифр первого разряда равна $16(1+2+3+4)=160$, второго — 1600 и третьего — 16 000. Всего получим 17 760.

6. Каждая цифра в каждом разряде появляется $P_4/4=6$ раз. Как и в задаче 5, получаем 66 660.

7. Здесь общее число перестановок равно 12, причем цифры 1 и 5 появляются в каждом разряде по 3 раза, а цифра 2—6 раз. Сумма цифр в каждом разряде равна $3\cdot1+3\cdot5+6\cdot2=30$. Общая сумма равна 33 300.

8. а) Это число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов. Каждый элемент либо входит в подмножество, либо нет (2 способа). По правилу произведения получаем требуемое равенство.

б) Здесь записано число способов выбрать в множестве, состоящем из n элементов, два подмножества: одно из k элементов, другое из $m-k$. Выбирать можно сначала k-подмножество, затем из оставшихся элементов — $(m-k)$-подмножество, или сначала m-подмножество, а затем в нем k-подмножество.

К статье «Движение планет»

Оптическая задача

Если источник находится в фокусе F_1 (рис. 1), то для любой точки A на эллипсоиде, в которую попадает луч, идущий из F_1, расстояние F_2F_1' между фокусом F_2 и изображением F_1' источника равно $2a$ (F_1' — отражение F_1 относительно касательной t). То, что $F_1'AF_2$ — прямая, было доказано в статье. Следовательно изображением источника F_1 будет сфера радиуса $2a$ с центром в фокусе F_2.

Геометрическая задача

Пусть большая окружность на рисунке 1 «направляющая», а маленькая проходит через фокус F_1 и касается большой. A_1— центр маленькой окружности. Нам нужно доказать, что $F_1A_1 + A_1F_2 = 2a$ независимо от положения точки A_1.

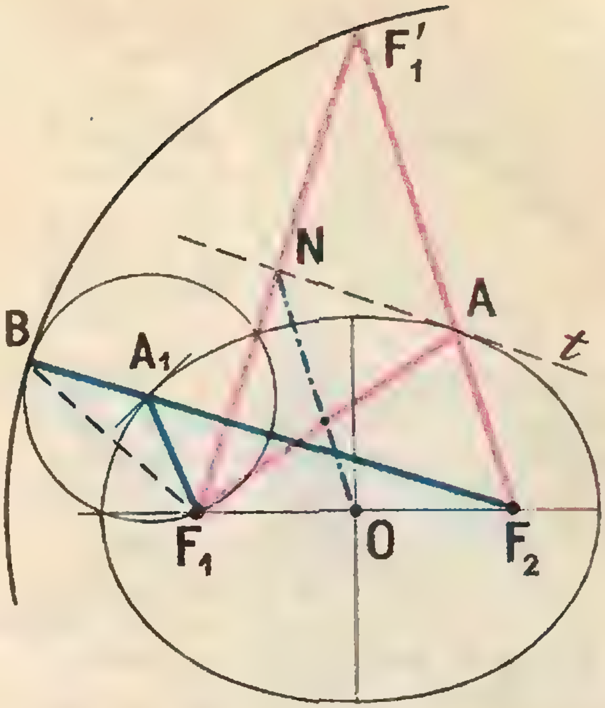


Рис. 1

Так как $F_1A_1=A_1B$, то $BF_2=F_2A_1+A_1F_1=2a$ для любой точки A_1.

Расстояние от центра эллипса до основания нормали N к касательной t всегда равно $\frac{1}{2}F_2F_1'=a$, что видно из подобия треугольников F_1NO и $F_1F_1'F_2$.

Космическая задача

Нарисовав орбиту спутника, легко увидеть, что большая полуось орбиты $a=\frac{1}{2}(R+r)$, сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов $c=\frac{1}{2}(R-r)$, а малая полуось $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(R+r)^2-\frac{1}{4}(R-r)^2}=\sqrt{Rr}$. Зная a и b, вычислить все требуемые величины не представляет труда.

К статье «Вспомогательная окружность»

1. Переобозначьте точки: A через B, C через P, M через H и N через R — и посмотрите на рисунок 1 в тексте.

2. Соедините остальные вершины треугольника с центром квадрата. Получившиеся отрезки равны, на них опираются нужные углы.

3. Проведите окружность через точки A, P, M, Q и перепишите для дуг условие $\angle APM = \angle AQM$ (то, что они равны 90°, даже не используется, лишь бы точки A, P, M, Q лежали на одной окружности).

4. Проведите окружность через точки A, M, C. Треугольники подобны по двум углам, опирающимся на дуги AM и AN.

5. Проведите окружность через точки C, M, N, H. Воспользуйтесь тем, что CH — диаметр, и докажите, что $\angle BAC = \angle CNM$.

6. а) 90°; 60°; 30°.
   б) 90°; 22°,5; 67°,5.

7. Треугольник определяется с точностью до подобия. Возьмите произвольную точку на биссектрисе, считайте ее точкой пересечения биссектрисы с описанной окружностью. Перпендикуляр, опущенный из этой точки на сторону треугольника (он параллелен высоте), попадает в основание медианы и проходит через центр окружности. Третья точка на окружности получится отражением в этом перпендикуляре. Не забудьте провести анализ возможности построения и рассмотреть все возможные случаи.

8. Ключ к решению этой задачи дают вспомогательные окружности, описанные около равносторонних треугольников и пересекающиеся в одной точке, через которую проходят и все три прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

9. Пусть на стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Докажите, что если угол C тупой, то его вершина лежит внутри окружности.

А теперь подумайте, как следует построить окружность, чтобы решить задачу 9.

10. Окружность, проведенная через A, B, C, должна касаться стороны угла в точке C. Докажите, что $\angle SCA = \angle SBC$. Треугольники SAC и SBC подобны. Для определения SC можно провести любую окружность через точки A и B и определить длину отрезка касательной, проведенной из точки S, от S до точки касания. Это и будет SC.

11. При решении этой задачи можно применить формулу, выражающую сторону треугольника через диаметр описанной окружности и противолежащий угол.

К статье «Вступительные экзамены по математике в МГПИ им. В. И. Ленина

Вариант 1

1. $$V = \frac{p^3 \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{12\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

2. Составленное уравнение

$$v_1^2 - \frac{2\pi R}{a}v_1 - \frac{(2\pi R)^2}{at} = 0;$$

его решение: $v_1 = \frac{\pi R}{a}\left(\sqrt{1+\frac{4a}{t}}+1\right)$ — скорость первого автомобиля, $v_2 = \frac{\pi R}{a}\times$ $\times\left(\sqrt{1+\frac{4a}{t}}-1\right)$ — скорость второго автомобиля. Второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

3. Если $a=0$, то $x=0$; если $a>1$, то $x = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; если $0<a<1$, то корней нет.

4. $$x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\quad x = 2\pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$$
$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Вариант 2

1. $$V = \frac{h^3}{\sqrt{2}\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

2. Составленное уравнение

$$\frac{a(m-x)+bx}{m} = \frac{b(n-x)+ax}{n},$$

где a, b — количество меди в 1 кг соответственно в 1-м и 2-м кусках.

После исключения a и b из уравнения получим

$(m+n)(b-a)x = (b-a)mn$, $b>a$,

$$x = \frac{mn}{m+n}.$$

3. $$1 < x \leqslant \sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x < \frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

4. $$x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

К статье «Письменный экзамен по физике в НГУ

Вариант 3

1. Так как вольтметр высокоомный, током через него можно пренебречь и потенциалы точек c и d можно определить так, как если бы вольтметра вообще не было. Поэтому, полагая, что потенциал точки a равен нулю, мы можем записать, что

$$\varphi_c - \varphi_d = \Delta U = \frac{UR_1}{R_1+R_2} - \frac{UR_3}{R_3+R_4} =$$
$$= U\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}.$$

2. Найдя положение центра тяжести тела, запишем условие равенства моментов сил давления воды и силы тяжести, действующей на тело, с учетом того, что вода не подтекает под его нижнюю грань. В качестве оси выбираем правое ребро нижней грани

$$\frac{a}{2}[2\cdot 4a^3+(h-4a)\,a^2]\,d=$$

$$=3a^3\,(2d-d)\,\frac{3}{2}\,a.$$

Отсюда $h=5\,a$.

3. Через конденсатор в единицу времени пролетает I/e электронов. Так как поле конденсатора электростатическое, то вдали от конденсатора до и после пролета электронов они должны иметь одинаковую энергию и, следовательно, одинаковый по величине импульс mv. Это означает, что каждый электрон, пролетая через конденсатор, передает ему в вертикальном направлении импульс $mv\ \sin\alpha$. В единицу времени конденсатору сообщается импульс $\frac{I}{e}\,mv\sin\alpha$. Если пренебречь вертикальным отклонением конденсатора и использовать закон Гука, то мы получим, что дополнительное растяжение пружины равно $bmv\frac{I}{eP}\sin\alpha$.

4. Пусть неподвижная точка находится на расстоянии x от нижнего конца крыши при ее нагревании и на расстоянии y от него при охлаждении. Так как точка неподвижна, то сумма сил, приложенных к ней, равна нулю:

$$(l'-x)\,P\sin\varphi+(l'-x)\,kP\cos\varphi=$$

$$=xP\sin\varphi-k\,P\cos\varphi.$$

Отсюда $x=l'\,\dfrac{\sin\varphi+k\cos\varphi}{2k\cos\varphi}$.

Аналогично $y=l'\,\dfrac{\sin\varphi-k\cos\varphi}{2k\,\mathrm{ccs}\,\varphi}$.

Если $l'=l\,[1+\alpha(t_2-t_1)]$, то за N суток лист сползет на расстояние

$$\Delta L=N\alpha l\,(t_2-t_1)\,\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{k}\,.$$

Решите на досуге

1. Земной шар стянули по экватору стальным обручем, затем диаметр обруча увеличили так, что длина обруча увеличилась на 1 *м*. Сможет ли кошка проползти в образовавшийся между землей и обручем зазор (считаем Землю шаром радиуса 6400 *км*) (рис. 1)?

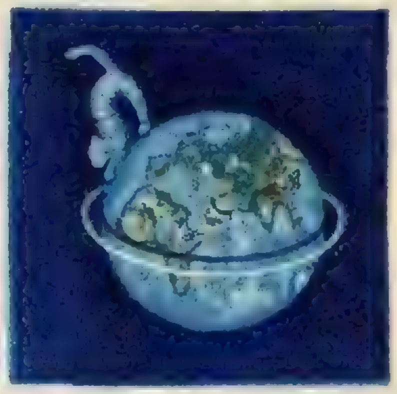


Рис. 1.

2. Здесь в троичной системе счисления произведено деление двух чисел. Расшифруйте!

```
  *** *0* | **
 -  **    |------
  ------  | ****
    * **  |
   -* *1
    -----
       **
     - 2*
      ---
        0
```

3. Имеются пять булыжников разного веса и рычажные весы, устройство которых показано на рисунке 2. Каждая чашка весов вмещает один булыжник.

Не более чем семью взвешиваниями расположить булыжники в порядке убывания их весов.

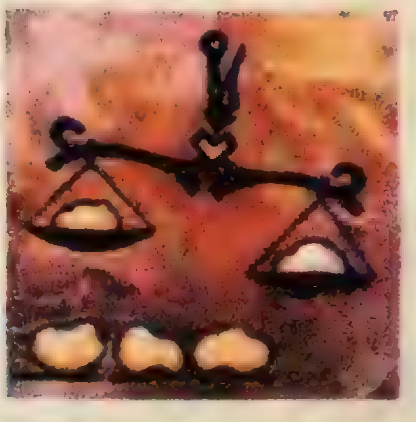


Рис. 2.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ НИКОЛАЮ КОПЕРНИКУ

Этот великий польский ученый проложил новые пути к современной астрономии. Нужно было обладать такой поразительной интуицией и независимостью мышления, какими обладал Коперник (1473—1543 гг.), чтобы понять и доказать, что не Солнце вращается вокруг Земли, а, наоборот, Земля и другие планеты вращаются вокруг Солнца.

Изучая движения планет, Коперник установил, что наша планета обходит Солнце за год, вращаясь при этом вокруг своей оси и совершая полный оборот за 24 часа. Разработка устройства планетной системы (гелиоцентрической), со всеми вычислениями заняла у Коперника 23 года — с 1507 по 1530. Затем рукопись с изложением его идей пролежала еще 10 с лишним лет, прежде чем он решился ее опубликовать. Первый отпечатанный экземпляр его книги был прислан ему 23 мая 1543 г. В ту же ночь он скончался.

Теория Коперника вызвала переворот в астрономии. Она подорвала доверие к учению церкви. В 1616 г. его книга была включена в список запрещенных церковью изданий и вычеркнута из него только в 1830 г.

Выдающаяся личность Коперника нашла широкое отражение во всех видах и жанрах искусства, в том числе и в миниатюрной живописи — марках. Большинство из них появилось на его родине. Первые две марки вышли в 1923 г. в честь 450-летия со дня его рождения (одна из них показана на фото). Затем они выходили в Польше неоднократно.

Так, уже сразу после освобождения страны от гитлеровских захватчиков, 1945—1946 гг. в сериях марок с видами Кракова есть и изображения памятника Копернику в этом городе. В 1951 г. выходит серия марок о первом съезде польских ученых, и на одной из них дан портрет Коперника.

480-летие со дня его рождения отмечается в 1953 г. выпуском двух марок. На первой мы видим картину Яна Матейко «Николай Коперник», а на второй — портрет ученого, который держит в руках рисунок с изображением гелиоцентрической планетной системы.

В 1955 г. среди марок серии «Памятники Варшавы» изображен памятник Копернику. В 1959 г. в серии марок, посвященных деятелям мировой науки, наряду с портретами Дарвина, Менделеева, Эйнштейна, Пастера, Ньютона есть и портрет Коперника.

Примерно с 1512 г. Коперник жил в Фромборке, где он, занимая должность каноника, разработал свою планетную систему. На одной из марок серии «Исторические города Польши» (выпуск 1960 г.) показан фрагмент кафедрального собора с башней Коперника в Фромборке. Художник В. Хомич изобразил маленькую фигуру на башне, наблюдающую за звездным небом.

В 1961 г. портрет Коперника выпущен в серии марок «Знаменитые поляки».

В 1964 г. праздновалось 600-летие Краковского (Ягеллонского) университета, и в серии марок, посвященных этому событию, появилась марка с портретом Коперника — воспитанника этого университета с 1491 по 1495 г.

В 1973 г. будет отмечаться 500-летие со дня рождения знаменитого польского астронома. В ознаменование юбилея в Польше в 1969 и 1970 гг. уже выпущены две серии марок, которые воспроизведены на фото. Особенно интересна последняя серия с портретами Коперника в различные периоды его жизни и видами итальянских городов, где он в разное время жил.

Марки с изображением Коперника изданы и в других странах, в частности, в КНР и в Йемене.

Большой известностью пользуется польский ученый в СССР. В ознаменование 10-летия (1955 г.) Договора о дружбе, взаимной помощи и послевоенном сотрудничестве между СССР и ПНР в Советском Союзе вышла серия марок. На одной из марок вы видите уже упоминавшуюся картину Яна Матейко «Николай Коперник».

Отдел ведет А. В. Алтынис

40 Gr
POLSKA
4
80 POLSKA GR
MIKOŁAJ KOPERNIK
1473-1543
POLSKA 2.50
POCZTA POLSKA
26 5 69
YEMEN ARAB REPUBLIC
DISCOVERIES OF UNIVERSE
POLAND
1543
POSTAGE
الجمهورية العربية اليمنية
POCZTA POLSKA
POLSKA
80 POCZTA POLSKA 80
MIKOŁAJ KOPERNIK
1473 - 1543
M. KOPERNIK 1473-1973
Wstrzymał słońce ruszył ziemię
40 POLSKA
POLSKA 60
M. KOPERNIK 1473-1973
60 POLSKA
POLSKA
MIKOŁAJ KOPERNIK
ПОЧТА СССР
1
M. KOPERNIK 1473-1973
2.50 POLSKA
POLSKA 2.50

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

ЗАДАЧИ. ИГРЫ. ОПЫТЫ

Что ты делаешь, читатель, в свое свободное время? Разбираешь коллекцию марок, занимаешься фотографией, играешь в футбол? Наверное, и то, и другое, и третье... Но, кроме всего прочего, ты — мы в этом уверены — еще любишь решать различные задачи: простые и сложные, серьезные и веселые, поучительные и развлекательные. Это очень увлекательное дело — решать задачи, оно — гимнастика для ума, а такая гимнастика будущему инженеру или ученому также необходима, как физическая зарядка, которую каждый обязан делать утром.

Недавно издан очень интересный сборник задач, игр и опытов под названием «Твое свободное время»*). Его авторы — В. Н. Болховитинов, Б. И. Колтовой и И. К. Лаговский собрали в одну книгу свои задачи, которые они помещали в разное время в журналах «Техника — молодежи», «Юный техник», «Наука и жизнь». При составлении сборника использованы также задачи и идеи задач, публиковавшиеся в различных иностранных журналах и сборниках.

Книга «Твое свободное время» имеет несколько разделов: «Психологический практикум», «Логические задачи», «Математические досуги», «Задачник конструктора», «Лабораторные занятия на дому» и другие. Почти ко всем задачам, помещенным в сборнике, даны решения или ответы.

Выполняя задания книги «Твое свободное время», решая помещенные там задачи, вы получите большое удовольствие, и можно только пожалеть, что сборник издан сравнительно небольшим тиражом — всего 10 000 экземпляров. (Для сравнения укажем, что только читателей «Кванта», которые безусловно любят решать задачи, более двухсот тысяч.)

Чтобы ваше представление о рецензируемой книге было более полным, приведем несколько задач, взятых из сборника «Твое свободное время».

Задача о калибрах

Слесарь заметил, что контролер проверяет точность обработки круглого отверстия диаметром 3 *см*, опуская в него 2 калибра-пробки диаметром 2 и 1 *см*. Тогда слесарь предложил для повышения точности контроля формы отверстия вместе с этими 2 калибрами опускать еще 2, которые должны плотно прилегать к стенкам и к обоим первым калибрам.

Вычислите диаметр калибров, которые предлагает добавить слесарь. Попробуйте обойтись без применения тригонометрии. (Разумеется, оба новых калибра по размерам будут одинаковы.)

Два бруска

В Закавказье растет дерево самшит, которое в 1,2 раза тяжелее воды. Из него приготовили брусок и такого же объема сделали брусок из сухой липы, которая в 1,2 раза легче воды.

Бруски связали вместе и опустили в воду. Брусок из липы был внизу, а из самшита — наверху. Первый погрузился весь, а второй на $\frac{5}{6}$ своей высоты.

Бруски перевернули: внизу был из самшита, а наверху — из липы.

На какую высоту погрузился брусок из липы?

Туристы

За границу поехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языков. 75 знали немецкий язык. 83 человека знали французский. Сколько туристов владело обоими иностранными языками?

Забракованный отчет

Инспектор группы по изучению спроса населения представил в трест столовых такой отчет:

Число опрошенных — 100 человек.

Из них: пьют кофе — 78 человек,
пьют чай — 71 человек
пьют кофе и чай — 48 человек.

Отчет забраковали. Почему?

В. П. Лишевский

---

*) В. Н. Болховитинов, Б. И. Колтовой, И. К. Лаговский. Твое свободное время. «Детская литература», М., 1970, 464 стр.

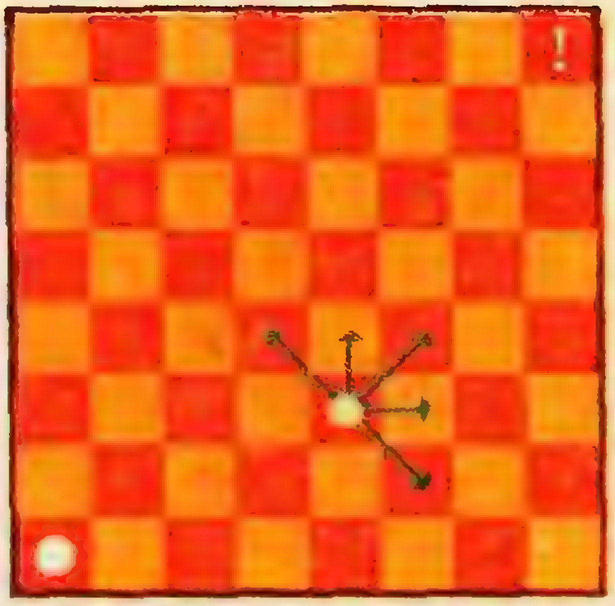
Квант для младших школьников

1. На доске было произведено умножение двух чисел. Потом часть цифр стерли и заменили звездочками. Попробуйте восстановить стертые цифры.

```
   *2*
   *7
  ----
   ***
 ** **
 -----
 ** **8
```

2. На шахматной доске в нижнем левом углу стоит шашка. Двое играющих ходят ею по очереди, передвигая шашку на соседнее поле. Допускаются лишь направления движений, указанные на рисунке 1.

Выигрывает тот, кто своим ходом ставит шашку на верхнее правое поле. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

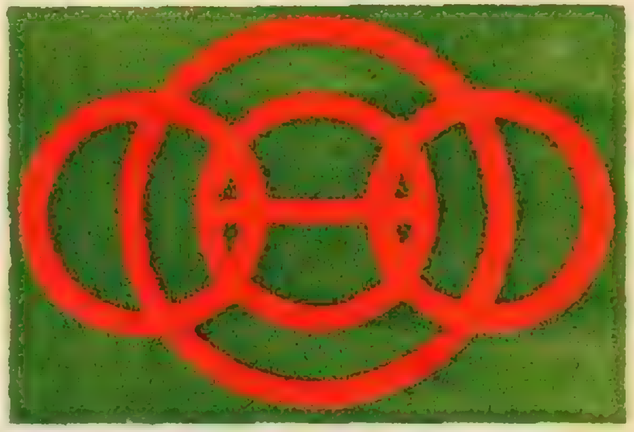


3. При некоторой замене цифр буквами оказалось, что

три + *три* + *три* = *дыра*

причем (*ы* + *ы*): *ы* = *ы*. Каким цифрам соответствуют использованные в этих равенствах буквы? (Разным цифрам соответствуют разные буквы.)

4. Попробуйте обойти фигуру на рисунке 2, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одной линии.



Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. В. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), В. П. Лишевский, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. А. Панькова

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 30.09.70 г. Подпис. к печати 9.12.70 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4 Условн. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 5,26 Тир. 275 000 экз.
Т-15532
Цена 30 коп. Заказ 1612
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
г. Чехов Московской области

НОМЕР
2

В номере:

Парадокс С. И. Вавилова — *В. А. Фабрикант* — 1
Две игры со спичками — *И. М. Яглом* — 4
Диалог о температуре — *М. Я. Абзель* — 11

Математический кружок

Сравнение различных средних двух положительных чисел — *З. А. Скопец* — 20

Задачник «Кванта»

Задачи — 24
Решения задач М21—М25; Ф29—Ф34 — *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* — 26

Практикум абитуриента

Две дюжины задач на прогрессии — *А. Г. Мордкович* — 37
Кинематика и связи — *С. А. Беляев* — 44
Вступительные экзамены по математике в Университет дружбы народов — *В. В. Рыжков* — 47

Рецензии. Библиография

Полет огненных стрел — *Ю. М. Брук* — 52

Информация

XII Международная математическая олимпиада школьников — *И. С. Петраков* — 54
IV Международная физическая олимпиада школьников — *Ю. М. Брук, Н. А. Минц* — 56
Ответы, указания, решения — 60
Кроссворд — *4-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ПАРАДОКС С. И. ВАВИЛОВА

В. А. Фабрикант

В геометрической оптике часто и плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия.

Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» известного советского физика С. И. Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В нашем случае в волнах колеблются значения напряженностей электрического и магнитного полей. Эти напряженности в каждой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную количеству энергии поля, протекающему в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух световых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах, наоборот, — меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизон-

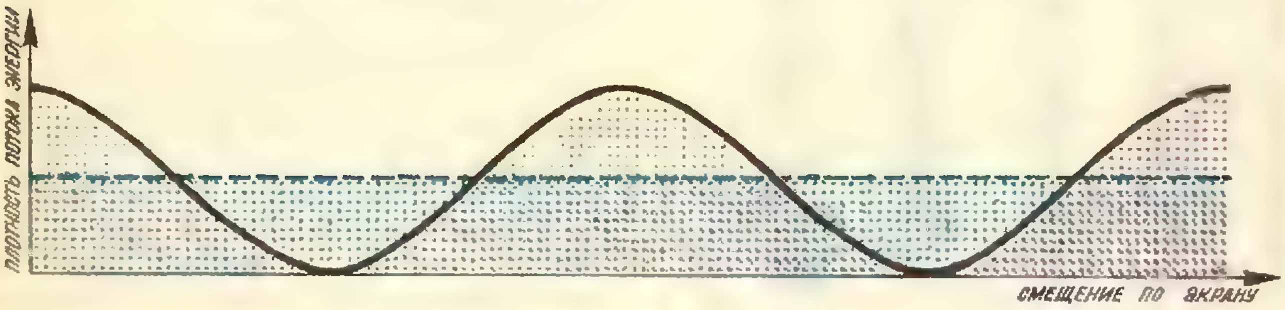


Рис. 1.

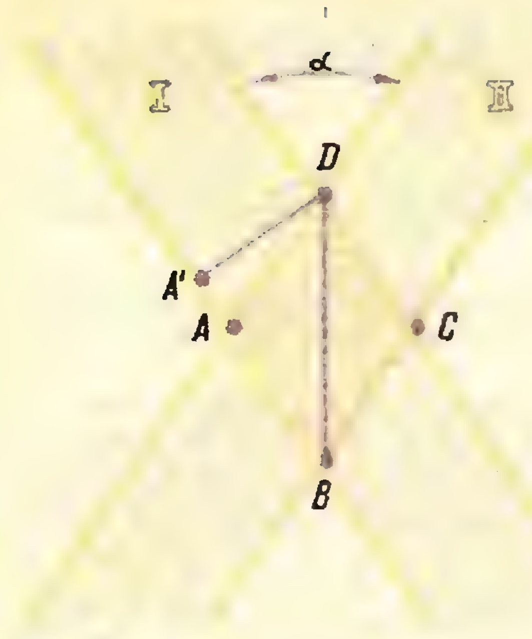


Рис. 2.

тальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой,— темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требования строгого бухгалтера природы — закона сохранения энергии — выполняются неукоснительно.

Перейдем теперь к парадоксу С. И. Вавилова. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a, пересекающихся под малым углом α. В области $ABCD$ происходит интерференция (рис. 2).

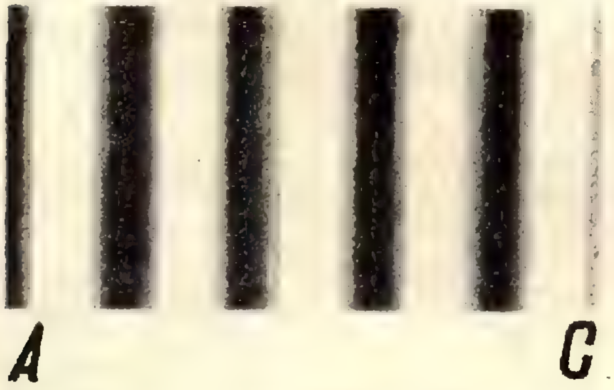


Рис. 3.

Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости чертежа, проходящий через точки A и C. Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рис. 3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если у обоих пучков одинаковые начальные фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD, будет равна нулю. Она соответствует, таким образом, середине центральной светлой полосы. В середине соседней, темной полосы разность фаз должна быть равна π, иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны и умноженной на 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (1)$$

Увеличению длины пути, проходимого волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π. Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\frac{\lambda}{2}$.

Подсчитаем разность хода в точке A. Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей.

Проведем через точку D (рис. 2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A'.

Пути, проходимые обоими пучками до точки D, одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A, волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D, должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D, должна сместиться на отрезок DA. В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - AA' = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C. Начнем теперь уменьшать угол α. При достаточно малом α можно сделать ΔL равным $\frac{\lambda}{4}$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют!

Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной π. Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой. В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором — неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для указанного случая, когда $\Delta L = \frac{\lambda}{4}$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\sin\alpha \approx \alpha$ для малых α). Мы покажем ниже, что угол α действительно очень мал. Тогда получим

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{2a\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\alpha} = \frac{a\alpha}{2}, \qquad (3)$$

или

$$\alpha = 0{,}5\,\frac{\lambda}{a}. \qquad (4)$$

Возьмем $a = 1$ *см*, $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ *см*, тогда $\alpha = 2{,}5\times10^{-5}$ радиана. Из (4) мы видим, что неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к величине поперечного сечения пучка.

Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения.

При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Ограничение размеров пучка благодаря явлению дифракции с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол расхождения пучка определяется как раз формулой (4). При этом, естественно, угол, под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла расхождения пересекающихся пучков.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (4) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла. Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Взяв реальные световые пучки, мы никогда, конечно, не получим противоречия с законом сохранения энергии. В интерференционных опытах данного типа всегда дело будет сводиться к пространственному перераспределению потока энергии.

Есть, однако, интерференционные эксперименты, где возникают еще более тонкие энергетические парадоксы, но это, как говорится, уже другая история.

ДВЕ ИГРЫ СО СПИЧКАМИ

И. М. Яглом

В этой статье мы расскажем вам об играх «ним» и «цзяньшицзы». И «ним» и «цзяньшицзы»—китайские народные игры; «цзяньшицзы» в переводе означает «выбирание камней» (разумеется, замена в условиях игр камней спичками ничего не меняет в ее существе). Впоследствии эти игры проникли в Европу; одно время игра «ним» была популярна в Западной Европе.

Приведем правила этих игр.

Игра «ним»

На столе лежат три кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может взять любое число спичек из одной (обязательно только из одной!) кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Игра «цзяньшицзы»

На столе лежат две кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может либо взять любое число спичек из одной кучки, либо поровну (но тоже любое число!) спичек из обеих кучек. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Задача состоит в том, чтобы *определить, при каких начальных положениях* (то есть количествах спичек в каждой из кучек) *начинающий может выиграть, а при каких нет, и указать метод правильной* (беспроигрышной) *игры.*

Практически играть в ним или цзяньшицзы очень удобно у классной доски — без всяких спичек, но с мелом и тряпкой в руке. На доске можно нарисовать, скажем, три ряда полей, оканчивающихся у правого края доски, и три шашки — по одной в каждом ряду полей (рис. 1). Каждый играющий в свой ход стирает одну из шашек и «передвигает» ее на любое число полей вправо (здесь речь идет об игре ним); выигравшим считается тот, кто сделает последний ход. Так же можно играть и в цзяньшицзы — только теперь доска для игры содержит два ряда полей и каждый играющий своим ходом подвигает либо одну шашку, либо одновременно обе шашки на одно и то же число полей.

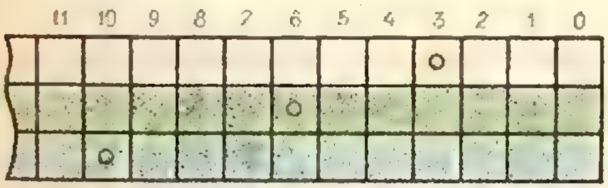


Рис. 1.

Начинаем играть в «ним»

Предположим, что в трех кучках спичек лежат соответственно a, b и c спичек, где $a \leqslant b \leqslant c$; тройка чисел (a, b, c) — это *положение* или *позиция* в игре в данный момент. Ясно, что позиция (0, 1, 1) является *проигрышной* для начинающего: своим ходом он обязан взять одну из двух имеющихся спичек; но после этого его соперник забирает вторую спичку и выигрывает. Все остальные начальные положения $(0, 1, c)$, где $c \geqslant 2$, *выигрышны* для начинающего: своим первым ходом он забирает $c-1$ спичку из третьей кучки, оставляя тем самым своему противнику заведомо проигрышную позицию (0, 1, 1). Следующее *проигрышное* для начинающего положение задается тройкой чисел (0, 2, 2): ведь если в этой позиции он заберет одну спичку, то следующим ходом противник оставит ему позицию (0, 1, 1), а если заберет две спички, то противник следующим ходом кончит игру (то есть выиграет). Все остальные позиции $(0, 2, c)$, где $c \geqslant 3$, *выигрышны* для начинающего, который может своим первым ходом забрать $c-2$ спички, оставив противнику (проигрышную!) позицию (0, 2, 2). Следующие положения, *проигрышные* для начинающего, будут иметь вид (1, 2, 3) и (0, 3, 3): здесь после каждого хода начинающего противник либо сразу выигрывает, либо сводит игру к одной из рассмотренных выше позиций (0, 1, 1) и (0, 2, 2) (см. ри-

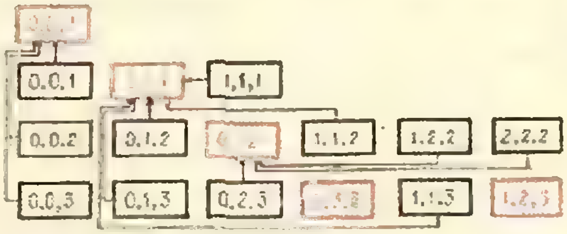


Рис. 2.

сунок 2, где красными цифрами обозначены проигрышные для начинающего позиции и стрелки обозначают ходы).

Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу начальных положений, проигрышных для начинающего: *игрок, вынужденный сделать ход, исходя из такой позиции, неминуемо должен перейти к позиции, выигрышной для начинающего* (то есть не входящей в составленную нами таблицу); напротив, *если позиция не является проигрышной, то игрок своим ходом может либо сразу выиграть, либо перейти к проигрышной позиции*, «подставив» тем самым ее своему противнику. Первые 15 из этих позиций собраны в следующей таблице:

Таблица I (проигрышные позиции в игре «ним»)

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	2	0	3	2	1	0	0	1
b	1	2	2	3	4	4	5	4	6	4	5	6	7	8	8
c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9

Попытаемся вглядеться в составленную таблицу с тем, чтобы усмотреть в ней общую закономерность, закон ее составления. Однако на первый взгляд никакого определенного закона, диктующего правила составления этой таблицы, заметить нельзя...

Игра «цзяньшицзы»

Пусть в наших двух кучках лежат соответственно a и b спичек, где $a \leqslant b$; пара чисел (a, b) — это *положение* или *позиция* в данный момент игры. Будем и здесь искать те положения, которые *проигрышны* для начинающего. Первое такое положение — это (1, 2); возможных ходов всего четыре: можно взять 1 спичку из 1-й кучки, или 1 спичку из 2-й кучки, или 2 спички из 2-й кучки, или, наконец, по 1 спичке из каждой кучки. Очевидно, что при любом возможном ходе начинающего противник следующим ходом заканчивает игру, то есть выигрывает. Все остальные положения, где одно из двух чисел a и b равно 1 или 2 или где разность $b-a$ равна 1, *выигрышны* для начинающего: если в этом положении нельзя окончить игру одним ходом (то есть сразу выиграть), то можно свести игру к положению (1, 2), проигрышному для начинающего. Следующей *проигрышной* позицией является позиция (3, 5): здесь после каждого хода начинающего противник или сразу выигрывает, или сводит игру к положению (1, 2). Все остальные позиции (a, b), где одно из чисел a и b равно 3 или 5 или где $b-a=2$, *выигрышны* для начинающего; следующее *проигрышное* для начинающего положение — это (4, 7). Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу проигрышных для начинающего позиций.

Таблица II (проигрышные позиции в игре «цзяньшицзы»)

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
b	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

К сожалению, и здесь не видно никакого определенного закона составления этой таблицы.

А нельзя ли таблицы I и II записать по другому?

Нам не удалось понять, как составлены таблицы I и II, образованные в первом случае тремя, а во втором — двумя строчками чисел. Подумаем теперь над возможными причинами постигшей нас неудачи.

Мы уже говорили о том, что таблицы I и II — это числовые таблицы; они образованы рядами чисел. Фигурирующие в этих таблицах числа мы, естественно, записывали обычным образом, используя общепринятую десятичную систему счисления; так, например, составляющие последний столбец таблицы II числа 24 и 39 означают: «2 десятка и 4 единицы» и «3 десятка и 9 единиц». Однако сама по себе десятичная система счисления, происхождение которой связано с тем случайным обстоятельством, что человек имеет на руках 10 пальцев, никак не связана с рассматриваемыми нами играми; поэтому уместной представляется попытка записать наши таблицы по-другому.

Дальнейшее содержание этой статьи связано со статьей «Системы счисления» («Квант» № 6). Нам потребуются следующие сведения из этой статьи.

Систем записи целых положительных чисел с помощью небольшого числа символов (цифр) можно предложить много. *Позиционные системы счисления* (точнее было бы сказать — *позиционные системы записи чисел*) строятся следующим образом. Задается некоторый *базис*, или *система ключевых чисел*, представляющий собой бесконечную возрастающую последовательность целых чисел:

$$1 = q_0 < q_1 < q_2 < q_3 \ldots \qquad (*)$$

После этого каждое число N представляется в виде суммы чисел нашего базиса, взятых с теми или иными целыми коэффициентами:

$$N = a_m q_m + a_{m-1} q_{m-1} + \ldots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0 q_0;$$

это выражение записывается так:

$$N = a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0,$$

где a_m, a_{m-1}, ... — «цифры» записи числа N.

Например, если система базисных чисел такова:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

то число 27 запишется следующим образом:

$$27 = 1\cdot 23 + 0\cdot 19 + 0\cdot 17 + 0\cdot 13 + 0\cdot 11 + 0\cdot 7 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = «1000000101».$$

При этом k-я цифра a_k в записи любого числа N в системе счисления с базисом (*) всегда будет меньше отношения $\frac{q_{k+1}}{q_k}$.

Если базис системы счисления имеет вид

$$1 = q^0,\ q = q^1,\ q^2,\ q^3,\ q^4, \ldots,$$

где q — некоторое целое число, то система счисления называется «*q-ичной*»; в ней все числа представляются суммами степеней числа q и все цифры в записи числа N меньше q (меньше 10 в случае общепринятой десятичной системы счисления).

Самой простой из всех систем записи целых чисел является *двоичная* система счисления, в которой все числа представляются суммами степеней числа 2. Если использовать эту систему счисления, то наши таблицы I и II примут совсем другой вид (числа в двоичной системе счисления мы будем записывать красными цифрами):

Таблица Ia

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	10	0	11	10	1	0	0	1
b	1	10	10	11	100	100	101	100	110	100	101	110	111	1000	1000
c	1	10	11	11	100	101	101	110	110	111	111	111	111	1000	1001

Таблица IIa

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	11	100	110	1 000	1 001	1 011	1 100	1 110	10 000	10 001	10 011	10 101	10 110	11 000
b	10	101	111	1010	1 101	1 111	10 010	10 100	10 111	11 010	11 100	11 111	100 010	100 100	100 111

Внимательное изучение таблицы Ia позволяет усмотреть в ней вполне определенную закономерность: да, конечно, *проигрышные позиции* (*a*, *b*, *c*) *в игре «ним» — это те позиции, где сумма цифр каждого разряда в двоичной записи чисел a, b, c четна* (то есть равна 0 или 2)! Однако таблица IIa оказывается более коварной: она ничем не лучше таблицы II, и никакой определенной закономерности составления проигрышных пар (*a*, *b*) из нее усмотреть нельзя.

Но почему именно двоичная система счисления должна дать нам ключ к отысканию системы беспроигрышной игры в цзяньшицзы? Правда, мы видели, что эта система помогает как будто при разработке теории игры ним: но ведь цзяньшицзы — это совсем другая игра, а ключ, открывающий одну дверь, совсем не обязан подходить к другой. Нельзя ли переписать таблицу II по-иному: может быть, другая система записи образующих эту систему чисел прольет больше света на ее строение?

Внимательное изучение таблицы II позволяет подметить, что в ней часто фигурируют числа Фибоначчи (см., например, 1-й, 2-й, 5-й и 13-й столбцы таблицы) *). А это в свою очередь может навести нас на мысль о целесообразности попытки записать таблицу II в «фибоначчиевой системе счисления», в которой все числа представляются суммами чисел последовательности Фибоначчи (числа в этой системе счисления мы будем записывать синими цифрами). Например, число 100 в фибоначчие-

---

*) Числа Фибоначчи — последовательность чисел, начинающая с 1 и 2 и далее строящаяся по следующему закону: *каждое число последовательности Фибоначчи равно сумме двух предыдущих*. Первые ее члены таковы: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, . . . Числам Фибоначчи посвящена хорошая брошюра Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 3-е изд., 1969).

вой системе счисления записывается так:

$$100=1000010100$$

ибо $100=1\cdot 89+1\cdot 8+1\cdot 3$.

Перепишем теперь таблицу II в фибоначчиевой системе счисления:

Таблица IIб

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	100	101	1 001	10 000	10 001	10 100	10 101	100 001	100 100	100 101	101 001	1 000 000	1 000 001	1 000 100
b	10	1 000	1 010	10 010	100 000	100 010	101 000	101 010	1 000 010	1 001 000	1 001 010	1 010 010	10 000 000	10 000 010	10 001 000

Вот тут уж закон составления «проигрышных» пар не вызывает никакого сомнения: *записанная в фибоначчиевой системе счисления пара чисел* (a, b), *где* $a<b$, *определяет в игре «цзяньшицзы» проигрышную позицию, если a оканчивается четным числом нулей* *), *а b получается из a приписыванием одного нуля в конце.*

Догадка? Нет, теорема!

Мы уже почти достигли цели: мы как будто знаем, какие позиции в играх «ним» и «цзяньшицзы» являются проигрышными для начинающего, а какие выигрышны для него. Однако математика не признает выражения «как будто»; в математике решить задачу — это не только (и не столько!) догадаться, каким будет ответ задачи, но и доказать, что твоя догадка правильна.

Доказательство того, что подмеченная нами закономерность составления проигрышных позиций правильна, состоит в следующем: *требуется показать, что в каждой из игр «ним» и «цзяньшицзы» существует такая система позиций* (их можно называть *выделенными* или *проигрышными* позициями), *что*

а) *для каждой позиции, не являющейся проигрышной, существует такой ход, после которого позиция становится проигрышной;*

б) *каждая проигрышная позиция после любого хода играющего перестает быть таковой.*

Эти свойства проигрышных позиций определяют и «метод беспроигрышной игры» (применимый, разумеется, только в том случае, когда начальная позиция не является проигрышной):

играющий должен каждым своим ходом добиваться того, чтобы позиция стала проигрышной *).

По этому поводу см. также решение задачи M8 («Квант» № 10, 1970, стр. 38).

При этом обратите внимание на некоторую разницу в терминологии. В решении задачи M8 позиции рассматриваются с точки зрения одного из игроков, который именуется *Я*; мы же рассматриваем позиции с точки зрения того игрока, которому предстоит сделать из данной позиции ход, и именно с точки зрения этого игрока оцениваем «выигрышность» позиции.

Сформулируем теперь те две теоремы, которые нам предстоит доказать:

Теорема 1. *Проигрышными* (то есть удовлетворяющими сформу-

---

*) *a* может оканчиваться «нулем нулей», то есть вовсе не содержать нулей в конце, ведь нуль — четное число.

*) При этом позицию (0, 0, 0), соответственно (0, 0), мы также причисляем к числу «проигрышных»: ведь если игрок может свести игру к этой позиции, то, значит, он уже выиграл.

лированным выше условиям а) и б)) *в игре «ним» являются те и только те позиции* (a, b, c), *для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел* a, b, c *в двоичной системе счисления, для всех разрядов четны.*

Теорема II. *Проигрышными в игре «цзяньшицзы» являются те и только те позиции* (a, b), *для которых число* a, *будучи записанным в фибоначчиевой системе счисления, кончается четным числом нулей, а число* b *получается из числа* a *приписыванием еще одного нуля в конце.*

Замечание. Из теорем I и II следует, что обе игры — «ним» и «цзяньшицзы» — в определенном смысле выгоды для начинающего: проигрышных для начинающего позиций (см. таблицы I и II) в них довольно мало, то есть они встречаются гораздо реже, чем все остальные (выигрышные для начинающего) позиции.

Доказательства этих теорем составляют содержание приводимых ниже упражнений. Ответы к ним даны на стр. 60 (попробуйте, однако, найти решения самостоятельно). Советуем вам сначала разобраться с упражнениями 1—4, так как упражнения 5—7 гораздо сложнее.

Упражнения

1. Докажите, что если позиция (a, b, c) в игре «ним» не является проигрышной, то есть не удовлетворяет указанным в формулировке теоремы I условиям, то играющий своим ходом может сделать ее проигрышной.

2. Докажите, что если позиция (a, b, c) в игре «ним» является проигрышной, то после любого хода игрока она перестает быть таковой.

3. Укажите правила беспроигрышной игры в игру «ним» в том случае, если число кучек спичек есть любое наперед заданное целое число $n \geqslant 2$ (прочие правила игры мы оставляем прежними). К чему сводится стратегия беспроигрышной игры в случае $n = 2$?

4. Опишите проигрышные позиции (a, b, c) в игре «ним», записывая числа a, b, c не в двоичной, а в четверичной системе счисления (то есть представляя, скажем, число a в виде $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n 4^n + a_{n-1} 4^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_2 4^2 + a_1 4 + a_0$; здесь $0 \leqslant a_i \leqslant 3$ для всех $i = n, n-1 \ldots, 2, 1, 0$ [*]))

5. Докажите, что для любого целого положительного числа p существует одна и только одна проигрышная позиция (a, b) в игре «цзяньшицзы» (то есть позиция, удовлетворяющая условиям теоремы II) такая, что $b - a = p$. Проверьте это для первых 15 проигрышных позиций, перечисленных в таблице II.

6. Докажите, что если позиция (b, a) в игре «цзяньшицзы» не удовлетворяет условиям теоремы II, то играющий своим ходом может либо сразу выиграть, либо свести позицию к проигрышной.

7. Докажите, что если позиция (a, b) в игре «цзяньшицзы» является проигрышной, то после любого хода играющего она перестает быть таковой.

8. Укажите правила беспроигрышной игры в цзяньшицзы, если число кучек нечетно (играющий каждым своим ходом имеет право взять либо любое число спичек из какой-то одной кучки, либо поровну — и тоже любое число! — из всех кучек).

Проблема. Укажите правила беспроигрышной игры в цзяньшицзы, если число кучек равно четырем.

Хочу предупредить читателя, что решение поставленной проблемы автору неизвестно.

---

[*] Черта над числом означает, что это запись числа цифрами $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, а не произведение чисел.

ДИАЛОГ О ТЕМПЕРАТУРЕ

М. Я. Азбель

Научно-популярная статья — всегда своеобразная игра Автора и Читателя, в которой Автору верят на слово (отсюда — не так уж редко реализуемая — возможность жульничества), но зато он не имеет права писать непонятно и нагонять скуку. Иначе — проигрыш Автора: статья не будет прочитана и, значит, писалась зря.

Обычно популярная статья выглядит как длинный монолог. Но уже древние греки понимали, что научный диалог гораздо интереснее. Поскольку это не нарушает правил игры, последуем их примеру. В результате Читатель получит возможность, проявив характер, попытаться сначала сам найти ответы на поставленные вопросы, каждый из которых — это физическая задача, а иногда и целая проблема.

Итак, занавес поднимается — мы начинаем.

Автор

Температура, пожалуй, первое количественное понятие, с которым сталкивается в своей жизни человек. Пятилетний ребенок еще не умеет считать, но уже сообщает: «Я здоров, у меня 36,6», — не понимая еще даже смысла произносимых слов (для десятичных дробей нужно вырасти вдвое). Это означает, что речь идет об одном из важнейших физических понятий. Человечество на протяжении всей своей истории пытается понять вещи, поражающие еще в детстве: пространство, время... Ибо чем привычнее понятие, чем проще формулируется вопрос, тем он обычно глубже и тем труднее на него ответить. Впрочем, тем труднее его и задать — настолько он кажется очевидным. Так, в одном из детективных рассказов сыщики сбиваются с ног, разыскивая то, что находится у них перед глазами.

Читатель

Бог с ними, и с сыщиками, и с философскими рассуждениями. Нельзя ли поконкретнее?

Автор

Пожалуйста. Вот вопрос, последовательное выяснение которого ведет нас в конце концов к основным понятиям общей теории относительности.

Все методы измерения температуры основаны на выравнивании температур, то есть на том, что более горячее тело охлаждается, а более холодное — нагревается. Не так ли?

Читатель

Конечно.

Автор

А почему это происходит? Почему тепло всегда переходит от более нагретого тела к менее нагретому?

Читатель

Не всегда! Холодильник, например, охлаждается, хотя около него нет более холодного тела. Тепло здесь передается более теплому телу — окружающему воздуху и всему тому, что находится в комнате.

Автор

Вы опередили ход моих рассуждений, сделав очень важное замечание. Действительно, если потрудиться и затратить работу, можно холодным телом нагреть горячее. Не зря холодильник включается в сеть. Но в системе, не взаимодействующей ни с какими другими объектами (такую систему физики называют замкнутой), температура всегда выравнивается, тепло передается от горячего к холодному. Во всех случаях, когда этого не происходит, можно найти, где система «разомкнута». Так, в случае холодильника его охлаждение происходит за счет энергии, полученной от электростанции, или, в конечном счете, от остывающего Солнца.

Читатель

Все, что вы говорите, по-моему, совершенно очевидно.

Автор

Я уже предупреждал: источник самых глубоких идей — кажущаяся очевидность. Давайте сформулируем сказанное в виде физического закона и посмотрим, какие из него вытекают следствия. Этот закон сводится к так называемому «второму началу термодинамики» («первым началом» называют закон сохранения энергии), или «закону возрастания энтропии».

Обычно, когда результаты эксперимента противоречат теории, надо исправлять теорию. Если же эксперимент противоречит второму началу термодинамики, ищут ошибку в эксперименте. И всегда находят ее. Ибо за всю историю науки не было ни одного случая, чтобы нарушился этот закон, так же как за всю историю человечества не было ни одного случая бессмертия. (Аналогия, в действительности, очень глубокая.)

Второе начало термодинамики гласит: *«В замкнутой системе происходит выравнивание температур»*. Иначе говоря, тепло переходит от горячего тела к холодному. Первое охлаждается, а второе нагревается.

Для того, чтобы отнять энергию у более нагретого тела, надо затратить работу. Значит, невозможен не только «вечный двигатель первого рода», который совершает работу из «ничего», вопреки первому началу термодинамики — закону сохранения энергии. Невозможен также не противоречащий этому закону «вечный двигатель второго рода», который бы, вопреки сформулированному нами второму началу термодинамики, совершал работу, охлаждая моря, океаны, материки. Запасы их тепловой энергии практически неисчерпаемы, но — увы — недоступны. Какие соблазнительные проекты погубило второе начало!

Итак, в замкнутой системе происходит выравнивание температур.

Этот процесс заканчивается, когда температуры тел становятся одинаковыми. Тогда наступает состояние равновесия, но не механического, а термодинамического.

Но отсюда немедленно следует вывод о «тепловой смерти Вселенной», принадлежащий немецкому ученому Клаузису. Раньше или позже остынут все звезды, во всем мире установится одна и та же температура, любые процессы окажутся невозможными — мир превратится в безжизненную пустыню. Все попытки понять, почему этого не произошло за время существования Вселенной, были бесплодны до появления общей теории относительности!

Читатель

А согласно теории относительности температуры не выравниваются?

Автор

Нет, ответ не столь прямолинеен. Но для того, чтобы понять, как расправилась общая теория относительности с тепловой смертью, надо хоть немного рассказать об основных понятиях этой теории.

Читатель

А это, скажете вы сейчас, школьнику недоступно...

Автор

Наоборот, уверен, что доступно. Считаю, что чем глубже физическая или математическая идея, тем проще ее изложить, не используя никаких специальных знаний.

Читатель

Так расскажите, пожалуйста, об общей теории относительности.

Автор

Это должно быть темой отдельной беседы. Сегодня мы говорим о температуре, и мне было важно лишь показать, что, размышляя над тем, как термометр измеряет температуру, можно прийти к теории Эйнштейна; показать, как много проблем и перспектив можно увидеть, читая школьную физику. Как видите, размышления о температуре оказываются исключительно плодотворными. Что же такое температура?

Читатель

Из того, что вы говорили, я понял, что температура — это то, что выравнивается при контакте двух тел. В школе нам говорили, что температура — это величина, пропорциональная средней кинетической энергии молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT,$$

где $k \approx 10^{-21}$ *дж/град* — постоянная Больцмана.

Выравнивание температур происходит потому, что при столкновении энергия передается от частиц с большей энергией к частицам с меньшей энергией.

Автор

Какова, по-вашему, потенциальная энергия взаимодействия частиц в кристалле при абсолютном нуле температуры?

Читатель

Мы преодолеваем эту энергию, превращая кристалл в газ. Значит, на каждый атом приходится энергия, равная примерно $kT_к$, где $T_к$ — температура кипения.

Автор

Совершенно правильная оценка. Значит, по-вашему, кристалл, находящийся при абсолютном нуле температуры, может нагреть газ, имеющий температуру ниже температуры кипения кристалла?

Читатель

Нет, конечно. Я имел в виду не полную, а кинетическую энергию, которая тем выше, чем выше температура.

Автор

Хорошо. Рассмотрим, например, кусок льда. Над ним, конечно, есть водяной пар. Из-за выравнивания температур у льда и пара при равновесии температуры одинаковы. Значит, одинаковы и средние скорости молекул в паре и кристалле льда.

Читатель (озадаченно).

Нет, это что-то странно. Ведь в твердом льде молекулы почти неподвижны, а в паре носятся с огромными скоростями. Я хорошо помню, что при испарении жидкость охлаждается. Есть даже такой способ получения очень низких температур — испарение жидкого гелия. Это и понятно. За границы молекулярного притяжения в жидкости могут вылетать лишь самые быстрые молекулы. Остающиеся же медленные соответствуют более низкой температуре.

Автор

Но разве на преодоление молекулярного притяжения в жидкости не будет истрачена часть энергии? Разве из жидкости в пар молекула вылетит с той же скоростью, с какой начинала свой путь?

Читатель

Поистине, хорошее дело спорить. Я никогда не думал, что в споре на самом деле рождается истина! Я, кажется, понял все до конца! Действительно, испаряются те молекулы, которые были самыми быстрыми, поэтому вначале жидкость охлаждается. Преодолевая притяжение, молекулы теряют свою скорость, как ракета, вылетающая к Луне. Поэтому газ тоже состоит не из рекордно быстрых молекул и средние скорости молекул в газе и жидкости совпадают. Благодаря испарению устанавливается общая температура. Если вылетающие — бывшие быстрые — молекулы уносятся, как при испарении под откачкой, можно добиться заметного понижения температуры жидкости.

Автор

А как быть со скоростями молекул в кристалле?

Читатель

В кристалле молекулы движутся с теми же средними скоростями, что и в паре над ним, но совершают не свободное поступательное движение, слегка искажаемое редкими столкновениями, как в газе, а колеблются возле стандартных мест в кристаллической решетке...

Автор

...которые называются узлами решетки. Совершенно верно.

Но я буду продолжать сбивать вас. Со временем вы научитесь делать это самостоятельно. Графоман ищет подтверждений любой своей идее — ученый сначала начинает поиски возможных опровержений.

Итак, вы сказали, что температура определяет среднюю скорость молекул. Это значит, что средние скорости молекул в любых телах, независимо от их состава и состояния (вода, железо, воздух), при одной и той же температуре одинаковы. А при абсолютном нуле скорости равны нулю. Но как же тогда быть с гелием, который даже при абсолютном нуле температуры остается жидким?

Читатель

Но я читал, что абсолютный нуль недостижим. Кстати, почему?

Автор

Для того чтобы разобраться почему, нужно поговорить об энтропии. Это сильно уведет нас в сторону. А то, что нуль недостижим, в нашем случае несущественно. Принципиально мы можем приблизиться к нему сколько угодно близко. Для нас важно лишь то, что при температуре в несколько градусов Кельвина средняя скорость атомов гелия уже слабо зависит от температуры, а при изменении температуры от 1 до 10^{-6} градуса практически не меняется, хотя, казалось бы, должна была уменьшиться в тысячу раз.

Читатель

Может быть, это связано с особыми свойствами гелия, с его сверхтекучестью?

Автор

Некоторая общность между этими явлениями есть. Однако оставаться жидким при абсолютном нуле — свойство не только гелия. Как вы знаете, хорошая электропроводность металлов обусловлена свободными электронами. Их средняя кинетическая энергия практически не зависит от температуры металла, и если ее пересчитать на температуру по нашей формуле $\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT$, то мы увидим, что она соответствует температуре 10^5—10^6 градусов, то есть температуре внутри звезд!

Читатель

Может быть, не совпадают температуры металла и электронов?

Автор

Нет, в состоянии равновесия температуры, как мы говорили, всегда выравниваются. Дело здесь в другом. То определение температуры, которое вы дали, правильно — но только в классической механике. Такая «простая», хорошо всем знакомая и фундаментальная величина, как температура, строго говоря, имеет квантовый характер! Именно в этом связь сверхтекучести гелия и того, что он никогда не замерзает при атмосферном давлении,— оба эти свойства чисто квантовые. Как видите, в поисках существенно квантовых эффектов не обязательно искать пути в микромир — эти эффекты перед глазами.

К сожалению, в квантовом случае смысл температуры не столь нагляден, как в классическом. Начнем с абсолютного нуля температуры и рассмотрим чисто квантовый эффект — определим кинетическую энергию при абсолютном нуле, то есть величину, в классической теории равную в точности нулю. Это позволит нам узнать, все ли вещества остаются твердыми при нулевой температуре, всегда ли способствует затвердеванию увеличение давления и каково состояние вещества в недрах Земли и в глубинах звезд.

Все эти выводы могут быть получены из одного важнейшего квантового закона — принципа неопределенности.

Читатель

Принцип неопределенности в применении к координате и импульсу частицы я знаю. Координата и импульс не могут быть точно измерены, так как они не имеют одновременно определенного значения. При измерении импульса частицы p и координаты x мы узнаем значения этих величин с некоторыми погрешностями Δp и Δx. Свойства этих двух величин таковы, что никоим образом нельзя сделать так, чтобы произведение этих погрешностей (иногда говорят «неопределенностей») было меньше, чем $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π

$$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-32}\,\frac{дж}{сек}\right): \quad \Delta p\,\Delta x \geqslant \hbar.$$

Автор

В объекте, состоящем из одинаковых атомов, все они тождественны, и потому их положение нельзя измерить с точностью большей, чем расстояние между ними. Если $\Delta x \sim a$, то каково наименьшее возможное значение импульса?

Читатель

Конечно, $\frac{\hbar}{a}$! Если бы я сказал, что импульс, например, меньше $0{,}1\frac{\hbar}{a}$, то это означало бы измерение его с точностью $0{,}1\frac{\hbar}{a}$, что невозможно!

Автор

Значит, наименьшая возможная кинетическая энергия...

Читатель

$$\ldots\text{равна } \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

то есть тем больше, чем меньше масса! Интересно, какой температуре соответствует такая энергия в классической механике? Среднее расстояние между атомами и электронами в металлах $a \approx 10^{-10}$ *м*, масса электрона 10^{-27} *г*, масса атома гелия 10^{-23} *г*. Из формулы

$$\frac{3}{2}kT = \frac{mv^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

мы получим, что для электронов температура равна

$$T = \frac{\hbar^2}{3kma^2} = \frac{10^{-64}}{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-21}\cdot 10^{-30}\cdot 10^{-20}} \approx$$

$$\approx 2{,}5\cdot 10^{6}\,{}^{\circ}\text{K}.$$

Больше миллиона градусов! Для гелия мы таким же образом получили бы температуру 1° К.

Автор

Как раз те цифры, о которых шла речь раньше. Теперь вам уже нетрудно выяснить, каким будет вещество при нулевой температуре — твердым или нет. Но сначала подумайте, почему вообще телам свойственно твердеть при низких температурах.

Читатель

Очевидно, потому что при низких температурах кинетическая энергия частиц становится малой.

Автор

Что значит малой? По сравнению с чем?

Читатель

По-видимому, по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц между собой. Когда потенциальная энергия становится значительно больше кинетической, она заставляет атомы занять определенные места в кристаллической решетке. Поэтому, для того чтобы сказать, каким будет вещество при нулевой температуре, нужно знать, как зависит потенциальная энергия взаимодействия частиц от расстояния между ними.

Теперь мне ясно, что жидкости, не замерзающие при абсолютном нуле температуры, следует искать среди веществ, обладающих атомами легкими и слабо взаимодействующими, — где побольше минимальная кинетическая энергия атомов и поменьше потенциальная энергия взаимодействия U. Гелий — легчайший инертный газ, атомы которого слабо взаимодействуют друг с другом (как, впрочем, и с другими атомами — в этом и состоит их «инертность»). Очевидно, он удовлетворяет обоим условиям.

В случае электронного газа потенциальная энергия взаимодействия соответствует закону Кулона: $U(a) = \frac{e^2}{4\pi a\varepsilon_0}$, где e — заряд электрона, равный примерно $1{,}6\cdot 10^{-18}$ *к*, и $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx$

$\approx 9\cdot 10^9 \frac{нм^2}{к}$. При $a \approx 10^{-10}$ *м* минимальная кинетическая энергия электронов

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2\cdot 9\cdot 10^{-31}\cdot 10^{-20}} \approx$$

$$\approx 5\cdot 10^{-15}\ дж, \text{ а}$$

$$U(a) \approx \frac{2{,}6\cdot 10^{-36}\cdot 9\cdot 10^{9}}{10^{-10}} \approx 2{,}3\cdot 10^{-16}\, дж.$$

$U(a)$ получается примерно такой же, как минимальная кинетическая энергия электронов! Поэтому электронный газ и не может затвердеть.

Автор

Интересно, что уже из принципа неопределенности следует отсутствие электронов в ядре, размер R которого порядка 10^{-13} *см*. Там он должен был бы иметь скорость $v \geqslant \frac{\hbar}{mR} \sim 6\times 10^{11}\frac{м}{сек}$, то есть в 2000 раз больше скорости света!

Теперь вы можете проследить, что будет происходить с веществом при $T=0$ по мере роста давления, то есть по мере уменьшения межатомного расстояния.

Читатель

Ну да, все определяется соотношением потенциальной и кинетической энергий: $U(a)$ и $\frac{\hbar^2}{2ma^2}$. Если $2ma^2U(a) \gg \hbar^2$, получится кристалл, в обратном случае — жидкость или газ.

Автор

Если вещество сжать настолько, чтобы «раздавить» и ионизовать атомы, то $U(a)$ пропорциональна $\frac{1}{a}$.

Читатель

Поэтому при $a \to 0$ тело будет все более газообразным! Давление приводит к плавлению — очень интересно!

Автор

При очень больших давлениях, когда разваливаются ядра, потенциальная энергия быстро растет с уменьшением a, и вещество опять затвердевает. Затем в области сверхвысоких плотностей, соответствующих, например, нейтронным звездам, определяющей становится энергия гравитационного взаимодействия, и вновь может наступить плавление.

Существуют звезды, меняющие свой блеск и имеющие размер около 10 *км* и массу, сравнимую с массой Солнца. У них твердая кора (плотность ее меняется от 10^6 до $5\cdot 10^{13}$ *г/см*^{3}) и жидкая сердцевина с плотностью $5\cdot 10^{14}$ *г/см*^{3}.

Читатель

Все это очень интересно, но я так и не понял, что же такое температура с точки зрения квантовой механики.

Автор

Мы определили пока только минимальную энергию атома или молекулы. Однако это еще не определяет кинетической энергии вещества. Надо иметь в виду следующее. Согласно законам квантовой механики энергия частицы не может быть любой. Она может принимать только вполне определенные значения, или, как говорят, частицы могут находиться на определенных энергетических уровнях. Их обычно изображают в виде расположенных одна над другой горизонтальных линий (рис. 1). Система энергетических уровней — это что-то вроде книжного шкафа с полками. Книги могут стоять на полках, но не между ними.

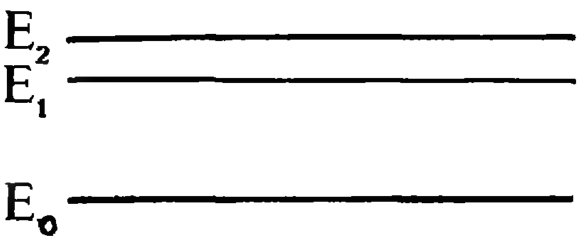


Рис. 1.

Читатель

А распределение частиц по полкам-уровням чисто случайное, беспорядочное?

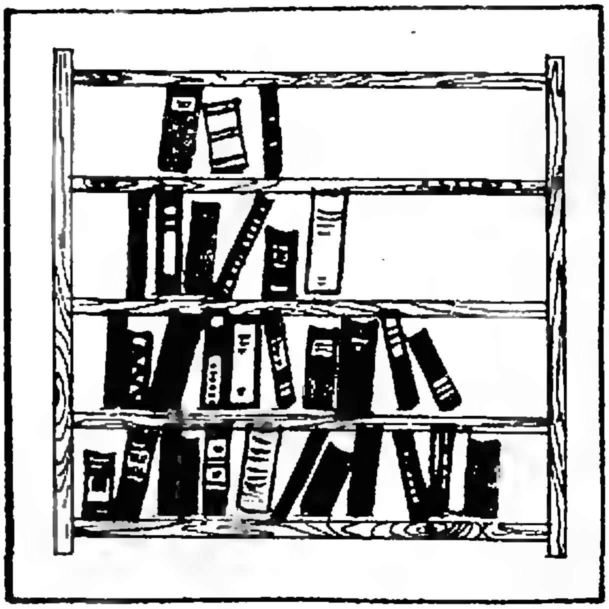


Рис. 2.

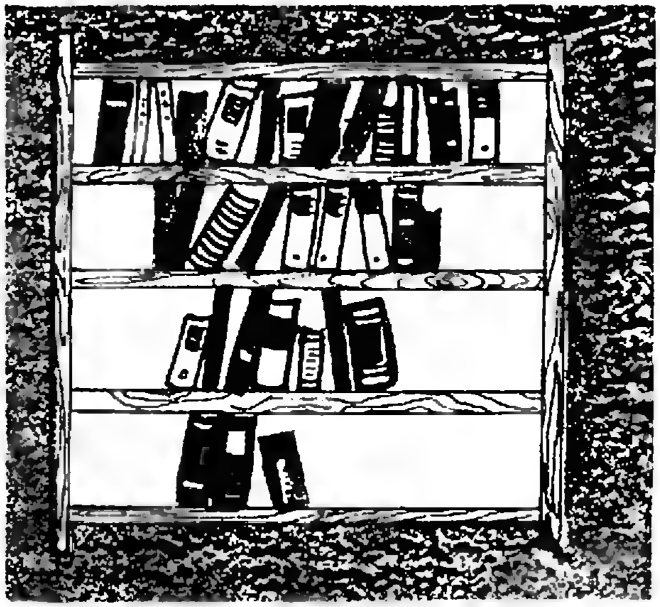


Рис. 3.

Автор

Нет. Именно оно-то и определяется температурой.

Существуют два принципиально возможных типа частиц: одни «независимы» и готовы к «равноправию» — любое их количество может принципиально иметь одинаковую энергию. Такие частицы называются «бозонами». Для других, фермионов, одну и ту же энергию может иметь только определенное число частиц. А в одном и том же квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. В результате ситуация при нулевой температуре напоминает наиболее выгодное в смысле потенциальной энергии распределение книг в книжном шкафу — с бесконечно широкими полками в случае бозонов и с полками конечной ширины в случае фермионов. Книги-бозоны все помещаются на нижней полке, фермионы при заданном объеме заполняют тем больше полок, чем их (книг-фермионов) больше. Но дело сейчас не в этом. Для нас важно, что распределение частиц по энергетическим полкам связано с температурой.

Буду говорить для наглядности о частицах-книгах в книжном шкафу, где номер полки определяет энергию частицы. «Температура» книг в шкафу определяет их распределение по полкам (рис. 2): чем выше температура, тем больше книг «перебираются» вверх. При заданном количестве книг температура может служить характеристикой рассеянности хозяина шкафа, решившего заполнять только самые низкие возможные полки. Абсолютная аккуратность соответствует $T=0$, абсолютная безалаберность, когда книги равномерно распределены по всем полкам, соответствует $T\to\infty$.

Читатель

Но тогда получается, что в шкафу может установиться и отрицательная температура, если на верхних полках окажется больше книг, чем на нижних (рис. 3)? И эта отрицательная температура в смысле энергии выше положительной? Ведь для того, чтобы достигнуть ее, системе нужно сообщить энергию, переставляя книги на более высокие полки. Причем самой высокой будет температура, при которой заполнены только верхние полки?

Автор

Вам, видимо, кажется, что вы довели рассуждения до абсурда, а между тем вы говорили абсолютно правильные вещи. Более того, вещи очень важные не только для «чистой»

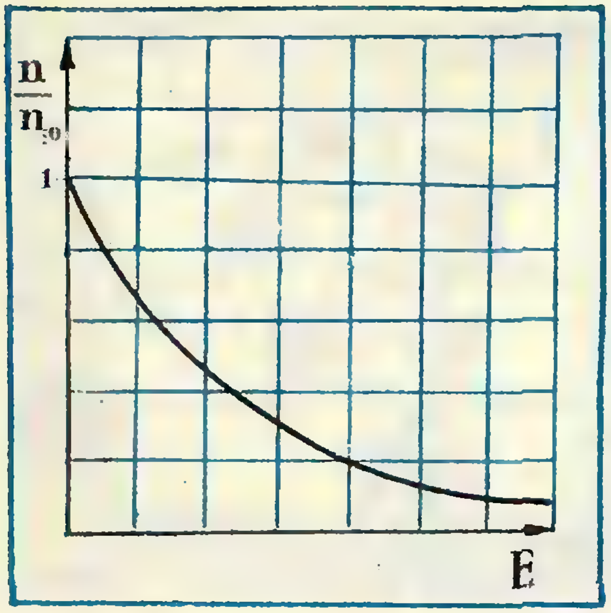


Рис. 4.

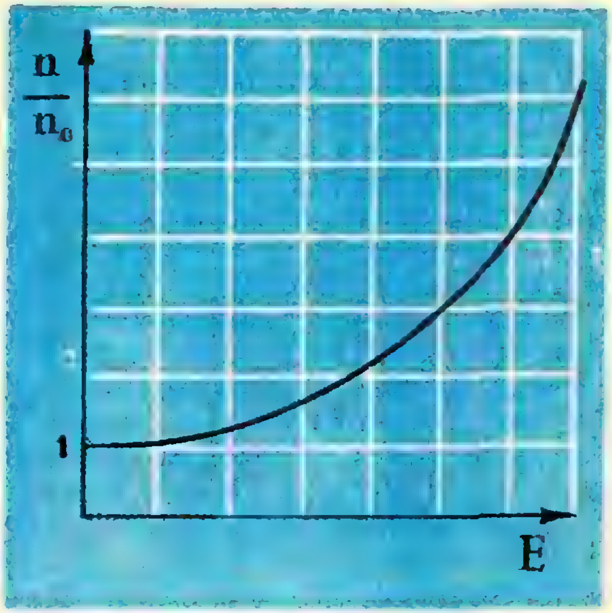


Рис. 5.

науки, но и для техники. В знаменитых квантовых генераторах — лазерах и мазерах — специально создают отрицательную температуру в том именно смысле, о котором вы говорили, а затем быстро «высвечивают» скопленную энергию.

Читатель

Разве температура определяет распределение частиц по энергетическим уровням только в квантовой механике?

Автор

Конечно нет. Это верно и в классической механике. Например, распределение по энергиям молекул «классического» идеального газа такое, как показано на рисунке 4. Оно определяется формулой

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Здесь n_0 — число частиц в том состоянии, с которого мы начинаем отсчет энергии частицы E; n — это число частиц с энергией E; $e = 2{,}718$ — основание натуральных логарифмов, k — постоянная Больцмана, T — температура газа.

Читатель

Если преобразовать эту формулу, прологарифмировав обе части равенства, то она примет вид

$$\ln\frac{n}{n_0} = -\frac{E}{kT}.$$

Отсюда

$$T = -\frac{E}{k(\ln n - \ln n_0)}.$$

Если к газу подводить энергию, то мы будем повышать его температуру, переводя все больше частиц с нижних энергетических уровней на верхние. При этом мы можем добиться того, что n станет больше n_0 и $\ln n$ больше $\ln n_0$. Это будет означать, что температура газа отрицательна! Мне кажется, мы пришли к абсурду. Говорить об отрицательной температуре идеального газа, по-моему, бессмысленно.

Автор

Если мы будем рассматривать только несколько энергетических уровней, то мы можем сделать так, что на верхних из них будет больше молекул газа, чем на нижних. Однако нельзя добиться того, чтобы распределение молекул по энергиям было таким, как показано на рисунке 5: зависимость числа частиц от энергии экспоненциальная и на достаточно высоких уровнях находится больше частиц, чем на нижних.

Все дело в том, что наш вывод о возможности отрицательных температур справедлив не для любой системы частиц, а только для такой, у которой число энергетических уровней конечное. Ведь обычно в энергию входит составной частью энергия кинетическая, а она может быть сколь угодно большой. На квантовом языке это означает, что число энергетических уровней бесконечно велико. Но в таком случае нельзя даже равномерно распределить конечное число частиц по бесконечно большому числу энергетических уровней, не говоря уже о том, чтобы получить отрицательную температуру. Значит, наши рассуждения верны для систем, энергия которых не связана с кинетической энергией.

Читатель

Это очень трудно понять. Я что-то никогда не слышал, чтобы кто-то держал в руках или видел тело с отрицательной температурой.

Автор

В этом нет ничего удивительного. В стабильном, равновесном состоянии отрицательная температура невозможна. Состояние с отрицательной температурой — это, как говорят, метастабильное состояние. Возникнув, оно существует обычно недолго (хотя бывают и весьма долговечные метастабильные состояния, например стекло, которое в равновесном состоянии — непрозрачный кристалл). Например, когда в рабочем веществе лазера создается отрицательная температура, оно очень быстро переходит в состояние с положительной температурой: частицы с высоких энергетических уровней переходят, как бы «сваливаются» на более низкие уровни, а теряемая при этом энергия выделяется в виде лазерного луча.

Читатель

Но я хотел бы вернуться к температуре. Если я правильно вас понял, температура — это понятие, у которого много разных сторон. С одной стороны, температура — это величина, характеризующая состояние тела, замечательная тем, что при переходе какой-нибудь системы к равновесию она оказывается одинаковой во всех частях системы. С другой стороны, температура связана со средней кинетической энергией частиц, составляющих тело. Наконец, в квантовой механике она выступает как величина, определяющая распределение частиц по энергетическим состояниям. Легко заметить, что во всех трех проявлениях температура самым тесным образом связана с другой физической величиной — энергией. Но раньше вы упомянули еще об одной величине, совсем мне незнакомой, — об энтропии. Она тоже имеет отношение к температуре?

Автор

Самое непосредственное. И рассказ о температуре не может быть полным, если не рассказать и об энтропии. Но беседа об энтропии должна занять не меньше места, чем та, которую теперь пора закончить.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СРЕДНИХ ДВУХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

З. А. Скопец

Хорошо известно, что с двумя положительными числами a и b или с двумя отрезками, имеющими длины a и b, связаны их среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$, причем $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (равенство выполняется только при $a=b$). Алгебраическое доказательство этого неравенства чрезвычайно простое:

$$(a-b)^2 \geqslant 0,\quad (a+b)^2 \geqslant 4ab,$$

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ и } \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Геометрическое же доказательство основано на одном метрическом соотношении между элементами прямоугольного треугольника: высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу. Эта высота не превосходит радиуса описанной около треугольника окружности, в то время как среднее арифметическое отрезков гипотенузы в точности равно радиусу этой окружности.

Помимо указанных двух средних интересно рассмотреть еще два часто встречающихся средних: среднее квадратичное $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и среднее гармоническое $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Приведем алгебраическое, а затем и геометрическое доказательство того, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \qquad (1)$$

причем во всех случаях знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$. Обозначим выписанные в (1) средние поочередно буквами M, N, K, L. Неравенство $N \leqslant K$ мы уже проверили. Остается доказать, что 1) $K \leqslant L$; 2) $M \leqslant N$.

1) $$K^2-L^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{2}=-\frac{1}{4}(a-b)^2 \leqslant 0,$$

то есть $K \leqslant L$, причем $K=L$ только при $a=b$;

2) $$M^2-N^2=\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}-ab=-\frac{ab\,(a-b)^2}{(a+b)^2} \leqslant 0,$$

то есть $M \leqslant N$, причем $M=N$ при $a=b$.

Справедливость неравенств (1) доказана *).

Теперь мы рассмотрим геометрическое доказательство этих неравенств, которые могут оказаться по-

---

*) Об этих неравенствах уже шла речь в статье А. П. Савина «Максимум, минимум и теорема о средних» («Квант» № 11, 1970).

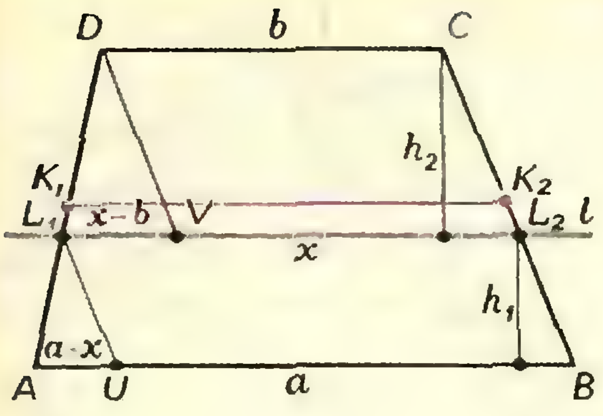


Рис. 1.

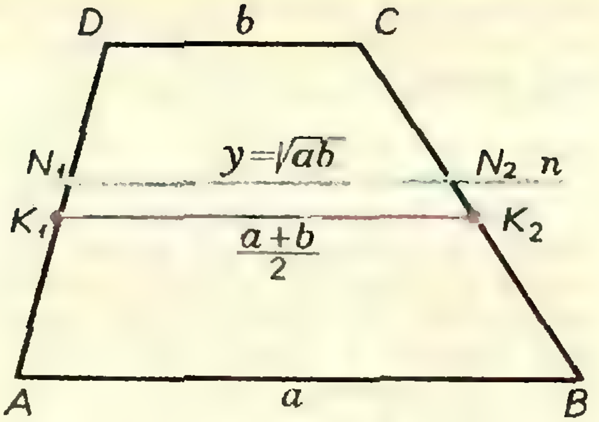


Рис. 2.

лезными при решении геометрических задач.

Пусть даны два отрезка a и b. Если $a=b$, то проверкой убеждаемся в справедливости неравенств (1). Предположим, что $a>b$, и построим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно a и b (рис. 1). Проведем секущую прямую l так, чтобы она была параллельна основаниям трапеции и рассекала ее на две равновеликие трапеции $T_1(ABL_2L_1)$ и $T_2(L_1L_2CD)$. Вычислим длину отрезка L_1L_2, которую обозначим через x. Из равновеликости трапеций T_1 и T_2 следует, что $(a+x)h_1=(x+b)h_2$, или

$$h_1:h_2=(x+b):(a+x), \qquad (2)$$

где h_1 — высота трапеции T_1, а h_2 — высота трапеции T_2. Из подобия треугольников AL_1U и DL_1V вытекает, что

$$h_1:h_2=(a-x):(x-b). \qquad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем

$$\frac{x+b}{a+x}=\frac{a-x}{x-b},$$

откуда находим, что $x^2-b^2=a^2-x^2$, и окончательно

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Итак, доказано, что

$$L_1L_2=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Учитывая (2), имеем $h_1<h_2$, поэтому отрезок L_1L_2 лежит ближе к большему основанию AB трапеции, чем ее средняя линия K_1K_2, равная $\frac{a+b}{2}$. Но длина отрезка x, параллельного основаниям трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, заключена между длинами ее оснований (это вытекает из свойств подобия). Итак, при $a>b$ имеем $\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Это неравенство остается в силе и при $a<b$ (достаточно поменять обозначения: a на b и b на a). Следовательно, для любых a и b имеем $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Перейдем к сравнению N и K. Для этого проведем секущую прямую n так, чтобы она рассекала данную трапецию на две подобные (гомотетичные) трапеции $T_1'(ABN_2N_1)$ и $T_2'(N_1N_2CD)$ (рис. 2). Обозначим длину отрезка N_1N_2 через y. Из подобия трапеций T_1' и T_2' следует, что $a:y=y:b$, или

$$y=\sqrt{ab}. \qquad (4)$$

Следовательно, $N_1N_2=\sqrt{ab}$. Из подобия трапеций (с учетом (4)) следует также, что

$$AN_1:N_1D=a:y=\sqrt{\frac{a}{b}}>1. \qquad (5)$$

Это означает, что прямая n находится дальше от основания AB трапеции, чем средняя линия K_1K_2, и поэтому $N_1N_2 < K_1K_2$. Итак, для любых a и b имеем

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Наконец, проведем через точку пересечения O диагоналей данной трапеции прямую m, параллельную ее основаниям и пересекающую боковые стороны в точках M_1 и M_2 (рис. 3). Очевидно, что

$$AM_1:M_1D = AO:OC = a:b.$$

Но $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{a}{b}}$, ибо $a > b$. Следовательно, учитывая (5), заключаем, что отрезок M_1M_2 находится ближе к меньшему основанию трапеции, чем отрезок N_1N_2, и поэтому $M_1M_2 < N_1N_2$. С другой стороны,

$$M_1O:a = DO:DB = CO:CA = OM_2:a.$$

Это означает, что $M_1O = OM_2$. Далее,

$$\frac{M_1O}{a} + \frac{OM_2}{b} = \frac{DO}{DB} + \frac{BO}{DB} = 1.$$

Отсюда находим, что $M_1M_2 = 2M_1O = 2\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, и поэтому $M_1M_2 = \frac{2ab}{a+b}$. *Итак*, $M < N$, *если* $a > b$. Аналогично доказывается, что $M < N$, если $a < b$. Следовательно, для любых a и b имеем

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Этим справедливость неравенств (1) доказана.

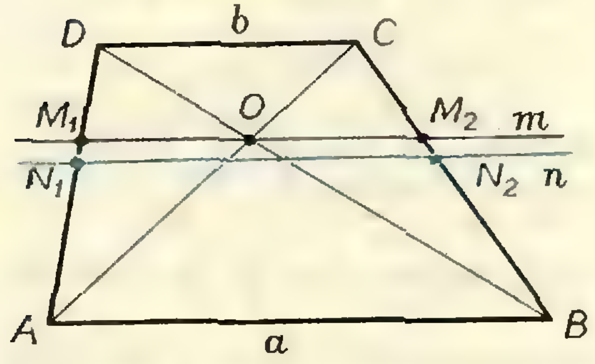


Рис. 3.

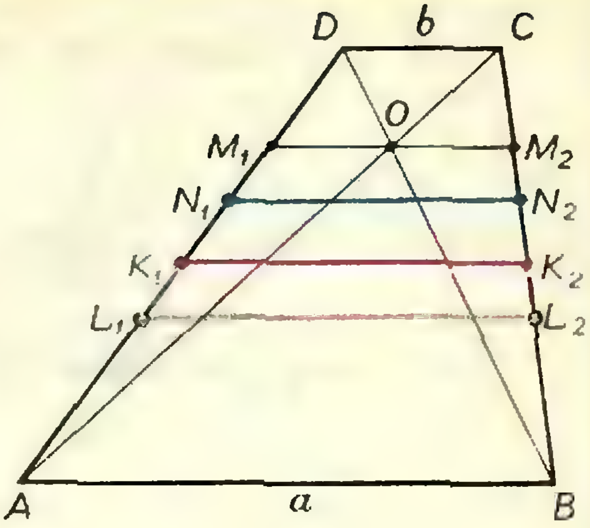


Рис. 4.

$$M_1M_2 = M = \frac{2ab}{a+b}; \quad N_1N_2 = N = \sqrt{ab};$$

$$K_1K_2 = K = \frac{a+b}{2}; \quad L_1L_2 = L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Таким образом, все четыре средние двух отрезков a и b получили геометрическое истолкование: если эти два отрезка служат основаниями трапеции, то ближе всех к большему основанию трапеции находится среднее квадратичное, за ним следует среднее арифметическое, далее идет среднее геометрическое и, наконец, среднее гармоническое (рис. 4). Очевидно, что длины этих отрезков не зависят от формы трапеции — у всех трапеций с данными длинами a и b оснований указанные средние соответственно равны. Когда $a = b$, то трапеция превращается в параллелограмм и все четыре средние совпадают и становятся равными a.

Остается построить эти четыре средние по заданным отрезкам a и b. Мы дадим такие построения, чтобы можно было другим путем убедиться в истинности неравенств (1).

Отложим на прямой по одну сторону от точки O отрезки $OA = a$, $OB = b$, где $a < b$. Пусть S — середина отрезка AB (рис. 5). Тогда

$$OS = a + \frac{b-a}{2} \text{ или } OS = \frac{a+b}{2} = K.$$

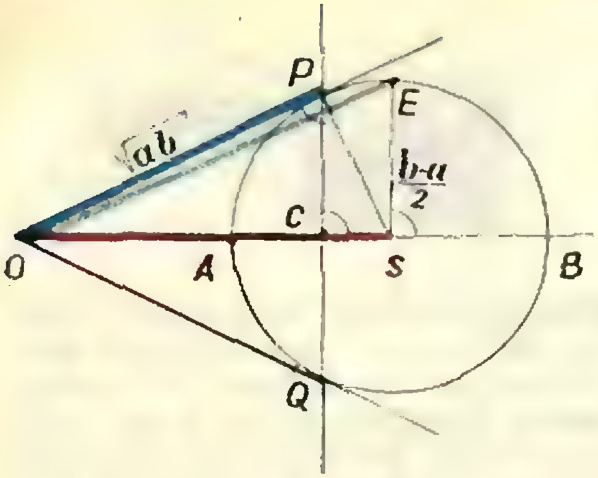


Рис. 5

$$OC = M = \frac{2ab}{a+b};$$

$$OP = N = \sqrt{ab}; \quad OS = K = \frac{a+b}{2};$$

$$OE = L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}; \quad M < N < K < L.$$

Построим на отрезке AB, как на диаметре, окружность и проведем к ней из точки O касательные OP и OQ (P, Q — точки касания). Воспользуемся зависимостью между отрезками секущей и касательной, проведенных из точки O к окружности: $OP^2 = ab$. Следовательно, $OP = \sqrt{ab} = N$, причем $N < K$. Далее, пусть PQ пересекает OS в точке C. Тогда $OP^2 = OS \cdot OC$ и

$$OC = ab : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} = M,$$

причем $M < N$.

Наконец, построим радиус SE, перпендикулярный AB. Имеем

$$OE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$OE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = L,$$

причем $K < L$. Итак, если $a \neq b$, то
$$M < N < K < L.$$

Упражнения

1. На прямой по одну сторону от точки O отложены отрезки $OA = a$, $OB = b$, $a < b$, и построена окружность k диаметра AB с центром S. Далее, построены:

а) прямая g, пересекающая k в таких точках P и Q, что касательные в них проходят через O;

б) окружность k_1 с центром O радиуса OP и

в) окружность k_2 с диаметром OS.

Доказать, что если прямая, проходящая через O, пересекает части линий g, k_1 и k_2, расположенные внутри k, в точках C_1, P_1, S_1, а окружность k — в точках A_1 и B_1, то

$$OC_1 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad OP_1 = \sqrt{a_1b_1},$$

$$OS_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad (a_1 = OA_1, \ b_1 = OB_1).$$

2. Найти четыре соотношения, связывающие между собой каждые три средние двух чисел a и b:

$$M = \frac{2ab}{a+b}, \quad N = \sqrt{ab}, \quad K = \frac{a+b}{2},$$

$$L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3. Доказать истинность следующих неравенств:

а) $N - M \leqslant K - N$,
б) $K - M \leqslant L - N$.
в) $L - K \leqslant K - N$.

4. Окружность с центром S на оси абсцисс прямоугольной системы координат пересекает ось в точках A $(a, 0)$ и B $(b, 0)$, $a > 0$, $b > 0$, $a < b$. Секущая, проходящая через начало координат O, пересекает окружность в точках A_1 и B_1. Составить уравнение линии, которой принадлежат те точки C_1 (x, y) на секущих, для которых

$$(OC_1)^2 = \frac{1}{2}\left[(OA_1)^2 + (OB_1)^2\right].$$

5. На продолжении стороны AB треугольника ABS за точкой A дана точка O, через которую проведена прямая, пересекающая AS и BS соответственно в точках B_1 и A_1. Через точку пересечения P прямых AA_1 и BB_1 проведена прямая SP, пересекающая AB в точке C. Доказать, что $c = \frac{2ab}{a+b}$, где $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

6. Дан параллелограмм $OABC$ и средняя линия MN треугольника ABC, параллельная AC. Через вершину O проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA, AB, MN соответственно в точках A_0, B_0, C_0, D_0. Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{d},$$

где $OA_0 = a$, $OB_0 = b$, $OC_0 = c$, $OD_0 = d$; точки A_0, B_0, C_0, D_0 находятся по одну сторону от O (d — среднее гармоническое отрезков a, b, c, d).

Как изменится указанное равенство, если точки A_0, B_0, C_0, D_0 не лежат по одну сторону от O?

ЗАДАЧНИК КВАНТА

М66. Вот несколько примеров, когда сумма квадратов k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $k-1$ следующих натуральных чисел:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2,$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2.$$

Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

А. И. Милованов

М67. Ювелиру заказано золотое колечко шириной h, имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара с центром O и поверхностью цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку O (рис. 1). Мастер сделал такое колечко, но выбрал r слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если r нужно увеличить в k раз, а ширину h оставить прежней?

М68. Сетка линий, изображенная на обложке этого номера журнала, состоит из концентрических окружностей радиусов 1, 2, 3, 4,… с центром в точке O, прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке красных точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами голубой клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому весь рисунок как бы соткан из белых и голубых парабол).

А. Н. Виленкин

М69. Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова 76.

а) Есть ли еще такие двузначные числа?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$$

такая, что для любого n квадрат числа «$a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1$» имеет вид «$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1$»? Кавычками обозначена здесь десятичная запись числа. Очевидный ответ $a_1 = 1$, $a_i = 0$ при $i > 1$ мы исключаем.

М70. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — несколько прямых на плоскости, среди которых есть две пересекающихся. Докажите, что можно единственным образом выбрать на каждой из этих прямых по точке $X_1, X_2, \ldots$ так, чтобы

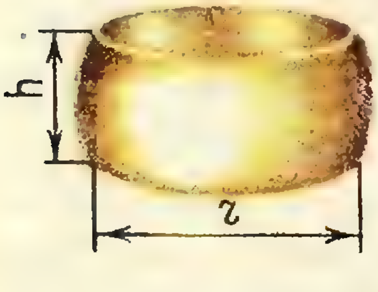


Рис. 1.

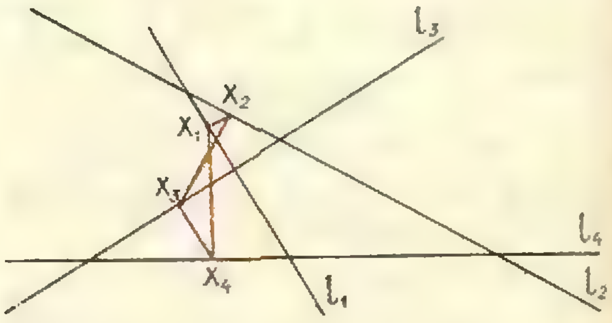


Рис. 2.

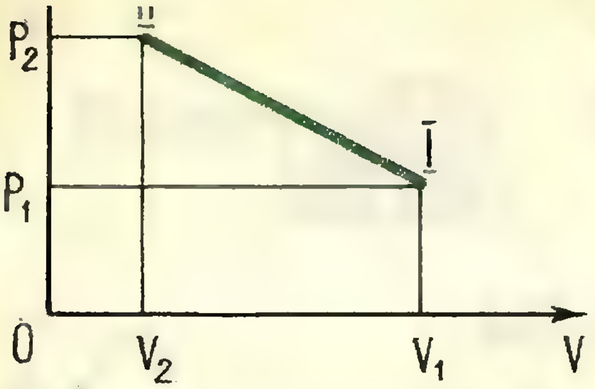


Рис. 3.

перпендикуляр, восставленный в точке X_i к прямой l_i, проходил через точку X_{i+1} (для всех $i = 1, 2, \dots$ $\dots, n-1$) и перпендикуляр, восстановленный к l_n в точке X_n, проходил через точку X_1. (На рисунке 2 изображен пример для $n = 4$.)

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Н. Б. Васильев

Ф77. Прямоугольный брусок, высота которого значительно превышает его длину и ширину, стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, имея лишь один измерительный прибор — линейку?

В. Н. Ланге,
А. П. Рымкевич

Ф78. 20 *г* гелия, заключенного в цилиндре под поршнем, очень медленно переводят из состояния *I* ($P_1 = 4{,}1$ *атм*, $V_1 = 32$ *л*) в состояние *II* ($P_2 = 15{,}5$ *атм*, $V_2 = 9$ *л*). Какой наибольшей температуры достигает газ при этом процессе, если график зависимости давления от объема — прямая линия (рис. 3)?

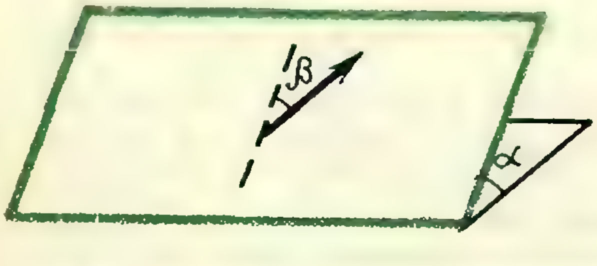


Рис. 4.

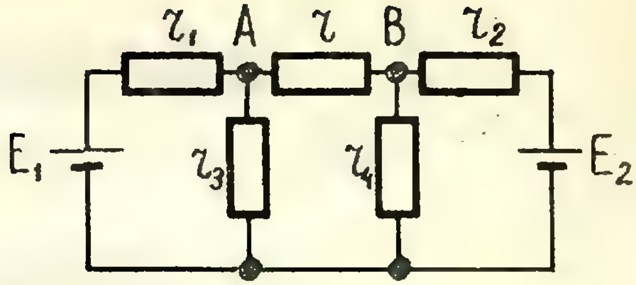


Рис. 5.

Ф79. Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить полено?

В. А. Варлаханов

Ф80. Вдоль наклонной плоскости под углом β к направлению спуска бросают кубик (рис. 4). Найти установившуюся скорость движения кубика, если коэффициент его трения о плоскость $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Ф81. В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако если вследствие каких-либо причин участок обмотки утратит сверхпроводящие свойства, то произойдет авария. На этом участке будет выделяться большое количество тепла, и произойдет взрыв.

Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии. (Не пытайтесь изобретать какие-либо схемы с реле, размыкающими цепь. Они не помогут.)

Г. Я. Мякишев.

Ф82. Найдите условие, при котором через сопротивление *r*, подключенное в точках *A* и *B* схемы, изображенной на рисунке 5, не будет идти ток. (Помимо симметричного, существует еще и другое решение.)

К. И. Константинов

ЗАДАЧНИК Кванта

РЕШЕНИЯ

В этом разделе журнала мы *продолжаем публиковать* решения задач из задачника «Кванта». Некоторые из этих задач трудны даже для специалистов математиков и физиков. Многие из них дают повод для разговора о целом классе задач, о методах подхода к тем или иным явлениям. Каждое решение представляет *собой небольшую* отдельную статью, и мы рекомендуем познакомиться с ними даже тем, кто не пытался решать задачи раньше. В большинстве случаев мы указываем фамилии читателей, приславших наиболее удачные решения, но, конечно, мы не сможем ответить всем, *приславшим нам* письма.

M21

Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

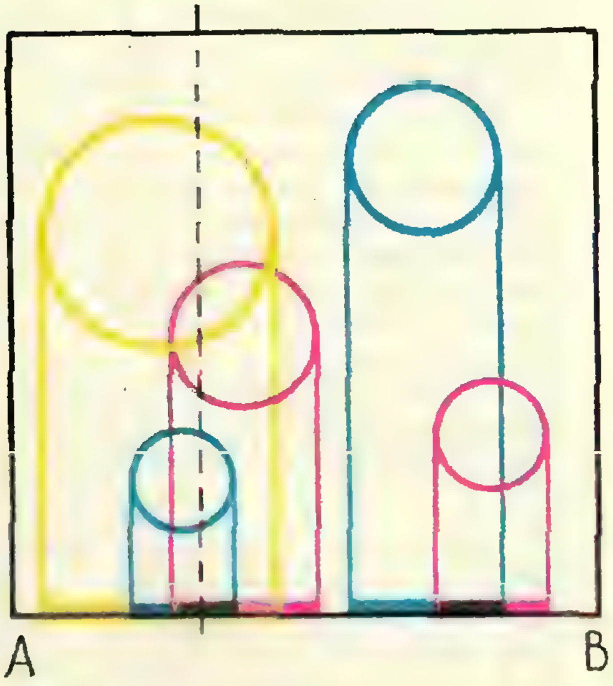


Рис. 1.

Выберем какую-то сторону AB квадрата и спроектируем на нее все окружности. Предположим, что требуемой прямой провести нельзя. Тогда каждая точка на стороне AB покрыта не более чем тремя проекциями окружностей (рис. 1), иначе прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная AB, пересекала бы более трех окружностей. Следовательно, сумма всех проекций, то есть сумма длин диаметров окружностей, не превосходит 3; поэтому сумма длин окружностей не превосходит 3π, в то время как по условию она равна $10 > 3\pi$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Такое решение прислали *Д. Григорьев* из Ленинграда и *Н. Рассихин* из Москвы.

Точно так же можно доказать следующее более общее утверждение. *Назовем поперечником выпуклой* фигуры ширину наиболее узкой полосы, в которую эту фигуру можно поместить. (Можно показать, что это определение годится для любой ограниченной фигуры.) Тогда, если внутри фигуры с поперечником h находится n фигур, сумма поперечников которых больше kh, то найдется прямая, которая пересекает не менее $k+1$ из этих фигур.

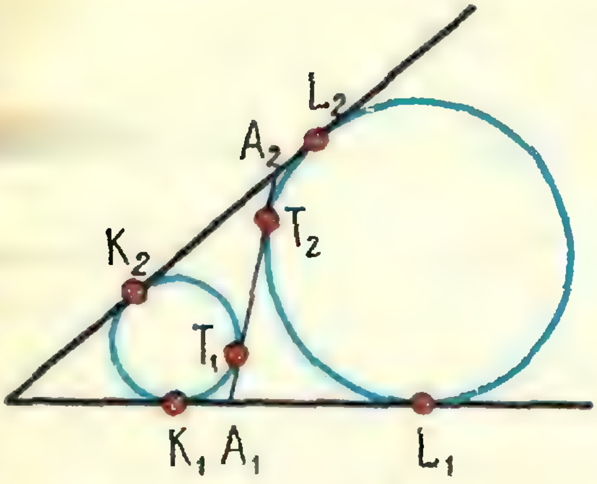


Рис. 2.

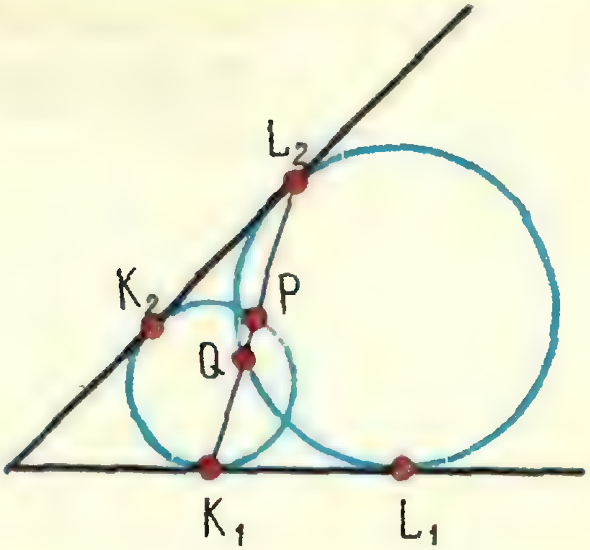


Рис. 3.

M22

а) В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 — точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1T_1 = A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2 = A_2T_1$).

б) В угол вписаны две окружности, одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

а) Можно считать, что точки T_1 и T_2 лежат на прямой A_1A_2 в таком порядке: A_1, T_1, T_2, A_2 (рис. 2). Тогда, поскольку две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, имеем

$$A_1T_1=A_1K_1,\ A_1T_2=A_1L_1,\ A_2T_2=A_2L_2,\ A_2T_1=A_2K_2,\ K_2L_2=K_1L_1,$$

откуда

$$A_1T_1+A_1T_2=A_2T_1+A_2T_2,\ 2A_1T_1+T_1T_2=2A_2T_2+T_1T_2,\ A_1T_1=A_2T_2$$

б) Пусть P — точка пересечения K_1L_2 с окружностью, касающейся сторон угла в точках K_1 и K_2; Q — точка пересечения K_1L_2 со второй окружностью (рис. 3). Воспользуемся тем, что квадрат касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:

$$L_1K_1^2=K_1Q\cdot K_1L_2,\qquad L_2K_2^2=L_2P\cdot L_2K_1.$$

Поскольку $L_1K_1=L_2K_2$, получаем $K_1Q\cdot K_1L_2=L_2P\cdot L_2K_1$, откуда $K_1Q=$ $=L_2P$.

Прибавив к обеим частям этого равенства PQ (или, в зависимости от порядка расположения точек P и Q на отрезке K_1L_2, отняв PQ от обеих частей равенства), получим требуемое: $K_1P=L_2Q$.

Близкое к этому решение прислали *А. Вировлянский* из Горького и *Д. Григорьев.*

M23

Докажите, что при всех натуральных $n>1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Сначала изложим наиболее короткое решение, предложенное выдающимся советским математиком, специалистом по теории чисел *А. О. Гельфондом.*

Перепишем квадрат данного выражения в таком виде:

$$P_n^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\,2n}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Поскольку при любом целом $k>1$

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)\,2k}=\frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1}>1,\quad\text{то}$$

$$P_n^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\ \text{ и }\ P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

С другой стороны, так как всегда

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\frac{(2k)^2-1}{(2k)^2}<1,\ \text{то}$$

$$P_n^2=\frac{3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2n}\ \text{ и}$$

$$P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Несколько иное решение предложил *Д. Григорьев* (такое решение прислали и другие читатели журнала). Рассмотрим вместе с данным выражением

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

следующее:

$$Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}.$$

Поскольку каждый из сомножителей произведения Q_n не больше соответствующего сомножителя P_n, то $P_n>Q_n$ и, следовательно, $P_n^2>P_nQ_n=\frac{1}{4n}$, то есть $P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

С другой стороны,

$$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot1>P_n,$$

поэтому $P_n^2<P_nR_n=\frac{3}{8n}$ и $P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Казалось бы более естественным начать R_n не с 1/2, а с 2/3. Но тогда для P_n получится оценка более грубая, чем требуется в условии задачи. Наоборот, если оставить в R_n не один, а больше сомножителей равными первым сомножителям P_n, то для P_n получится более точная оценка вида $P_n<\frac{c}{\sqrt{n}}$, где c — некоторое число, меньшее $\sqrt{\frac{3}{8}}$. То же замечание относится и к оценке с другой стороны.

Есть также решение, основанное на методе математической индукции. Именно на примере этой задачи в заметке Е. Г. Николаева «Случай с методом математической индукции» (см. «Квант» № 7, 1970, стр. 37 и «Квант» № 12, 1970, стр. 58) рассказывалось о том, что иногда более сильное неравенство доказать по индукции проще, чем более слабое.

Из доказанных неравенств следует, что величина P_n с ростом n стремится к нулю, а величина $P_n\sqrt{n}$ заключена между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Можно доказать (см., например, задачи 145, 160, 161 в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», ГИТТЛ, М., 1954), что при $n\to\infty$ P_n стремится к пределу, равному $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

M24

Докажите, что любую дробь $\frac{m}{n}$, где $0<\frac{m}{n}<1$, можно представить в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\ldots+\frac{1}{q_r},$$

где $0<q_1<q_2<\ldots<q_r$ — целые числа и каждое q_k $(k=2,3,\ldots,r)$ делится на q_{k-1}.

Каждую дробь $\frac{m}{n}$ можно, разделив ее числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель, заменить равной ей **несократимой** дробью. Например, $\frac{288}{504}=\frac{4\cdot 72}{7\cdot 72}=\frac{4}{7}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие несократимые дроби.

Докажем утверждение задачи индукцией по m. Для $m=1$ оно очевидно: сама дробь $\frac{m}{n}$ уже имеет нужный вид. Теперь докажем, что если утверждение задачи верно для всех дробей с числителями, меньшими чем m, то оно верно и для дробей с числителем, равным m. Пусть $\frac{m}{n}$ — такая дробь $(1<m<n)$. Разделим n на m с остатком; получится частное (d_0-1) и остаток $(m-k)$, то есть

$$n=m(d_0-1)+(m-k)=md_0-k, \tag{1}$$

где $d_0>1$ и $0<k<m$. Перепишем (1) так: $md_0=n+k$, или

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}\left(1+\frac{k}{n}\right). \tag{2}$$

Поскольку $0<k<m$, дробь $\frac{k}{n}$ можно представить в нужном виде:

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1d_2}+\ldots+\frac{1}{d_1d_2\ldots d_r}, \tag{3}$$

где $d_1, d_2,\ldots,d_r$ — некоторые натуральные числа, большие 1. Из (2) и (3) получаем

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_0d_1}+\frac{1}{d_0d_1d_2}+\ldots+\frac{1}{d_0d_1d_2\ldots d_r}.$$

Дробь $\frac{m}{n}$ представлена в требуемом виде.

Заметим, что из нашего решения задачи нетрудно извлечь простой алгоритм — правило, как любую данную дробь представить в виде суммы (3). Продемонстрируем его на одном примере. Пусть нам дана дробь $\frac{5}{7}$:

$$7=2\cdot 5-3;\qquad \frac{5}{7}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{7}\right);$$

$$7=3\cdot 3-2;\qquad \frac{3}{7}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{7}\right);$$

$$7=4\cdot 2-1;\qquad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{7}\right).$$

Итак,

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}.$$

Разумеется, могут найтись несколько представлений дроби в виде (3), например:

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}.$$

Решение этой задачи прислал *Д. Григорьев.*

М25

В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Всего в множестве A, состоящем из n элементов, существует 2^n различных подмножеств, считая пустое множество и само множество A (см. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика», «Квант» № 1, 1971). Мы будем обозначать разные подмножества A буквами $B, C, \ldots,$ пересечение множеств B и C, то есть множество, составленное из общих элементов B и C, принято обозначать так: $B \cap C$; дополнение подмножества B до всего множества A, то есть множество, составленное из всех тех элементов A, которые не входят в B, обозначается так: $\overline{B}$.

По условию выбрано 2^{n-1} подмножеств, то есть половина всех возможных, причем каждое из выбранных подмножеств, пересечение любых двух (и даже трех) из них не пусто. Следовательно, из каждой пары подмножеств $(B, \overline{B})$, дополняющих друг друга до A, выбрано в точности одно. Далее, если B и C выбраны, то $D = B \cap C$ тоже выбрано, поскольку $\overline{D}$ не может быть выбрано (все три подмножества $\overline{D}$, B и C не могут иметь общих элементов, ведь общие элементы B и C содержатся в D). Пользуясь этим, очевидной индукцией можно доказать, что если $B_1, B_2, \ldots, B_k$ выбраны, то пересечение всех этих подмножеств $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k$ тоже выбрано. Следовательно, пересечение всех 2^{n-1} выбранных подмножеств тоже принадлежит к числу выбранных, значит, оно не пусто.

Таким образом, мы доказали, что условию задачи удовлетворяет только такая система подмножеств: фиксируется некоторый элемент a множества A и выбираются все подмножества, содержащие этот элемент.

Н. Б. Васильев

Ф29

Найти скорость испарения с единицы поверхности воды в вакуум при температуре 20° С. (Давление насыщенных паров при этой температуре равно 17,5 *мм* рт. ст.) За какое время испарится в комнате вода, налитая доверху в обычное чайное блюдце? Испарение небольшого количества воды практически не меняет в комнате влажность воздуха, равную 70%.

Для того чтобы решить задачу, нужно найти количество молекул жидкости, покидающих 1 *см*^{2} ее поверхности за 1 *сек*. Умножив его на массу молекулы воды, мы сможем узнать скорость испарения, то есть массу воды, испаряющуюся с единицы поверхности воды за 1 *сек*.

Будем рассуждать так. Если бы над жидкостью был насыщенный пар, то число молекул жидкости, покидающих ее в 1 *сек*, было бы таким же, как и в отсутствие пара. При этом, однако, в жидкость попадало бы ровно столько же молекул, сколько вылетало из нее. Это позволяет нам подсчитать, сколько молекул вылетает из воды в 1 *сек*, так как найти число молекул, попадающих в жидкость, довольно просто.

Воспользуемся следующей моделью идеального газа: все молекулы газа имеют одинаковые скорости v, и каждая из молекул может двигаться только в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений вдоль осей координат (рис. 4). Причем число молекул, движущихся в каждом из этих трех направлений, одинаково. Если одна из осей координат перпендикулярна жидкости, то за время τ в жидкость попадут те молекулы пара, которые находятся от нее на расстоянии $l = v\cdot\tau$. Пусть в единице объема находится n молекул пара, тогда на участок поверхности с площадью S попадает $N = \frac{1}{6} nv\tau S$ молекул пара: вдоль оси координат, перпендикулярной поверхности жидкости, движется $\frac{1}{3}$ часть молекул пара, находящихся в объеме $v\tau S$, причем скорость половины из них направлена от жидкости. Если масса молекулы пара m, то за время τ в жидкость попадает масса пара $M = \frac{1}{6} nv\tau Sm$. $n\cdot m$ — это плотность пара ρ. Поэтому

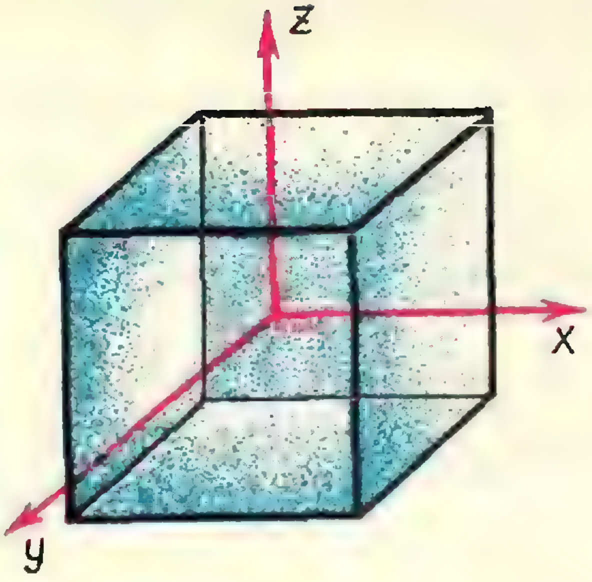


Рис. 4.

$$M = \frac{1}{6} v\tau S\rho. \qquad (*)$$

Скорость молекул пара можно выразить через его давление и плотность. Рассмотрим кубический сосуд с ребром l и гранями, перпендикулярными осям координат (рис. 4). При упругом столкновении молекулы пара со стенкой ее количество движения меняется на $2mv$ — до столкновения импульс молекулы равен mv, а после столкновения — $-mv$: молекула движется от стенки. Так как между двумя последовательными столкновениями молекулы с одной и той же стенкой проходит время $t = \frac{2l}{v}$, то в соответствии со вторым законом Ньютона можно считать, что на молекулу со стороны стенки действует средняя сила $f = \frac{2mv}{\frac{2l}{v}} = \frac{mv^2}{l}$. По третьему закону Ньютона сила такой же величины действует на стенку. Так как вдоль каждой из осей движется $N = \frac{1}{3} nl^3$ молекул, каждая из которых вносит вклад в давление на стенку, то полная сила, действующая на стенку, равна

$$F = \frac{mv^2}{l}\cdot\frac{1}{3} nl^3 = \frac{1}{3} nml^2v^2,$$

а давление пара на стенку равно

$$P = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} nmv^2 = \frac{1}{3}\rho v^2.$$

Поэтому
$$v = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}.$$

Подставляя это выражение для v в формулу (*), получим
$$M = \frac{1}{6}\tau S\rho\sqrt{\frac{3P}{\rho}}.$$

Выразим еще плотность пара через его давление. Они связаны уравнением Клапейрона:
$$P = \frac{\rho}{\mu}RT,$$
где μ — масса одной грамм-молекулы пара, T — его температура, а $R = 8{,}3\,\frac{дж}{град \cdot моль}$ — газовая постоянная.

Из этой формулы найдем, что $\rho = \frac{P\mu}{RT}$. Поэтому $M = \frac{1}{6}\tau S\frac{P\mu}{RT}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Таким образом, если над жидкостью находится насыщенный пар, то на единицу ее поверхности за 1 *сек* попадает масса пара, равная
$$\frac{M}{\tau S} = \frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Это означает, что скорость испарения жидкости в вакуум равна
$$\frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Подставив сюда численные значения $T=293^\circ$ K, $\mu = 18\,\frac{кг}{кмоль}$ и $P = 2{,}3\cdot 10^3\,\frac{н}{м^2}$ (P — давление насыщенного пара при $T=293^\circ$ K), получим, что скорость испарения равна $14{,}8\cdot 10^{-8}\,\frac{кг}{м^2\cdot сек}$.

Мы могли бы решить задачу и более точно, учитывая, что молекулы движутся с разными скоростями и во всевозможных направлениях *). Это, однако, не изменило бы качественный результат, который мы получили. Изменился бы лишь численный множитель в последней формуле.

Теперь нетрудно найти и время, за которое испарится в комнате вода, налитая в чайное блюдце. В этом случае с единицы поверхности жидкости за 1 *сек* вылетают молекулы с общей массой, равной $\frac{1}{6}P_0\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}\left(P_0 = 10^{-6}\,\frac{н}{м^2}\right)$, а в жидкость попадает масса пара, равная $\frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$, где $P = \eta\cdot P_0 = 0{,}7P_0$. Таким образом, скорость испарения жидкости равна
$$\frac{1}{6}(P_0 - P)\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Если площадь поверхности воды S, а ее масса M, то вся вода испарится за время
$$t = \frac{M}{\frac{1}{6}S(P_0 - P)\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}}.$$

---

*) Такой расчет приводится в статье Я. А. Смородинского «Идеальный газ» («Квант» № 10, 1970 г.).

Принимая, что в блюдце входит 100 *г* воды, его диаметр равен 10 *см*, температура воздуха в комнате равна 17° C=290° K (при этой температуре $P_0 = 2{,}3 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}$ и $P = 1{,}6 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}$), найдем $t = 1$ *сек*.

Получился парадоксальный результат. В чем же мы ошиблись? В величине давления пара вблизи поверхности воды. Здесь давление пара значительно больше, чем в комнате. В тонком слое у поверхности пар почти насыщен. Только благодаря этому вода испаряется достаточно медленно.

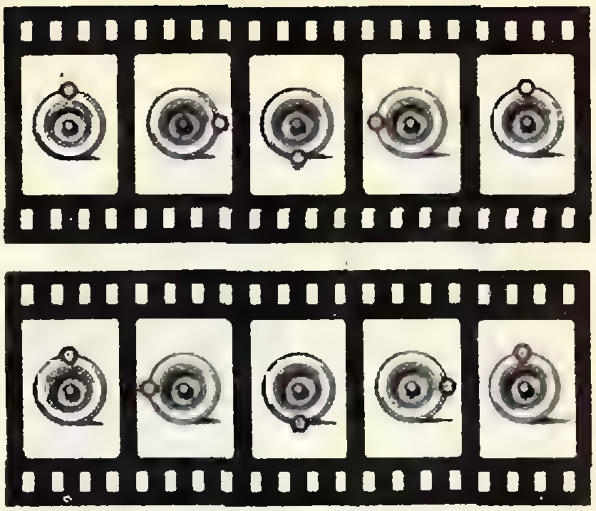


Рис. 5.

Пример, который мы рассмотрели, показывает, как важно при решении физической задачи разобраться в «физике» явления, то есть понять, чем можно и чем нельзя пренебречь.

Ф 30

В киноаппарате и кинопроекторе проходит 8 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 *м*. Изображения колес делают 2 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

Так как изображения колес поворачиваются на 2 оборота за то время, за которое в проекторе проходят 8 кадров, то на каждом кадре колесо должно быть повернуто по сравнению с предыдущим на $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ оборота. Причем изображения колес автомобиля на экране могут вращаться как «вперед», так и «назад», хотя сам автомобиль движется и в первом и во втором случае в одну и ту же сторону (рис. 5). Колеса на экране вращаются «вперед», если скорость движения автомобиля такова, что за время между кадрами $\tau = \frac{1}{8}$ *с* колеса автомобиля делают n полных и еще $\frac{1}{4}$ оборота вокруг своей оси. Если же за τ *с* колеса делают n полных и $\frac{3}{4}$ оборота вокруг оси, то изображения колес на экране будут вращаться «назад». Таким образом, угловая скорость автомобиля равна или $\omega_{вп} = \frac{\left(n + \frac{1}{4}\right) 2\pi}{\frac{1}{8}} \frac{рад}{с} = 16\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \frac{рад}{с}$, или $\omega_н = 16\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi \frac{рад}{с}$. Это означает, что оси колес, а вместе с ними и автомобиль движутся со скоростью $v = 16\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi R \frac{м}{с}$ (тогда изображения колес вращаются «вперед») или со скоростью $u = 16\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi R \frac{м}{с}$ (в этом случае изображения колес вращаются «назад»). Подставляя в эти формулы $n = 1, 2, 3, \ldots$, мы будем получать ответы

$$v_1 \approx 12{,}6 \frac{м}{с} = 45 \frac{км}{час}, \quad v_2 \approx 223 \frac{км}{час}, \quad u_1 \approx 136 \frac{км}{час}, \quad u_2 \approx 316 \frac{км}{час}, \ldots$$

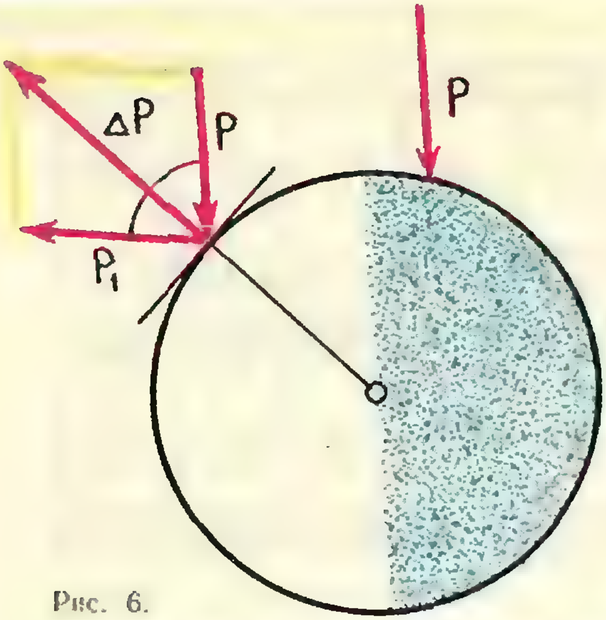


Рис. 6.

При этом, поскольку скорость автомобиля не может быть больше $140\,\frac{км}{час}$, она равна $45\,\frac{км}{час}$, если изображения колес вращаются «вперед», или $136\,\frac{км}{час}$, если колеса на экране вращаются «назад».

Правильное решение прислал *Николай Ильин* (пос. Захал Эхирит-Булагатского района Иркутской области).

Ф 31

Как световое давление ориентирует относительно Солнца космический корабль сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая — черная, полностью поглощающая излучение Солнца? Центр тяжести корабля находится в центре сферы.

Предположим, что корабль ориентирован так, что солнечные лучи попадают как на зеркальные, так и на черные участки его поверхности (рис. 6). Световое давление связано с тем, что фотоны, попадающие на поверхность, изменяют свой импульс. Если свет попадает на зеркальную поверхность, он отражается так, что выполняется закон отражения: угол падения светового луча равен углу отражения. Нетрудно сообразить, что в этом случае импульс фотона меняется на вектор, перпендикулярный участку поверхности корабля, то есть идущий по радиусу. В соответствии со вторым и третьим законами Ньютона (см. предыдущую задачу) на корабль при этом действует сила, равная изменению импульса пучка фотонов в единицу времени. Эта сила направлена вдоль радиуса корабля. Она не создает момента, поворачивающего корабль вокруг его центра.

Иное дело с давлением на зачерненную поверхность корабля. Так как она поглощает излучение Солнца, то сила, действующая на корабль при падении фотона, направлена вдоль пучка. Эта сила создает момент, поворачивающий корабль так, что обращенной к Солнцу оказывается зеркальная поверхность корабля.

Очевидно, что положение корабля, при котором к Солнцу обращена его зачерненная поверхность, тоже будет положением равновесия. Однако это положение равновесия неустойчиво. Если корабль по каким-то случайным причинам немного повернулся относительно Солнца, то он будет разворачиваться до тех пор, пока не повернется к Солнцу зеркальной стороной.

Ф 32

На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения. Какое из двух положений равновесия, показанных на рисунке 7, будет устойчивым? Плотность материала, из которого сделан брусок, равна половине плотности воды.

Система, предоставленная самой себе, всегда занимает такое положение, при котором ее центр масс находится в наинизшем положении. Так как плотность материала бруска равна половине плотности воды, то в воду в обоих случаях погружена половина кубика и центры тяжести кубиков находятся на одинаковой высоте. Иное дело с центром тяжести воды. При погружении бруска мы перемещаем на поверхность ту воду, место которой занимает погруженная часть бруска. В первом случае центр масс вытесненного объема воды находится на расстоянии 0,25 a от ее поверхности, а во втором — на расстоянии, равном $\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}a\sqrt{2} \approx 0{,}23\ a$, где a — ребро бруска. Это означает, что во втором случае изменение потенциальной энергии воды при погружении кубика меньше, чем в первом. Поэтому во втором случае меньше и потенциальная энергия воды. Это означает, что брусок будет плавать в положении II.

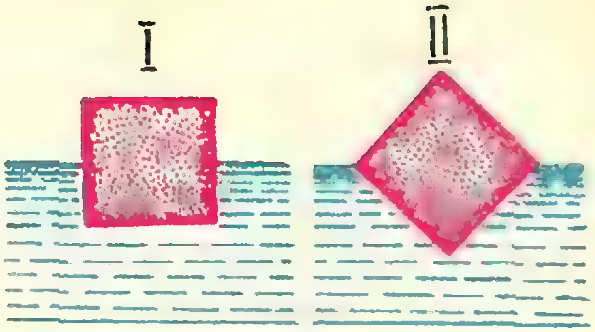


Рис. 7.

Ф 33

По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две бусинки с массами m_1 и m_2. Вначале бусинки были соединены ниткой и между ними находилась сжатая пружинка. Нитку пережигают. После того, как бусинки начинают двигаться, пружинку убирают. В каком месте кольца бусинки столкнутся в одиннадцатый раз? Бусинки сталкиваются абсолютно упруго.

Пружинка сообщает обеим бусинкам одинаковые количества движения, так как действует на них одинаковое время с одинаковой силой:

$$m_1v_1 = m_2v_2 \qquad (1)$$

где v_1 и v_2 — приобретенные бусинками скорости. Поэтому и для путей l_1 и l_2, пройденных бусинками до первого соударения, тоже имеем $m_1l_1 = m_2l_2$. После соударения общее количество движения бусинок по-прежнему должно остаться равным нулю. Поэтому

$$m_1v_1' = m_2v_2'. \qquad (2)$$

Написав закон сохранения энергии

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}, \qquad (3)$$

с помощью (1) и (2) легко находим, что после удара $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$.

Таким образом, в результате соударения скорости бусинок не меняются по величине, а только изменяют свои направления на обратные. Но тогда ясно, что следующее соударение произойдет в том месте, откуда началось движение бусинок, и т. д. Одиннадцатое соударение произойдет в том же месте, где было первое, то есть в той точке, отношение расстояний до которой от начала координат (по дуге окружности) равно отношению масс бусинок.

Ф 34

На рисунке 8 изображена капельная электростатическая машина (генератор Кельвина). Из трубки в полый изолированный металлический шар радиуса R падают капли воды, заряженные до потенциала φ_0. Как зависит предельный потенциал, до которого может зарядиться шар, от высоты падения капель?

Попадая в шар, капли отдают ему свой заряд, распределяющийся равномерно по поверхности шара. При этом возникает электрическое поле, препятствующее падению капель, так как заряды капли и шара одного знака.

Скорость капли у поверхности шара можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. Энергия капли E складывается из кинетической энергии, потенциальной энергии в поле тяжести и электростатической энергии в поле шара.

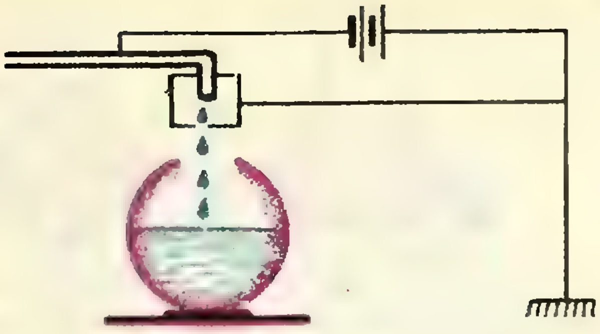


Рис. 8.

Известно, что электрическое поле равномерно заряженной сферы вне ее такое же, как у точечного заряда, равного по величине заряду сферы и расположенного в ее центре. Поэтому потенциальная энергия точечного заряда q в поле равномерно заряженной сферы с зарядом Q равна qQ/d, где d — расстояние заряда до центра сферы.

Энергия капли в начале падения $E_0 = mgh + \frac{qQ}{h-R}$, где h — высота падения капли, отсчитываемая от поверхности стола ($h > 2R$).

У поверхности шара энергия капли

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} + 2Rmg + \frac{qQ}{R}.$$

Приравнивая эти энергии, находим

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-2R) - qQ\,\frac{h-2R}{R(h-R)}.$$

По мере того, как заряд шара Q увеличивается, скорость капли v у его поверхности уменьшается. Очевидно, что шар перестанет заряжаться, когда эта скорость станет равной нулю. Следующие капли уже не смогут попасть в шар. Из этого условия находим предельный заряд шара:

$$Q = \frac{mgR(h-R)}{q}.$$

Воспользовавшись известными формулами электростатики $Q = \varphi R$ и $q = \varphi_0 r$, для предельного потенциала шара получаем

$$\varphi = \frac{mg(h-R)r}{2\varphi_0}.$$

При выводе этой формулы мы предполагали, что шар не переполнится жидкостью до того, как зарядится до найденного предельного потенциала. Однако если, например, капли достаточно большие, то всегда может произойти обратное: шар переполнится, а капли все еще смогут попадать в него. В этом случае предельный потенциал шара тоже легко находится.

Если радиус капли r, а радиус шара R, то шар заполнится при попадании в него $N = (R/r)^3$ капель. При этом заряд шара будет равен $Q = qN$, где $q = r\varphi_0$ — заряд одной капли, а предельный потенциал шара $\varphi' = Q/R = \varphi_0 R^2/r^2$.

Очевидно, что в капельных электростатических машинах шар наполняется полностью, так как при этом получается более высокий предельный потенциал.

Правильное решение прислали *А. Егоров* из Москвы и *Н. Ефимов* из Винницы (УССР).

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ДВЕ ДЮЖИНЫ ЗАДАЧ НА ПРОГРЕССИИ

А. Г. Мордкович

Для успешного решения задач на прогрессии нужно хорошо знать определения арифметической, геометрической и бесконечно убывающей геометрической прогрессий, формулу общего члена для каждой из этих прогрессий, формулы суммы n членов прогрессий, а также определение и формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Кроме того, очень часто в задачах на прогрессии приходится использовать так называемые характеристические свойства прогрессий. Опыт вступительных экзаменов показывает, что если с формулами n-х членов и суммы n членов прогрессий дело обстоит сравнительно неплохо, то этого нельзя сказать о характеристических свойствах. Поэтому прежде всего мы остановимся на этих свойствах.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Последовательность a_1, a_2, ..., a_n,... является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому своих соседних.

Доказательство. Дана последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ... Пусть она является арифметической прогрессией. Докажем, что $a_{k+1}=\frac{a_k+a_{k+2}}{2}$ ($k=1, 2, 3,\ldots$).

В самом деле, $a_{k+1}-a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$, откуда $a_{k+1}=\frac{a_k+a_{k+2}}{2}$.

Пусть теперь $a_{k+1}=\frac{a_k+a_{k+2}}{2}$. Тогда $a_{k+1}-a_k=a_{k+2}-a_{k+1}$, то есть разность между последующим и предыдущим членами последовательности постоянна для данной последовательности, а это и означает, что a_1, a_2, ..., a_n, ... — арифметическая прогрессия.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии

Последовательность b_1, b_2, ..., b_n, ... является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности) равен произведению своих соседних (то есть $b^2_{k+1}=b_k\cdot b_{k+2}$).

Доказательство. Пусть последовательность b_1, b_2, ..., b_n, ... является геометрической прогрессией. Тогда $\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$, откуда $b^2_{k+1}=b_k\cdot b_{k+2}$, что и требовалось доказать.

Пусть, наоборот, $b^2_{k+1}=b_k\cdot b_{k+2}$. Тогда $\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$, то есть отношение последующего члена последовательности к предыдущему постоянно для данной последовательности, а это и означает, что b_1, b_2, ..., b_n,... — геометрическая прогрессия.

В настоящей статье читатель найдет 24 задачи, при решении которых используются все свойства прогрессий. Половина задач приведена с решениями, половина оставлена читателю для самостоятельной работы. Всюду в статье приняты следующие обозначения (если не сделано никаких оговорок): $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия, d — разность прогрессии; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, q — знаменатель прогрессии; S_n — сумма n членов прогрессии; n, k, m, p — натуральные числа.

Арифметическая прогрессия

Задача 1. Доказать, что $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

Решение. $\frac{1}{a_1a_2}=\frac{d}{a_1a_2d}=\frac{1}{d}\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$. Аналогично

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right),\quad \ldots,\quad \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+$$

$$+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\ldots+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{1}{d}\frac{a_1+dn-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Задача 2. Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ обладает тем свойством, что сумма S_n первых ее n членов равна $2n^2+3n$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, заключаем, что нам достаточно доказать следующее соотношение: $2u_{k+1}=u_k+u_{k+2}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$

Замечаем, что $u_{k+1}=S_{k+1}-S_k$. В самом деле, $S_{k+1}-S_k=(u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1})-(u_1+u_2+\ldots+u_k)=u_{k+1}$. Значит,

$$u_{k+1}=[2(k+1)^2+3(k+1)]-(2k^2+3k)=4k+5.$$

Аналогично $u_k=S_k-S_{k-1}$ (в частности, полагаем $S_0=0$), откуда $u_k=(2k^2+3k)-[2(k-1)^2+3(k-1)]=4k+1$ и, наконец, $u_{k+2}=S_{k+2}-S_{k+1}=4k+9$. Поскольку для чисел $u_k=4k+1$, $u_{k+1}=4k+5$, $u_{k+2}=4k+9$ соотношение $2u_{k+1}=u_k+u_{k+2}$ выполняется, то доказательство того, что $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия, закончено.

Задача 3. Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо соотношение $\frac{S_n}{n}(m-p)+\frac{S_m}{m}(p-n)+\frac{S_p}{p}(n-m)=0$.

Решение. Использовав для S_n известную формулу $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ и аналогичные формулы для S_m и S_p, приведем левую часть доказываемого равенства к виду

$$\frac{a_1+a_n}{2}(m-p)+\frac{a_1+a_m}{2}(p-n)+\frac{a_1+a_p}{2}(n-m).$$

Применив к a_n формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d\,(n-1)$ и сделав то же самое для a_m, a_p, получим

$$\frac{1}{2}\{[2a_1 + d\,(n-1)]\,(m-p) + [2a_1 + d\,(m-1)]\,(p-n) + [2a_1 + d\,(p-1)]\,(n-m)\}$$

и далее

$$\frac{1}{2}\{2a_1\,[(m-p)+(p-n)+(n-m)] + d\,[(n-1)\,(m-p) + (m-1)\,(p-n) + (p-1)\,(n-m)]\}.$$

Поскольку суммы в обеих квадратных скобках равны 0, то и все выражение равно 0, что и требовалось доказать.

Задача 4. Найти трехзначное число, которое делится на 45 и цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков и z — цифра единиц искомого числа. Так как по условию x, y, z — арифметическая прогрессия, то

$$2y = x + z. \tag{1}$$

Искомое число имеет вид $100\,x + 10y + z$. Так как по условию оно делится на 45, то

$$100x + 10y + z = 45p. \tag{2}$$

Итак, искомое число определяется условиями (1) и (2).

Для цифры единиц имеются две возможности: либо $z=0$, либо $z=5$ (это вытекает из делимости искомого числа на 5). Рассмотрим случай $z=0$. Тогда из (1) получаем $x=2y$, а из (2) — $100x + 10y = 45p$, или $20x + 2y = 9p$, $20x + x = 9p$ или $7x = 3p$. Это означает, что x делится на 3. Так как, кроме того, x — число четное ($x = 2y$), то заключаем, что для x имеется единственная возможность: $x=6$. Тогда $y=3$, а искомое число равно 630.

Рассмотрим теперь второй случай: $z=5$. В этом случае условия (1) и (2) принимают соответственно следующий вид:

$$2y = x + 5;\ 100x + 10y + 5 = 45p.$$

Последнее равенство преобразуем к виду $20x + 2y + 1 = 9p$ и далее, с учетом равенства $2y = x + 5$, получаем $21x + 6 = 9p$, или $7x + 2 = 3p$. Последнее равенство возможно при $x = 1, 4, 7$. Но поскольку $x + 5$ — четное число ($x + 5 = 2y$), то для x остаются лишь две возможности: $x = 1$, $x = 7$. В первом случае $y=3$, во втором случае $y=6$. Искомое число соответственно в первом случае равно 135, во втором 765. Итак, условию задачи удовлетворяют три числа: 135, 630, 765.

Геометрическая прогрессия

Задача 5. Вычислить сумму $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ цифр}}$.

Решение. $2+22+222+\ldots+222\ldots2 = 2[1+(1+10)+(1+10+10^2)+\ldots+(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})] = 2[S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n]$, где S_k — сумма k членов геометрической прогрессии 1, 10, 10^2, 10^3, … ($k = 1, 2, \ldots, n$). Применив формулу $S_k = \frac{b_1\,(q^k-1)}{q-1}$ суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)=2\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)=\frac{2}{9}[10(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})-n]=$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]=\frac{2(10^{n+1}-10-9n)}{81}.$$

Задача 6. Доказать, что последовательность u_1, u_2, u_3, где

$$u_1=9,\qquad u_2=3^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}x},\qquad u_3=\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x},$$

является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда

$$x=\pi l,\ \ x=\frac{\pi}{12}+\pi l,\ \ x=\frac{5\pi}{12}+\pi l\ \ (l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Решение. На основании характеристического свойства геометрической прогрессии заключаем, что задача сводится к решению уравнения

$$9^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}x}=9\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x} \tag{3}$$

Выполним последовательные преобразования этого уравнения:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}x=1-\cos 2x,$$

$$\operatorname{tg}x=4\sin^2 x,\qquad \sin x\,(2\sin 2x-1)=0\qquad (\cos x\neq 0).$$

Таким образом, должно выполняться одно из двух уравнений:

$$\sin x=0,\ \ \sin 2x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi l,\ x=\frac{\pi}{12}+\pi l,\ \ x=\frac{5\pi}{12}+\pi l.$$

Полученные серии и только они удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, при полученных значениях x и только при них u_1, u_2, u_3 — геометрическая прогрессия.

Задача 7. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

Решение. Предположим, что заданные числа являются членами геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q. Тогда $10=b_1q^n$, $11=b_1q^m$, $12=b_1q^p$. Из этих соотношений получаем

$$\frac{11}{10}=q^{m-n},\ \frac{12}{10}=q^{p-n}$$

и далее

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{p-n}=\left(\frac{12}{10}\right)^{m-n},$$

$$\frac{11^{p-n}}{12^{m-n}}=10^{p-m}.$$

Последнее равенство не может выполняться ни при каких попарно различных натуральных n, m, p. Это значит, что числа 10, 11, 12 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

Задача 8. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение. Используя формулу $S=\frac{b_1}{1-q}$ суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим $\frac{b_1}{1-q}=9$. Рассмотрим последовательность $b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2, \ldots$ Замечаем, что это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Тогда сумма членов этой прогрессии определяется формулой $\frac{b_1^2}{1-q^2}$ и равна 40,5.

В итоге задача сводится к решению системы

$$\frac{b_1}{1-q}=9, \quad \frac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5.$$

Из этой системы получаем: $b_1=6$, $q=\frac{1}{3}$.

Смешанные задачи на прогрессии

Задача 9. Найти четыре числа, если известно, что первые три из них образуют геометрическую прогрессию, последние три — арифметическую прогрессию, сумма крайних чисел равна 21, сумма средних — 18.

Решение. Пусть a, b, c, d — искомые числа; a, b, c — геометрическая прогрессия, значит, $b^2=ac$; b, c, d — арифметическая прогрессия, значит, $2c=b+d$. В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ 2c=b+d, \\ a+d=21, \\ b+c=18. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a=3$, $b=6$, $c=12$, $d=18$ или

$$a=\frac{75}{4}, \quad b=\frac{45}{4}, \quad c=\frac{27}{4}, \quad d=\frac{9}{4}.$$

Задача 10. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Если затем третье число увеличить на 9, то вновь получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение. Условия задачи перепишем следующим образом:
b_1, b_2, b_3 — геометрическая прогрессия;
b_1, b_2+2, b_3 — арифметическая прогрессия;
b_1, b_2+2, b_3+9 — геометрическая прогрессия.
Использовав характеристические свойства прогрессий, получим

$$\begin{cases} 2(b_2+2)=b_1+b_3, \\ (b_2+2)^2=b_1(b_3+9). \end{cases}$$

Если теперь выразить b_2 и b_3 через b_1 и q, то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2(b_1q+2)=b_1+b_1q^2, \\ (b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+9), \end{cases}$$

решив которую, найдем b_1 и q: $\begin{cases} b_1=4, \\ q=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1=\frac{4}{25}, \\ q=-4. \end{cases}$

Ответ: 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

Задача 11. При каких значениях x и y последовательность u_1, u_2, u_3, где $u_1=8^{x+\log_2 y}$, $u_2=2^{x-\log_2 y}$, $u_3=5y$, является одновременно арифметической и геометрической прогрессиями?

Решение. Должны выполняться одновременно два условия:

$$2u_2=u_1+u_3 \text{ и } u_2^2=u_1u_3,$$

откуда $(u_1+u_3)^2=4u_1u_3$, $(u_1-u_3)^2=0$, $u_1=u_3$, поэтому $u_1=u_2=u_3$. Итак, мы должны решить систему уравнений

$$8^{x+\log_2 y}=2^{x-\log_2 y}=5y.$$

Из первого уравнения $3x+3\log_2 y=x-\log_2 y$, $x=-2\log_2 y$. Теперь из второго уравнения $2^{-3\log_2 y}=5y$, $y^{-3}=5y$,

откуда $y=5^{-\frac{1}{4}}$, $x=\frac{1}{2}\log_2 5$.

Задача 12. Найти углы α, β, γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решение. Из условия вытекает, что $\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma$. Выполним некоторые преобразования этого равенства:

$$\frac{2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\gamma},$$

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha)}{\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha)}.$$

Но по условию α, β, γ — арифметическая прогрессия с разностью $\frac{\pi}{12}$; это означает, что $\gamma+\alpha=2\beta$ и что $\gamma-\alpha=\frac{\pi}{6}$. Тогда наше равенство можно переписать так:

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2\beta}.$$

Отсюда следует, что $\cos 2\beta=0$, то есть $\beta=\frac{\pi}{4}$. Окончательно получаем ответ: $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Упражнения

1. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда образуют арифметическую прогрессию числа a^2, b^2, c^2.

2. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы последовательность

u_1, u_2, u_3, где $u_1 = \cos^4\frac{x}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$, $u_3 = -\sin^4\frac{x}{2}$, представляла собой арифметическую прогрессию.

3. Пусть в арифметической прогрессии $S_n = n^2p$, $S_k = k^2p$. Доказать, что $S_p = p^3$.

4. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

5. Четыре числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{u}=\dfrac{u}{s}=\dfrac{s}{t}, \\ x=8u, \\ x+y+z+u+s+t=15\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

7. Доказать равенство

$$(\underbrace{66\ldots6}_{n\ \text{цифр}})^2+\underbrace{88\ldots8}_{n\ \text{цифр}}=\underbrace{44\ldots4}_{2n\ \text{цифр}}.$$

8. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-3x+A=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+B=0$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является возрастающей геометрической прогрессией. Найти A и B.

9. Решить уравнение $2x+1+x^2-x^3+x^4-\ldots=\frac{13}{6}$, если $|x|<1$.

10. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти десятый член прогрессии.

11. Найти трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, — арифметическую.

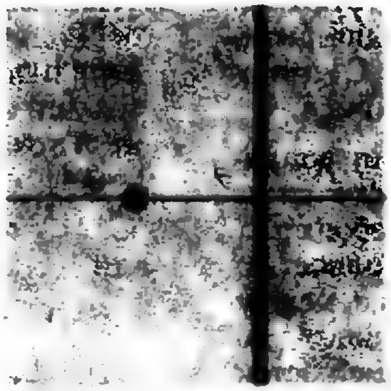
12. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если их уменьшить соответственно на 2, 1, 7, 27, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

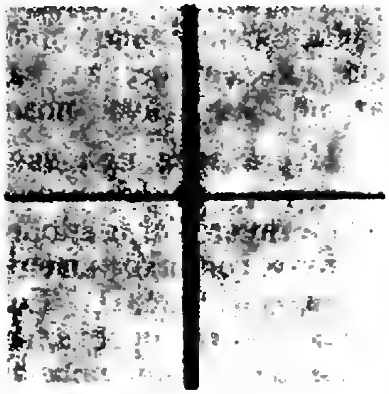
ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ?

1. Какие из следующих формул верны, а какие нет?
а) $1>1$; б) $1\geqslant 1$;
в) $1\leqslant 1$; г) $2>1$;
д) $2\geqslant 1$; е) $-2\leqslant -1$.

2. Учитель задал ученику вопрос: «В каких случаях, проводя перпендикуляр к прямой, проходящий через данную точку, мы говорим, что опускаем перпендикуляр на прямую, а когда, что восставляем перпендикуляр к прямой?»

Ученик ответил: «Если точка находится над прямой или на прямой и мы ведем перпендикуляр вниз, то мы опускаем перпендикуляр, а если точка под прямой или мы ведем перпендикуляр вверх, то мы его восставляем».





Незамедлительно последовал вопрос: «А если точка сбоку от прямой или прямая вертикальна?»

Помогите ученику, ответьте на вопрос: на этих рисунках мы восставляем перпендикуляр или опускаем?

А. Н. Виленкин

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

КИНЕМАТИКА И СВЯЗИ

С. А. Беляев

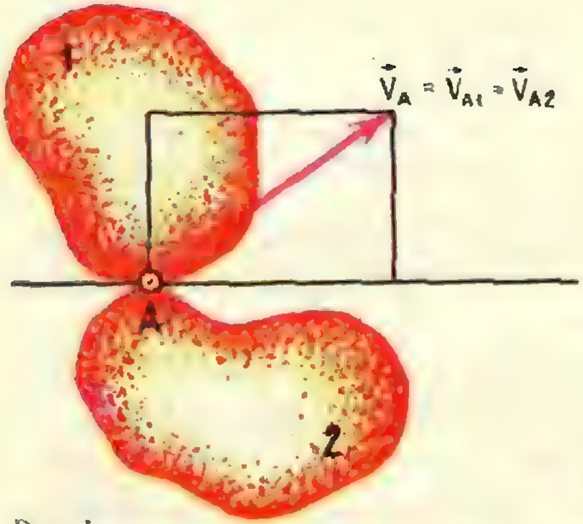


Рис. 1.

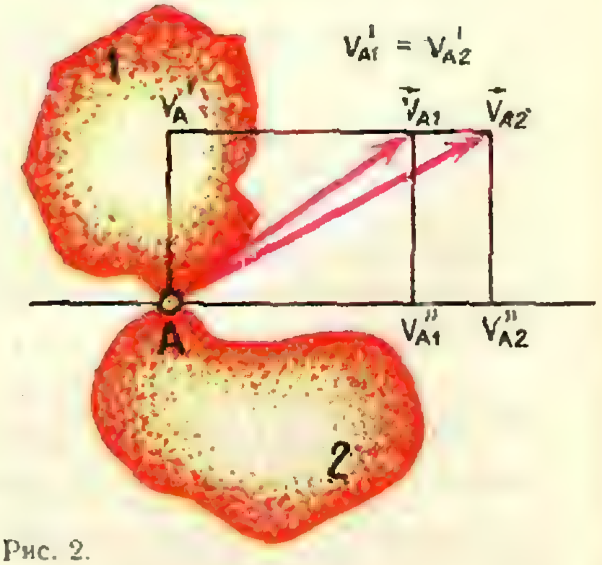


Рис. 2.

Кинематика часто рассматривает движение абсолютно твердых тел, то есть тел, расстояния между любыми двумя точками которых остаются постоянными. При этом существуют методы, значительно упрощающие решение кинематических задач. С одним из них мы сейчас познакомимся.

Пусть тела при движении соприкасаются, и скольжение между ними отсутствует. Тогда скорости обоих тел в точке соприкосновения полностью совпадают (рис. 1). Если же между телами есть проскальзывание, то совпадают лишь проекции скоростей на перпендикуляр к касательной в точке соприкосновения. При этом достаточно, чтобы касательная существовала хотя бы для одной из скользящих поверхностей (рис. 2).

Рассмотрим несколько примеров.

1. Стержень OA вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω, приводя в движение кирпич $ABCD$ с боковой стороной a (рис. 3). Найти зависимость скорости кирпича v от угла α.

Решение. Стержень и кирпич соприкасаются в точке A. Следовательно, скорости кирпича и стержня в этой точке в направлении MN ($MN \perp OA$) совпадают. Таким образом,

$$v\cos(90^\circ - \alpha) = \omega \cdot OA,$$

или

$$v = \frac{\omega}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega a \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

2. Источник света S находится на расстоянии l от экрана MN (рис. 4). В начальный момент времени плоский предмет высоты h начинает равномерно двигаться со скоростью v от источника к экрану. Найти зависимость скорости движения края тени по экрану от времени.

Решение. В данной задаче в роли стержня выступает луч SB. В точке A луч «соприкасается» с предметом, а в точке B — с экраном, образуя границу тени. Составим два уравнения, связывающих проекции скоростей в точках A и B: $\omega \cdot SA = v \cos(\pi - \alpha)$ — проекция на LK, $\omega \cdot SB = u \cos\alpha$ — проекция на MN. Здесь ω — угловая скорость вращения луча. Разделив второе равенство на первое и учитывая, что

$$\frac{SB}{SA} = \frac{l}{SL} = \frac{l}{vt} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{SC} = \frac{h}{vt},$$

получим

$$u = \frac{lh}{vt^2}.$$

Пусть теперь стержень AB заданной длины l (рис. 5) движется произвольно. Скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ его концов могут быть различны, но, так как длина стержня не меняется, проекции этих скоростей v''_A и v''_B должны быть равны: $v''_A = v''_B$. Проекции скоростей v'_A и v'_B определяют круговое движение стержня с угловой скоростью $\frac{v'_B - v'_A}{l}$ (проверьте это самостоятельно).

Решим две задачи.

3. Стержень AB опирается своими концами о стороны тупого угла β (рис. 6). Верхний конец стержня тянут со скоростью v вдоль стороны AO. Найти зависимость скорости u точки B от угла α.

Решение. Так как длина стержня AB неизменна, проекции скоростей его концов на направление стержня одинаковы:

$$u \cos\alpha = v \cos(\pi - \alpha - \beta),$$

или

$$u = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} v.$$

Рассмотрим случай, когда длина стержня изменяется во время движения («стержнем» может служить, например, отрезок, соединяющий две заданные точки, расстояние между которыми меняется). Тогда

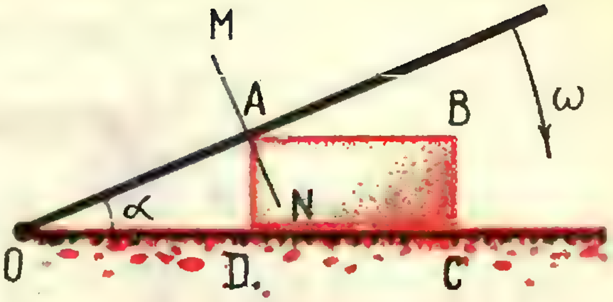


Рис. 3.

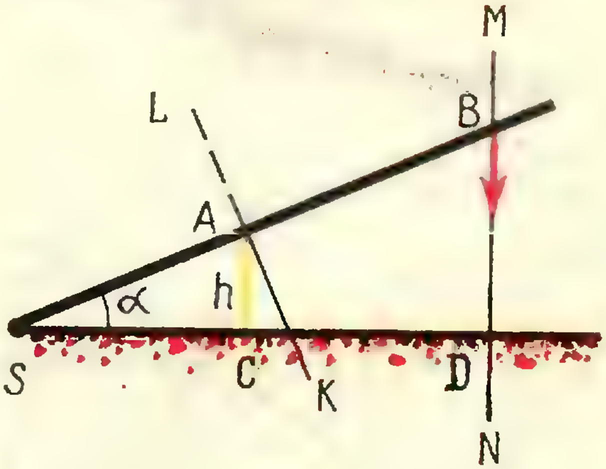


Рис. 4.

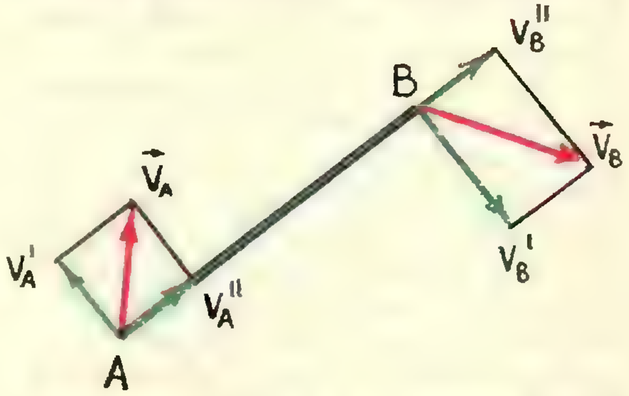


Рис. 5.

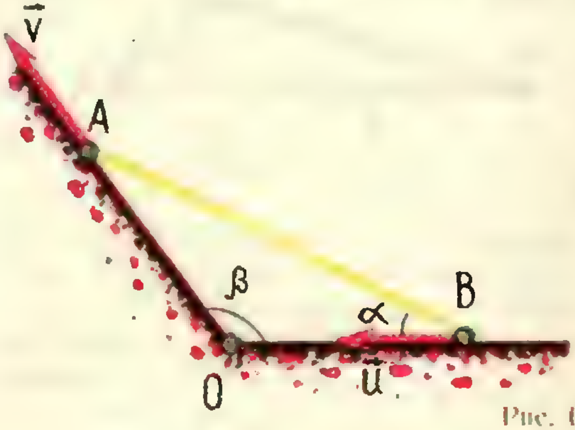


Рис. 6.

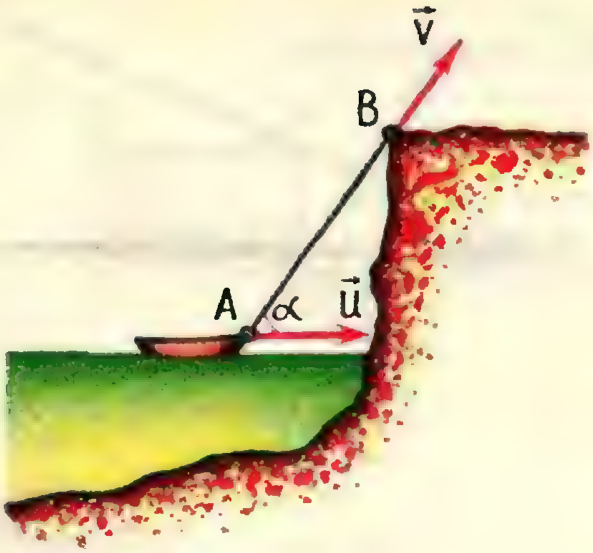


Рис. 7.

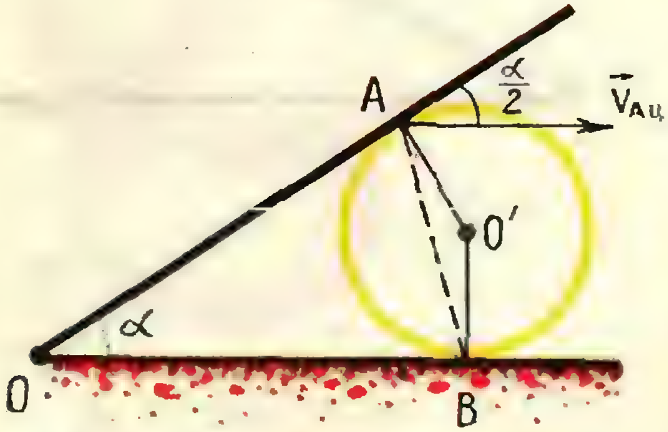


Рис. 8.

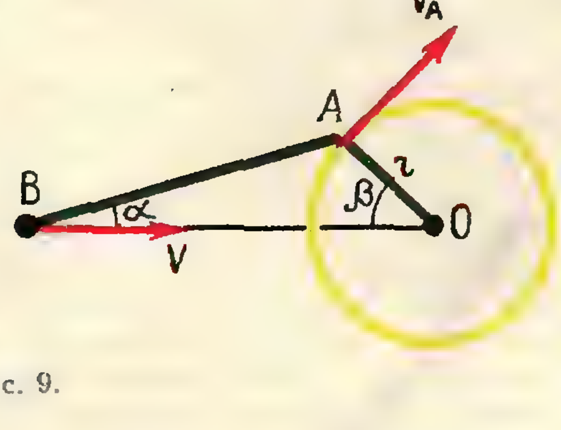


Рис. 9.

соотношение, связывающее проекции скоростей концов стержня, принимает вид

$$|v'_A - v'_B| = u,$$

где u — скорость изменения длины стержня. (Модуль здесь нужен, так как неизвестно, какая из скоростей больше.)

4. Лодку с крутого берега тянут за веревку с постоянной скоростью v. Найти зависимость скорости лодки u от угла α.

Решение. В данном случае нас интересует часть веревки AB. Скорость ее сокращения равна v. Векторы скоростей *концов веревки* A и B показаны на рисунке 7. Согласно утверждению, приведенному выше, имеем

$$v_A \cos\alpha = v_B,$$

или так как $v_A = u$, $v_B = v$,

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

Попробуйте самостоятельно решить подобные задачи.

1. Стержень OA вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω, *приводя в движение цилиндр радиуса* r (рис. 8). Скольжения между цилиндром и плоскостью нет. Найти зависимость скорости цилиндра v от угла α.

2. Кривошип AO длины r (рис. 9) вращается с угловой скоростью ω, длина шатуна AB равна l. Найти скорость v точки B шатуна, если $\angle ABO = \alpha$.

3. Шарик, предварительно раскрутив вокруг оси, кладут на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения шарика о поверхность отличен от нуля. Под действием силы трения шарик изменяет свое первоначальное вращательное движение *и начинает каким-то образом* двигаться по поверхности. Описать, как будет происходить это движение.

Практикум абитуриента

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

В. В. Рыжков

В Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы наряду с учащимися, приезжающими из стран Азии, Африки и Латинской Америки, принимаются также советские граждане. Так как в Университете есть разные факультеты, то, естественно, и характер требований по математике на этих факультетах различен. Вполне понятно, что к будущим физикам и математикам предъявляются более высокие требования, чем к инженерам, экономистам или химикам. Мы расскажем здесь о вступительных экзаменах 1970 года по математике для специальностей «физика» и «математика».

Вот вариант письменной работы по математике (вариант сборный, фактически составленный из задач разных вариантов).

Вариант 0

1. Найти все комплексные значения z, при которых $z^2 + (1 + i)z$ принимает чисто мнимые значения. Показать соответствующее геометрическое место точек, пользуясь изображением комплексных чисел на плоскости.

2. Известно, что неравенство $\log_a (x^2 - 3x) > \log_a (4x - x^2)$ удовлетворяется при $x = 3\frac{3}{4}$. Решить неравенство.

3. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен утроенному двугранному углу при ее основании. Найти объем пирамиды, если ее высота равна H.

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} px + \operatorname{tg} qx = \operatorname{tg} (p + q) x$$

(p и q — известные действительные числа). При каких значениях p и q оно обращается в тождество?

5. Три самосвала разной грузоподъемности заняты на вывозке грунта. Грунт будет полностью вывезен, если все они совершат по 8 рейсов. Грунт также будет вывезен, если первый самосвал совершит 4 рейса, второй — 2, третий — 16. Если первый и третий самосвалы совершат соответственно 6 и 12 рейсов, то сколько рейсов придется сделать второму самосвалу?

При первом же взгляде ясно, что технически громоздкой, «классической» задачей конкурсного типа является лишь третья из приведенных здесь. Первая задача очень проста, но не стандартна по содержанию. Остальные требуют весьма небольших вычислительных затрат при разумном подходе к их решению. В каждой из них есть, однако, какой-нибудь непривычный момент, требующий элементов самостоятельного подхода.

Рассмотрим решения этих задач.

1. Задача имеет простое, довольно естественное решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $z = x + iy$; тогда

$$z^2 + (1 + i)z = (x + iy)^2 + (1 + i)(x + iy) = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + ix - y = x^2 - y^2 + x - y + i(2xy + x + y).$$

Для того чтобы это число было чисто мнимым, необходимо и достаточно, чтобы его действительная часть равнялась нулю (разумеется, нуль также относится к чисто мнимым числам). Имеем:

$$x^2 - y^2 + x - y = 0.$$

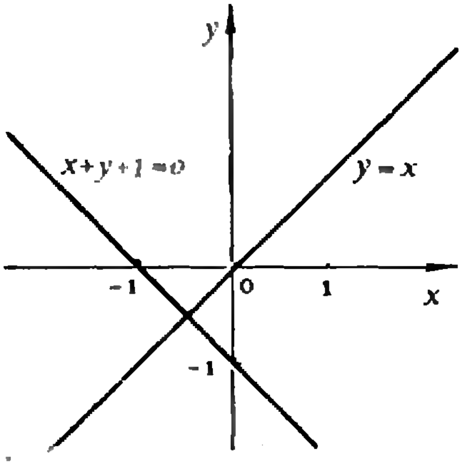


Рис. 1.

Переписываем это равенство в виде

$$(x-y)\quad(x+y+1)=0$$

и находим, что искомое геометрическое место состоит из двух прямых линий: $x-y=0$, $x+y+1=0$, показанных на рисунке 1. Если мы хотим выразить ответ алгебраически, то запишем уравнения этих прямых в виде $y=x$ и $y=-x-1$. Тогда искомые значения z будут задаваться двумя равенствами: $z=(1+i)\ x$ или $z=x-(x+1)\ i$.

Вместо этого логичного и почти не требующего вычислений решения абитуриенты — из числа тех, кто вообще пытался решить этот пример,— предлагали такой путь. Положим $z^2+(1+i)\ z=bi$; здесь справа bi — чисто мнимое число. Теперь решаем квадратное уравнение:

$$z=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{2i+4bi}}{2}.$$

В каком-то смысле решение дано, но дальше следует преобразовать правую часть равенства, что связано с извлечением квадратного корня из мнимого числа; с этим решающие не справились, но, как мы видели, при более удачном подходе к задаче этого и не требовалось.

2. Пример очень прост, но надо прочитать условие внимательно и немного подумать. Дано условие: неравенство выполнено при $x=3\frac{3}{4}$; для чего оно дано? Подставим $x=3\frac{3}{4}$ в неравенство, получим

$$\log_a\frac{45}{16}>\log_a\frac{15}{16}.$$

Отсюда вывод: $a>1$. В этом весь смысл данного условия, оно позволяет сразу установить, что $a>1$. Теперь мы приходим к неравенству $x^2-3x>4x-x^2$; к нему надо присоединить неравенство, характеризующее ОДЗ: $4x-x^2>0$. Заметим, что писать еще и неравенство $x^2-3x>0$ незачем, так как оно уже заведомо выполняется в силу написанных двух неравенств. Итак, получается система двух неравенств

$$2x^2-7x>0,\qquad 4x-x^2>0.$$

Первое из них выполняется при $x<0$ и $x>3\frac{1}{2}$, второе — при $0<x<4$; решением служит интервал

$$3\frac{1}{2}<x<4.$$

Эта задача, в общем, совершенно стандартная, дополнительное условие в ней при правильном понимании не усложняет, а упрощает задачу. Многие абитуриенты решили пример до конца, но в большинстве случаев очень его запутали, а некоторые так и утонули в вычислениях. Именно, игнорируя данное в задаче условие о значении $x=3\frac{3}{4}$, они рассуждали «по стандарту»: либо $a<1$, либо $a>1$. Потом писали полностью условия, определяющие ОДЗ, и получали две системы неравенств:

$$\begin{cases}x^2-3x>0,\\ 4x-x^2>0,\\ x^2-3x<4x-x^2\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}x^2-3x>0,\\ 4x-x^2>0,\\ x^2-3x>4x-x^2.\end{cases}$$

Вместо одной системы из двух неравенств, приходилось решать две системы из трех неравенств каждая и лишь потом учитывать дополни-

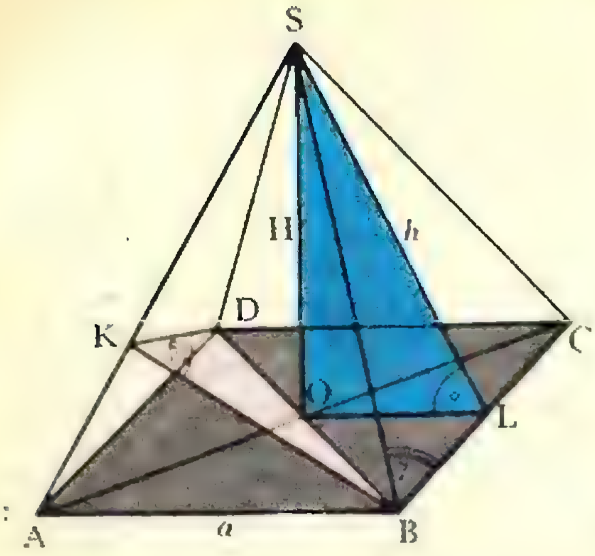


Рис. 2.

тельное условие. Тут уже можно и заблудиться.

3. Задача по стереометрии — стандартная, но довольно сложная. Дело не только в том, что задачи на двугранные углы поступающие не всегда умеют хорошо решать, но и в том, что в условии не дана ни одна угловая величина, а лишь соотношение между двумя такими величинами. Вообще правильная четырехугольная пирамида определяется одним линейным и одним угловым размерами. Линейный размер дан — это высота пирамиды, а вместо углового размера указано соотношение между двумя углами.

Многие абитуриенты решили эту задачу. Впрочем, некоторые из них совершенно не разобрались в существе задачи. Обозначив один из двугранных углов через α, а другой через 3α, они спокойно выражали объем через угол α, не задумываясь о том, что этот угол определяется условиями задачи.

Вот одно из возможных решений задачи. На рисунке 2 через α обозначен двугранный угол при ребре основания, через β — двугранный угол при боковом ребре пирамиды, так что BK и DK являются высотами боковых граней пирамиды, проведенными из вершин основания. По условию $\beta = 3\alpha$. Для удобства введем еще обозначение γ для плоского угла при основании пирамиды, через a обозначим сторону основания, а через h — высоту боковой грани, то есть апофему пирамиды.

Сразу находится соотношение между углами α и γ: из треугольника SOL имеем $\frac{a}{2h} = \cos\alpha$; то же самое отношение в треугольнике SLB выражается так: $\frac{a}{2h} = \operatorname{ctg}\gamma$.

Таким образом, $\operatorname{ctg}\gamma = \cos\alpha$. Так как при рассмотрении треугольника ABK нам потребуется $\sin\gamma$, то выразим этот синус через функции угла α:

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

Теперь из треугольника ABK имеем $BK = a\sin\gamma$ и из треугольника BKD $BK = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}$, откуда $\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sin\gamma}$ или $\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{1+\cos^2\alpha}$.

Отсюда $2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1+\cos^2\alpha$ или $1-2\sin^2\frac{\beta}{2} = -\cos^2\alpha$, то есть окончательно

$$\cos\beta = -\cos^2\alpha.$$

Такое интересное соотношение имеет место в каждой правильной четырехугольной пирамиде. В нашей задаче $\beta = 3\alpha$, и потому для отыскания угла α получается уравнение

$$\cos 3\alpha = -\cos^2\alpha.$$

Оно решается стандартным приемом. *Выразив* $\cos 3\alpha$ *через функции угла* α

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

получим

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\cos^2\alpha.$$

Полагая для краткости $\cos\alpha = u$, приходим к такому уравнению:

$$4u^3 + u^2 - 3u = 0.$$

Корень $u_1 = 0$ не имеет смысла в нашей задаче; остается квадратное уравнение

$$4u^2 + u - 3 = 0$$

с корнями $u_2 = -1$ и $u_3 = \frac{3}{4}$, из которых нас интересует только последний. Итак, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; удобно найти также $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Теперь остается выразить объем пирамиды; находим $\frac{a}{2} = H\operatorname{ctg}\alpha$ или $a = \frac{6H}{\sqrt{7}}$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}Ha^2 = \frac{12}{7}H^3.$$

4. Уравнение решается совсем просто:

$$\operatorname{tg}(p+q)x = \frac{\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx}{1 - \operatorname{tg}px\operatorname{tg}qx}.$$

Отсюда видно, что либо $\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx = 0$, либо $\operatorname{tg}px\cdot\operatorname{tg}qx = 0$. Таким образом, уравнение удовлетворяется в каждом из трех случаев: а) $\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx = 0$, что равносильно $\sin(p+q)x = 0$; б) $\operatorname{tg}px = 0$; в) $\operatorname{tg}qx = 0$. Поэтому оно обращается в тождество, если $p + q = 0$, или $p = 0$, или $q = 0$; если же ни одно из этих трех равенств не выполняется, то уравнению удовлетворяют три серии решений:

$$x = \frac{k\pi}{p+q}, \quad x = \frac{k\pi}{p}, \quad x = \frac{k\pi}{q}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При обстоятельном решении задачи следовало бы еще выяснить, не могут ли некоторые из указанных решений оказаться вне ОДЗ. Заметим, что лишь немногие из решающих задачу четко указали все три случая обращения уравнения в тождество.

5. Задачу решили многие, но часто громоздким или нелогичным путем. Пусть каждый самосвал вывозит за один рейс $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ часть всего грунта соответственно. Примем общее количество грунта за единицу. Тогда условие задачи перепишется в виде системы

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 1, \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{16}{z} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{p}{y} + \frac{12}{z} = 1. \end{cases}$$

Здесь неизвестно число рейсов второго самосвала p; неизвестны и x, y, z, которые, однако, нам определять не требуется. При известной математической наблюдательности можно догадаться сложить два первых равенства почленно и разделить обе части полученного уравнения на 2. Приходим к равенству

$$\frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{12}{z} = 1,$$

из сравнения которого с третьим уравнением нашей системы найдем искомое число рейсов, равное пяти: $p = 5$.

Анализ работ абитуриентов показывает, что уровень техники у разных поступавших был, конечно, различным. Но зло состоит не столько в недостатке техники у части поступавших, сколько в том, что и многие подготовленные в формальном отношении абитуриенты приучены к стандарту, не вдумываются в смысл условия задачи. Малейшее отклонение этих условий от привычных, пусть даже в сторону упрощения, приводит к растерянности и, как следствие, к ошибкам и нерациональным решениям.

Приводим варианты письменной работы для самостоятельного решения (эти два варианта «настоящие», не сборные).

Вариант 1

1. Известно, что один из действительных корней уравнения $x^3 - 5x^2 + px + 8 = 0$ равен удвоенному другому корню. Найти p и все корни уравнения.

2. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{2a+1}(2x - 1) + \log_a(x + 3) < 0$$

одновременно выполняется при $x = 1$ и $x = 4$.

3. Решить неравенство

$$\sin x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x \geqslant 0.$$

4. Поверхность шара, вписанного в конус, боковая поверхность конуса и полная поверхность конуса образуют геометрическую прогрессию. Найти объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен R.

5. В трехкомнатной квартире длина первой комнаты равна длине второй, ширина второй комнаты равна ширине третьей, а диагональ пола первой комнаты такая же, как в третьей. Площади комнат соответственно равны a, b, c. Найти длину и ширину каждой комнаты.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 108, \\ x^2y^3z = 24, \\ x^3yz^2 = 18. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$x^{\log^2_{\frac{1}{2}} x - 2\log_{\frac{1}{2}} x^2} - \frac{1}{x^3} > 0.$$

3. В усеченный конус вписан полушар, объем которого составляет $\frac{6}{7}$ объема усеченного конуса. Найти отношение боковой поверхности конуса к сферической поверхности полушара.

4. При каких значениях α неравенство
$x^2(1 + \sin\alpha) - 2x\cos\alpha + 2\sin\alpha \geqslant 1$
выполняется для всех значений x?

5. Объем прямоугольного параллелепипеда равен V. Если все его ребра увеличить на a, то объем станет равен V_1, а если их укоротить на a, то объем будет равен V_2. Найти длину диагонали параллелепипеда.

Задачи из других вариантов

1. Решить неравенство

$$\log_2\log_8 x > \log_8\log_2 x.$$

2. Найти значения $\operatorname{tg}(x + y)$, если
$(3\cos x + 4\sin x)(5\sin y + 12\cos y) = 65.$

3. Уравнение с действительными коэффициентами

$$x^3 + px^2 + 2px + q = 0$$

имеет корень $x_1 = 1 + i$. Найти все корни уравнения.

ИЗ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ ЭКЗАМЕНАТОРА

Интерференция — это сложение световых волн, а дисперсия — разложение.

*

Изобретение радио было вековой мечтой человечества.

*

Чем длиннее маятник, тем меньше колебаний он совершает за период.

*

Энергия не исчезает и не творится, а только переходит из одного агрегатного состояния в другое.

*

Фотоэффект: под действием $h\nu$ электроны вылетают из металла.

*

Нейтрон заряжен нейтрально.

*

Земля имеет форму эллипса, а не круга.

*

Полное внутреннее отражение — это когда все лучи попадают в глаза.

*

Звук, как и вода, распространяется волнами.

*

Звуковые волны — это волны, способные распространять звук на большое расстояние.

*

Скорость звука уступает по величине только скорости света.

*

Свет на вид бесцветный.

*

Фотоэлементы применяются в фотографии. Это — проявитель, закрепитель и т. д.

*

Скорость света определяется так. Луч света посылается с Земли на Луну. Расстояние от Земли до Луны известно. Время засекается по секундомеру.

*

Высота звука равна $\frac{gt^2}{2}$.

ПОЛЕТ ОГНЕННЫХ СТРЕЛ

Среди исследованных и неисследованных явлений природы молнии принадлежит особое место. Каждый из нас видел ее много раз, но знаем ли мы, что это такое? Как она действует, какие производит разрушения и что вообще происходит в атмосфере во время грозы — этим вопросам посвящена маленькая, но очень увлекательная книга Базиля Шонланда «Полет молнии» *).

Автор говорит о культе грозы и молнии, существовавшем у всех древних народов, о том, как люди постепенно пришли к пониманию природы молнии и начали избавляться от страха перед этим грозным явлением. В книге подробно рассказывается об изобретении громоотвода и значении этого изобретения: ведь попадания молнии часто приводили к трагическим последствиям. Б. Шонланд рассказывает, например, что от удара молнии в церковь Сен-Назар в Северной Италии в 1769 году, в подвалах которой хранились большие запасы пороха, произошел взрыв, уничтоживший шестую часть города.

Молния считалась проявлением божьего гнева, грозной карой за земные грехи. Читатель узнает из книги, что домá римлян, разрушенные молнией, ни под каким видом не разрешалось восстанавливать. Но так было в древние и средние века. В XVIII столетии люди уже сравнительно много знали о природе электричества. Напомним, что первые опыты с электричеством — электризация трением — были осуществлены Уильямом Гильбертом еще в 1600 году. А изобретение громоотвода Б. Франклином относится к середине XVIII века. Во многих европейских странах в то время уже существовали академии наук. Тем не менее громоотводы еще долго завоевывали право на существование. Если в Америке они распространились довольно быстро, то в Европе долго продолжались споры: избавляет громоотвод от опасности или, наоборот, увеличивает вероятность поражения разрядом? Особенно много толков вызвал вопрос о том, тупым или острым концом должен заканчиваться громоотвод. Напомним еще интересный и, наверное, известный читателям факт, что первые опыты с громоотводами Б. Франклин делал с помощью воздушного змея, к которому было привязано железное острие. Б. Франклину принадлежат и многие другие исследования по электричеству, о некоторых из них вы тоже узнаете из книги Б. Шонланда.

Много места уделяет автор современным представлениям о внутриоблачных разрядах, о видах молний. Вы узнаете, что длина видимой части линейной молнии (так называется разряд между облаком и землей) за пределами облака достигает иногда нескольких километров. Полная длина молнии еще больше, так как, с одной стороны, разряд движется зигзагообразно, а с другой стороны, довольно большая часть его «спрятана» внутри самого облака. Если учесть еще цифры 25 000° (такой может быть температура в канале молнии), 10 000 ампер (ток в пике молнии) и 100 миллионов вольт (минимальное напряжение разряда), то можно представить себе, какое это грозное явление.

Приведем еще несколько интерес-

---

*) Б. Шонланд. «Полет молнии», Гидрометеоиздат, 1970.

ных цифр, взятых из книги «Полет молнии». Среднегодовое число гроз на земном шаре — 16 000 000. А ежесекундно на земле сверкает около 100 молний.

Электрический разряд движется в воздухе со скоростью от 100 до 100 тысяч километров в секунду. Исследование динамики такого процесса — задача сложная. О том, как она была решена и как регистрируется развитие молнии, вы тоже можете прочесть на страницах книги.

Один из самых интересных вопросов атмосферного электричества — вопрос о распределении зарядов на облаке. Оказывается, в большинстве случаев нижняя часть облаков бывает заряжена отрицательно. Б. Шонланд подробно описывает, как меняется электрическое поле во время развития молнии, как переносятся заряды с облака на землю. Есть в книге страницы (их, к сожалению, очень немного), посвященные наиболее загадочному и наименее понятному до сих пор явлению — шаровой молнии.

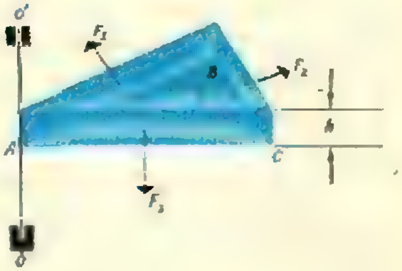
Читатель узнает о разных типах разряда в воздухе, о том, как происходит ионизация газа и электризация облаков, о роли, которую играют в этих процессах водяные капли и кристаллики льда. Заключительные страницы книги посвящены различным явлениям, сопровождающим грозы. Автор подробно рассказывает об «атмосфериках» (радиоволнах, излучаемых при грозах), объясняет, почему заряд на поверхности земли остается постоянным.

Книга написана хорошим языком. В небольшом объеме сосредоточено большое число серьезно осмысленных физических фактов и, что тоже важно, много полезной исторической информации. Изложение вполне доступно школьникам. Жалко только, что книга издана небольшим тиражом.

Ю. М. Брук

ЕЩЕ РАЗ О ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА

Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC (см. рис.). Наполним этот сосуд газом и дадим ему возможность вращаться вокруг вертикальной оси OO' (плоскость ABC горизонтальна). Пространство однородно, и, какое бы положение этот сосуд ни занял, он будет находиться в одних и тех же условиях. Поэтому можно считать, что он покоится.



Следовательно, силы давления газа на его боковые грани будут взаимно уравновешиваться. Но силы F_1 и F_2 стремятся вращать этот сосуд в одном направлении, а сила F_3 — в другом. Поэтому сумма вращающих моментов сил F_1 и F_2 должна быть равна вращающему моменту силы F_3.

$$F_1\cdot\frac{AB}{2}+F_2\cdot\frac{BC}{2}=F_3\cdot\frac{AC}{2}. \qquad (1)$$

Но $F_1=P(AB\cdot h)$, $F_2=P(BC\cdot h)$, $F_3=P(AC\cdot h)$, где P — давление газа, а h — высота сосуда.

$$P(AB\cdot h)\frac{AB}{2}+P(BC\cdot h)\frac{BC}{2}=P(AC\cdot h)\frac{AC}{2},$$

откуда

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

Это доказательство можно прочитать в небольшой брошюре Б. Ю. Когана «Приложение механики к геометрии» (изд-во «Наука», 1965 г.).

ИНФОРМАЦИЯ

XII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 8 по 22 июля в Будапеште и Кестхели (Венгрия) проходила XII Международная математическая олимпиада. В ней приняли участие команды Австрии, Англии, Болгарии, Венгрии, Голландии, ГДР, МНР, Польши, Румынии, Советского Союза, Франции, Чехословакии, Швеции и Югославии. Каждая команда состояла из восьми учащихся.

9 июля наша команда прибыла в Будапешт. Вечер 9 и день 10 июля мы знакомились с городом, а 11 июля все участники олимпиады переехали в Кестхель, где 13 и 14 июля и проходили соревнования по решению задач.

Как обычно, в каждый из дней соревнований участники должны были за 4 часа решить по 3 задачи. Тексты этих задач вы найдете в конце заметки. В скобках после каждой задачи указано, какой страной задача была предложена и во сколько очков оценивалось ее решение.

18 июля члены жюри подвели итоги соревнований и обсудили вопрос о месте и порядке проведения следующей олимпиады. Чехословацкие руководители сообщили о решении жюри провести олимпиаду в Чехословакии. Внесены были предложения об отдельных изменениях в уставе. В частности, предлагается некоторые задачи давать в двух вариантах, из которых участники могут выбирать тот, который им больше нравится. Также было внесено предложение давать задачи из современной математики: теории групп, алгебраических структур, аналитической геометрии, векторной алгебры.

19 июля все команды вернулись в Будапешт, где 21 июля состоялось вручение дипломов победителям и закрытие олимпиады.

Участники Советской команды на XII Международной математической олимпиаде (слева направо): Александр Линецкий, Андрей Ходулев, Александр Корлюков, Павел Копылов, И. С. Петраков (зам. руководителя команды), Сергей Семеньков, М. И. Серов (руководитель команды), Алексей Александров, Велло Альтлейс, Аркадий Климов.

По итогам олимпиады было присуждено 7 дипломов первой степени, 11 второй и 40 третьей.

Дипломы I степени присудили участникам, набравшим от 37 до 40 очков. 40 очков набрали *Андрей Ходулев* (СССР, школа-интернат при МГУ; из Калинина), *Вольфганг Бурмайстер* (ГДР), *Имре Руже* (Венгрия). По 39 очков набрали *Сильвермен Бернард* (Англия), *Аркадий Климов* (СССР, школа-интернат при МГУ; из Арзамаса), *Эрвин Баймоци* (Венгрия). Венгерский школьник *Иштван Гончзы* набрал 37 очков.

Дипломы II степени присудили участникам, набравшим от 30 до 35 очков. Из наших школьников его получил *Алексей Александров*, набравший 35 очков (9 класс школы-интерната при ЛГУ).

Дипломы III степени вручались участникам, набравшим от 19 до 28 очков. В нашей команде их получили *Сергей Семеньков*, набравший 27 очков (10 класс школы-интерната при ЛГУ), *Велло Альтлейс*, набравший 24 очка (11 класс Нызсской средней школы Тартуского района Эстонской ССР) и *Александр Корлюков*, набравший 24 очка (10 класс школы-интерната при МГУ; из Гродно).

Павел Копылов (г. Воронеж, школа № 58) и Александр Линецкий (г. Харьков, школа № 27) не смогли продемонстрировать все свои возможности и набрали соответственно 15 и 17 очков.

В целом команда Венгрии набрала 233 очка, СССР и ГДР — по 221 очку, Югославии — 209 очков, Румынии — 208, Англии — 180, Болгарии и Чехословакии — по 145, Франции — 141, Швеции — 110, Польши — 105, Австрии — 104, Голландии — 87, МНР — 78.

Сейчас все участники советской команды, окончившие школу, учатся в Московском или Ленинградском университетах, а Алеша Александров заканчивает 10-й класс и думает о поездке на XIII Международную математическую олимпиаду в Чехословакию. **И. С. Петраков**

Задачи, предложенные в первый день

1. Дан треугольник ABC, M — внутренняя точка стороны AB. Пусть r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMC, BMC, ABC соответственно; ρ_1, ρ_2, ρ — радиусы окружностей, которые лежат внутри угла ACB, и являются вневписанными для треугольников AMC, BMC, ABC соответственно.

Доказать, что $\frac{r_1r_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{r}{\rho}$ (Польша, 5 очков).

2. Пусть a, b и n — натуральные числа, большие единицы. Числа a и b являются основаниями двух систем счисления. Числа A_n, B_n имеют одинаковое представление $\overline{x_nx_{n-1}\ldots x_1x_0}$ в системах счисления с основаниями a и b, причем $x_n\neq 0$, $x_{n-1}\neq 0$. Числа, получившиеся после вычеркивания первой цифры x_n, будем называть A_{n-1}, B_{n-1}.

Доказать, что $a>b$ тогда и только тогда, когда $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$ (Румыния, 7 очков).

3. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant\ldots \qquad (1)$$

Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ определяется так:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

а) Доказать, что $0\leqslant b_n<2$ для всех n.

б) Доказать, что для данного c, такого, что $0\leqslant c<2$, существует последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяющая условию (1) такая, что $b_n>c$ для бесконечного множества индексов n (Швеция, 8 очков).

Задачи, предложенные во второй день

4. Найти все положительные целые числа n, обладающие следующим свойством: множество

$$\{n;\ n+1;\ n+2;\ n+3;\ n+4;\ n+5\}$$

можно разделить на два множества так, что произведение всех элементов одного из них равно произведению всех элементов другого (Чехословакия, 6 очков).

5. В тетраэдре $ABCD$ $DB\perp DC$ и основание перпендикуляра, опущенного из D на плоскость треугольника ABC, совпадает с ортоцентром этого треугольника.

Доказать, что

$$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2).$$

Для каких тетраэдров имеет место равенство (Болгария 6 очков)?

6. На плоскости заданы 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Рассматриваются все возможные треугольники с вершинами в этих точках.

Доказать, что среди них будет не более 70% остроугольных треугольников (Советский Союз, 8 очков).

IV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 5 по 15 июля в Москве проходила Международная физическая олимпиада школьников. Она проводится всего в четвертый раз. У математиков традиции в этом смысле богаче — их первая Международная олимпиада состоялась еще в 1959 году, а проводятся они ежегодно. И все же международные физические олимпиады вчетверо старше аналогичных олимпиад по химии — Международная химическая олимпиада была в 1970 году проведена впервые.

IV МФО
МОСКВА

Академик АПН СССР В. А. Фабрикант открывает IV Международную физическую олимпиаду школьников. Фото М. В. Альперта (АПН).

В нынешней олимпиаде приняли участие старшеклассники и выпускники (окончившие школу в 1970 году) из Народной Республики Болгарии, Венгерской Народной Республики, Германской Демократической Республики, Польской Народной Республики, Социалистической Республики Румынии, СССР, Чехословацкой Социалистической Республики и Социалистической Федеративной Республики Югославии.

Верховным органом олимпиады была Международная комиссия, в которую вошли научные руководители всех делегаций. Возглавлял ее академик АПН СССР В. А. Фабрикант.

В советскую команду были включены ребята, успешно выступившие на Всесоюзной физической олимпиаде прошлого года в Свердловске: Игорь Булыженков (Уфа), Михаил Волошин (Москва), Сергей Горбачевский (Ломоносов, Ленинградской обл.), Владимир Кравцов (Горький), Игорь Люксютов (Киев) и Борис Петров (Псков).

Научным руководителем советской команды была профессор Московского государственного университета В. И. Иверонова.

Стало традицией проводить физи-

Советская команда. Слева направо: И. Булыженков, И. Люксютов, С. Горбачевский, В. Кравцов, Б. Петров, М. Волошин. Фото М. В. Альперта (АПН).

ческие олимпиады в два тура. Так было и в этот раз. На первом туре ребятам предлагалось решить четыре задачи, на втором — всего одну, но экспериментальную. Международная комиссия установила высшую оценку за решение каждой задачи первого тура — 10 очков, максимальное количество очков за экспериментальную работу равнялось 20. Проводились теоретический и экспериментальный туры в разные дни.

Но вот все позади. 13 июля были подведены итоги. Прежде чем рассказывать о них, заметим, что официального командного первенства на олимпиаде не было. Говоря о целях олимпиады, председатель ее оргкомитета вице-президент Академии педагогических наук СССР В. Г. Зубов сказал, что олимпиада — это прежде всего дружеское состязание добрых друзей, и цель ее состоит в том, чтобы сравнить знания школьников, сопоставить их со знаниями сверстников из других стран. А руководитель югославской делегации доктор Божидар Милич, выступая на закрытии олимпиады от имени Международной комиссии, отметил, что Международная комиссия, по предложению советских ученых, стремилась сохранить традицию Олимпийских игр — «участвуют не страны, а участники».

Чтобы получить на олимпиаде первую премию, требовалось набрать не менее 50 очков (из 60 возможных), вторую — от 45 до 49 очков, третью — от 39 до 44. Похвальными отзывами награждались те, кто получил более половины всех очков.

Приведем результаты советской команды: первые премии получили М. Волошин, С. Горбачевский и Б. Петров, вторые премии — И. Люксютов и И. Булыженков, третью — В. Кравцов. Максимальное количество очков (57) набрал М. Волошин. А вот как распределились премии и похвальные отзывы среди делегаций:

Страна	I премия	II премия	III премия	Пахвальные отзывы
Болгария	—	—	—	2
Венгрия	—	2	1	1
ГДР	—	1	—	2
Польша	1	1	—	4
Румыния	—	—	3	1
СССР	3	2	1	—
Чехословакия	-	-	5	—
Югославия	—	1	—	3

Всего награждено 34 человека. Остальные получили дипломы участников.

Назовем здесь еще несколько успешно выступивших участников олимпиады. Марек Зюлковски из Польши получил вместе с тремя нашими ребятами первую премию. Инге Рейман — девушка из ГДР — получила специальный приз за успешное участие в олимпиаде, а ее товарищ по команде Манфрэд Фишер — вторую премию и, кроме нее, — специальный приз за лучшее выполнение экспериментальной работы. Он получил за эксперимент максимальное количество очков.

Побеждать на олимпиаде всегда приятно, тем более на Международной. Все члены советской команды приняты в институты без экзаменов. Пользуясь случаем, мы еще раз поздравляем всех ребят, успешно выступивших летом в Москве.

Ю. М. Брук
Н. А. Минц

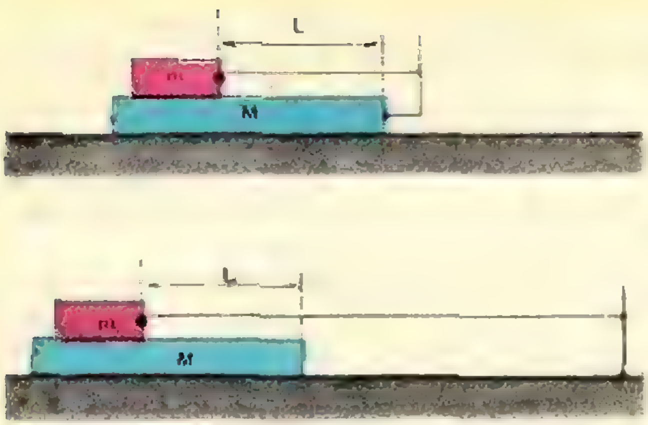


Рис. 1.

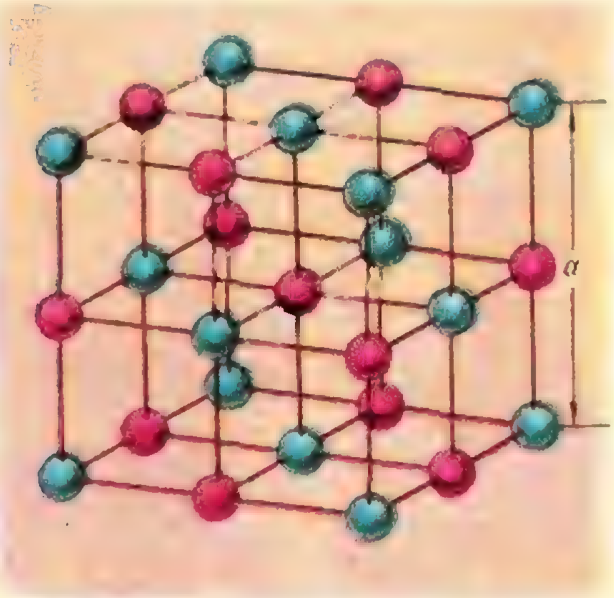


Рис. 2.

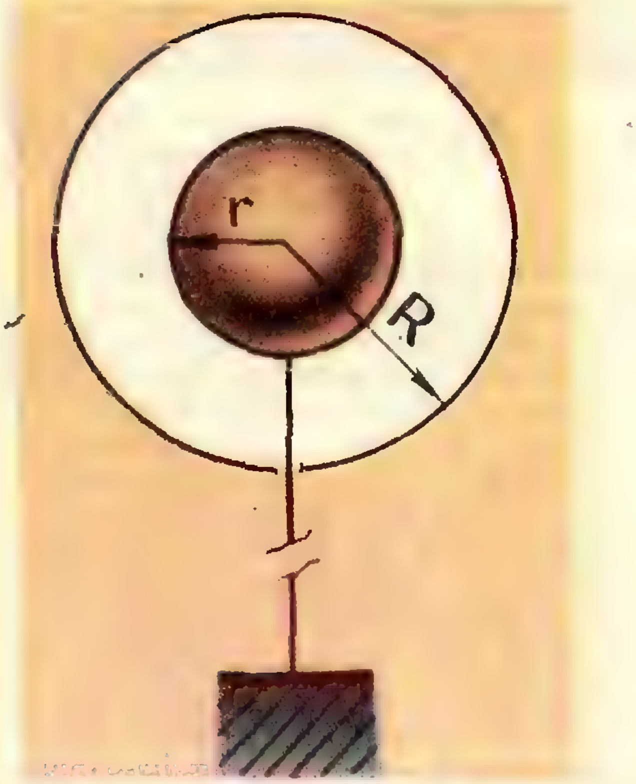


Рис. 3.

Задачи IV международной физической олимпиады

Задача 1

Длинный брусок массы $M=1$ *кг* находится на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может передвигаться без трения. По *верхней горизонтальной грани* бруска может скользить каретка с мотором. Масса каретки с мотором $m=100$ *г*, коэффициент трения $k=0{,}02$. Мотор с постоянной скоростью $V_0=10$ *см/сек* наматывает на вал нить, второй конец которой в одном случае привязан к достаточно удаленному колышку, укрепленному на неподвижной опоре, а в другом — к колышку, прикрепленному к бруску (рис. 1). Удерживая брусок неподвижным, дают возможность каретке начать двигаться *со скоростью* v_0, *после чего* брусок освобождают. К моменту освобождения бруска передний край каретки находится на расстоянии $L=50$ *см* от переднего края бруска. Определить для обоих случаев характер и скорости движения бруска и каретки после начала движения бруска и время, в течение которого каретка достигнет переднего края бруска.

Задача 2

Элементарная ячейка кристалла каменной соли (NaCl) представляет собой куб, длина ребра которого $a=5{,}6\,\text{Å}$ ($\text{Å}=10^{-8}$ *см*) (рис. 2). Красными шариками на рисунке обозначены положения атомов натрия, *синими — атомов хлора*. Весь кристалл каменной соли получается повторением таких элементарных ячеек. Атомный вес натрия 23, атомный вес хлора 35,5. Плотность каменной соли $\rho=2{,}22$ *г/см*^{3}. Необходимо из этих данных определить массу атома водорода.

Задача 3

Внутрь тонкостенной металлической сферы радиуса $R=20$ *см* концентрически помещен металлический шар радиуса $r=10$ *см*. Шар через отверстие в сфере соединен с помощью очень длинного провода с землей (рис. 3). На внешнюю сферу помещают заряд $Q=10^{-8}$ кулона. Требуется определить потенциал этой сферы, электрическую емкость полученной системы проводящих тел и нарисовать эквивалентную электрическую схему.

Задача 4

В телескопе используются сферическое зеркало с радиусом кривизны $R=2$ *м*. В главном фокусе зеркала помещен приемник излучения в виде круглого диска. Диск расположен перпендикулярно оптической оси телескопа (рис. 4). Какими должны быть размеры приемника, чтобы он принимал весь поток излучения, отраженного зеркалом? Поперечный размер зеркала равен 50 *см*. Во сколько раз уменьшится поток излучения, принимаемый приемником, если его размеры уменьшить в восемь раз?

Примечания: 1) При расчетах для малых значений α ($\alpha \ll 1$) можно производить замену $\sqrt{1-\alpha} \approx 1-\frac{\alpha}{2}$. 2) Дифракцию не учитывать.

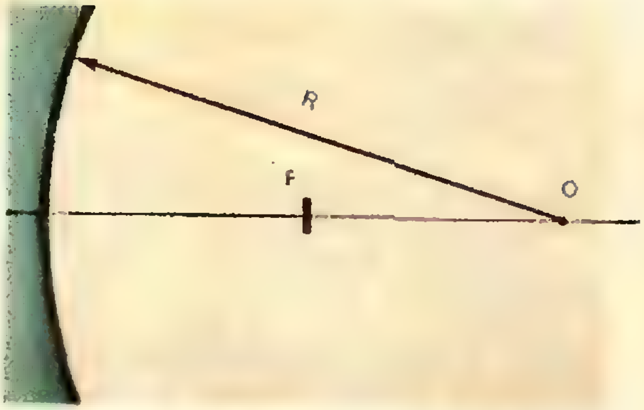


Рис. 4.

Задача экспериментального тура

На столе имеются три различные линзы на стойках, экран с изображением геометрической фигуры, вертикальная проволочка, также укрепленные на стойках, и измерительная лента — портновский метр (рис. 5). Необходимо, используя только предметы, находящиеся на столе, определить фокусные расстояния линз и их знаки.

Предлагаем читателям самим проделать такой эксперимент. Сколько существует способов измерения фокусных расстояний с указанными инструментами? Нарисуйте для каждого способа схему опыта и ход лучей. Со всяким ли набором линз (все линзы положительные; две линзы положительные, а одна отрицательная и т. д.) можно провести такие измерения? Если вы отыщите несколько возможных способов для какого-нибудь набора линз, определите фокусные расстояния каждым способом и сравните результаты. В чем вы видите источники ошибок в ваших опытах?

Напишите в редакцию о ваших экспериментальных успехах или неудачах.

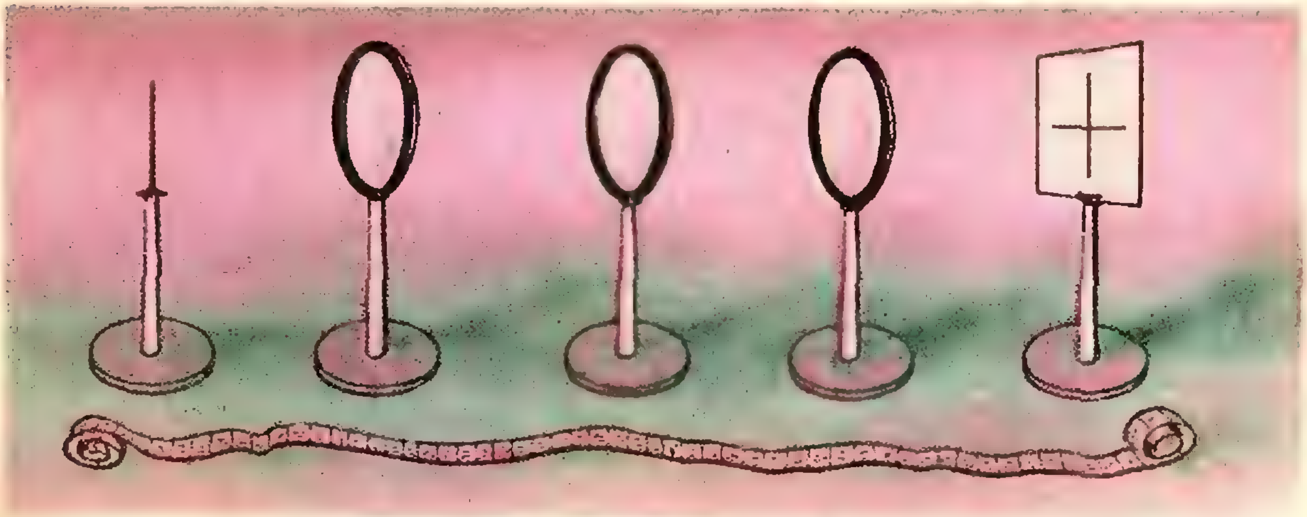


Рис. 5.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Две игры со спичками»

1. Пример: пусть, скажем, позиция (a, b, c) такова: $a = 1\,100\,101$, $b = 11\,101\,010$, $c = 100\,011\,010$; эта позиция не является проигрышной, ибо суммы цифр, задающих 1-й, 3-й, 5-й, 8-й и 9-й разряды чисел a, b и c, нечетны (разряды всегда считаются с конца числа). Больший из этих разрядов — это 9-й; из того, что сумма соответствующих цифр нечетна, следует, что хоть одна из этих цифр — это 1. Изменим теперь число c, в котором на 9-м с конца месте стоит 1, так, чтобы у него изменились цифры, отвечающие 1-му, 3-му, 5-му, 8-му и 9-му разряду (то есть заменим его числом $c_1 = 010\,001\,111$, или, короче, числом $10\,001\,111$); позиция (a, b, c_1) будет уже проигрышной, а так как $c_1 < c$, то игрок может перейти от позиции (a, b, c) к позиции (a, b, c_1).

Докажите сами, что разобранное на этом примере рассуждение является общим (то есть применимо к любой выигрышной позиции).

2. Это следует из того, что любой ход меняет хоть одну цифру в (двоичной) записи чисел a, b и c (то есть заменяет 0 на 1 или 1 на 0); при этом в данном разряде такое изменение касается лишь одной цифры.

3. Для любого n проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

В случае $n = 2$ стратегия беспроигрышной игры сводится к следующему: *надо каждым своим ходом брать столько спичек из большей по численности кучки, чтобы в обеих кучках спичек оставалось поровну* (это, разумеется, можно сообразить и не используя двоичной системы счисления).

4. Позиция (a, b, c) (где все числа a, b и c записаны по четверичной системе счисления) проигрыша тогда, когда в любом разряде совокупность цифр чисел a, b и c имеет следующий вид: (0, 0, 0), или (0, 1, 1), или (0, 2, 2), или (0, 3, 3), или, наконец, (1, 2, 3).

5. Сравните с задачей 14 из статьи И.М. Яглома «Системы счисления», опубликованной в «Кванте» № 6. Если запись числа p в фибоначчиевой системе счисления кончается нечетным числом нулей, то запись числа a получается из нее дописыванием «цифры» 0; если же она кончается четным числом нулей, то для получения записи числа a нужно к записи числа $p - 1$ приписать «цифру» 1. То, что пара a, b определяется по p однозначно, докажите сами. Заметим еще, что чем больше p, тем больше определенное по нему a. (Это будет использовано в решении задачи 6.)

6. Будем считать, что $b - a \geq 0$, то есть $p = b - a \geq 0$. Существует проигрышная позиция (b_1, a) (где мы теперь не требуем, чтобы b_1 было больше a) и проигрышная позиция (b', a'), где $b' - a' = p$ (задача 5). Если $b_1 < b$, то играющий может одним ходом перейти к позиции (b_1, a); если же $b_1 > b$, то $b_1 - a > p$, и поэтому (см. решение предыдущей задачи) $a > a'$. Поэтому играющий может перейти к позиции (a', b').

7. Это следует из того, что не существует двух разных проигрышных позиций (a, b) и (a_1, b_1), где одно из чисел a, b равнялось бы одному из чисел a_1, b_1 или где $b - a = b_1 - a_1$.

8. Проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

К статье «Сравнение различных средних двух положительных чисел»

1. а) Опустить из точек A_1 и B_1 перпендикуляры A_1A_0 и B_1B_0 на прямую OS и применить теорему косинусов к треугольникам OA_1S и OB_1S ($\angle A_1OS = \varphi$):

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a_1^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2a_1\frac{a+b}{2}\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = b_1^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2b_1\frac{a+b}{2}\cos\varphi.$$

Отсюда

$$OA_0 = a_0 = a_1\cos\varphi = \frac{a_1^2 + ab}{a+b},$$

$$OB_0 = b_0 = b_1\cos\varphi = \frac{b_1^2 + ab}{a+b}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0} = \frac{2ab}{a+b}$$

или

$$\frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1}\cos\varphi = OC \quad (C = PQ \times OS).$$

Но $OC = OC_1 \cos\varphi$, следовательно,

$$OC_1 = \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1}.$$

б) Учесть, что $ab = a_1b_1$.

в) Заметить, что $\angle OS_1S = 90°$, вследствие чего $A_1S_1 = S_1B_1$

и
$$OS_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

2. а) $N^2 - MK = 0$; б) $L^2 + N^2 - 2K^2 = 0$;

в) $L^2 + MK - 2K^2 = 0$; г) $M^2L^2 + M^2N^2 - 2N^4 = 0$.

3. а) $N = \sqrt{MK} \leqslant \frac{1}{2}(M + K)$,

откуда $N - M \leqslant K - N$;

б) используя результат задачи 2, заменить в доказываемом неравенстве K и M через L и N и эквивалентными преобразованиями привести его к виду $(L - N)^2 \geqslant 0$;

в) $K = \sqrt{\frac{L^2 + N^2}{2}}$, $K \geqslant \frac{1}{2}(L + N)$,

отсюда $L - K \leqslant K - N$.

4. Пусть $\measuredangle A_1OS = \varphi$. Запишем равенства

$$(OC_1)^2 = \frac{1}{2}[(OA_1)^2 + (OB_1)^2],\ OA_1 \cdot OB_1 = a \cdot b,$$

$$\frac{1}{2}(OA_1 + OB_1) = \frac{1}{2}(a + b)\cos\varphi.$$

Исключаем из этой системы OA_1 и OB_1:

$$(OC_1)^2 = \frac{(a + b)^2}{2}\cos^2\varphi - ab.$$

Но

$$(OC_1)^2 = x^2 + y^2,\ \cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

поэтому

$$(x^2 + y^2)^2 + ab(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(a + b)^2 x^2 = 0.$$

и окончательно

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{2}(a - b)^2 x^2 + aby^2 = 0.$$

Необходимо потребовать еще, чтобы $(C_1S)^2 \leqslant (AS)^2$ или

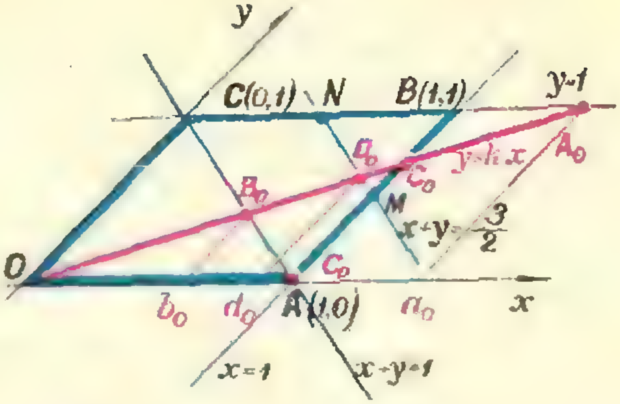
$$\left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{a - b}{2}\right)^2,$$

то есть $x^2 + y^2 - (a + b)x + ab \leqslant 0$.

5. Проведем через точку S прямую g, параллельную AB, пересекающую прямые AA_1, BB_1, A_1B_1 соответственно в точках U, V, W. Имеем

$$\frac{SU}{SW} = \frac{AB}{OB},\quad \frac{SW}{SV} = \frac{OA}{AB},$$

$$\frac{SV}{SU} = \frac{CB}{AC}.$$



После почленного перемножения этих равенств получаем:
$OA \cdot CB = OB \cdot AC$ или $a(b - c) = b(c - a)$.
Отсюда $c = \frac{2ab}{a + b}$.

6. Зададим систему координат так: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$ (см. рисунок). Уравнения прямых BC, CA, AB и MN соответственно таковы: $y - 1 = 0$, $x + y = 1$, $x = 1$, $x + y = \frac{3}{2}$.

Уравнение секущей: $y = kx$. Тогда абсциссы точек пересечения таковы:

$$a_0 = \frac{1}{k},\quad b_0 = \frac{1}{k + 1},\quad c_0 = 1,$$

$$d_0 = \frac{3}{2(k + 1)}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} + \frac{1}{c_0} = k + (k + 1) + 1 =$$

$$= 2(k + 1) = \frac{3}{d_0}.$$

Но a_0, b_0, c_0, d_0 пропорциональны a, b, c, d

К статье «Две дюжины задач на прогрессии»

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$;

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

6. $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$, $u = 1$,

$s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.

8. $A=2,\ B=32.$

9. $x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=-\frac{7}{9}.$

10. $b_{10}=-\frac{3}{256}.$

11. 931

12. 7, 14, 28, 56.

К статье «Вступительные экзамены по математике в Университет дружбы народов»

Вариант 1.

1. $p=2,\ x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=-1.$

2. $\frac{1}{2}<a<1.$

3. $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$ или

$$k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

4. $3\pi R^3.$

5. Длина первой комнаты

$$\sqrt[4]{\frac{(b^2-a^2)\,b^2}{b^2-c^2}}$$ (при $a<b$, $c<b$ или $a>b$, $c>b$).

Вариант 2

1. $x=1,\ y=2,\ z=3$ или $x=-1,\ y=-2,\ z=-3.$

2. $x>1$ или $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}.$

3. 1 или $\frac{20}{21}.$

4. $2k\pi+\arcsin\frac{2}{3}\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi-$

$$-\arcsin\frac{2}{3}.$$

5. $d=$

$$=\sqrt{\left(\frac{V_1+V_2-2V}{2a^2}\right)^2-\frac{V_1-V_2-2a^3}{a}}.$$

Задачи из других вариантов

1. $x>2^{3\sqrt{3}}.$ 2. $\frac{63}{16}.$

3. $x_{1,2}=1\pm i,\ x_3=-\frac{3}{2}.$

К задачам XII Международной математической олимпиады

Следует иметь в виду, что каждая задача может быть решена несколькими способами, в том числе отличными от указанных здесь.

Читателю рекомендуется найти свое решение каждой задачи, не пользуясь указаниями.

1. Сначала для произвольного треугольника доказать, что $\frac{r}{\rho}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, где r и ρ — соответственно радиусы вписанной и вневписанной в ΔACB окружности (последняя касается стороны AB), $\alpha=\measuredangle CAB$, $\beta=\measuredangle CBA$. Для доказательства указанной формулы выражают AB через r и тангенсы углов $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, затем через ρ и тангенсы тех же углов, а затем приравнивают полученные выражения. Из доказанного непосредственно следует утверждение задачи.

2. В неравенстве $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$ все члены заменить многочленами относительно a и b с коэффициентами $x_n, x_{n-1},\ldots,x_0$. Тождественными преобразованиями (вычитают обе части неравенства из 1, затем рассматривают обратные дроби, которые приводятся к сумме, и сравнивают отдельные слагаемые) приводят указанное неравенство к очевидному.

3. Из условия следует, что все $b_n\geqslant0$. Из того, что корень из произведения соседних чисел меньше большего из них, следует, что отношение суммы корней из этих чисел к большему не превосходит двух, деленных на корень из меньшего числа, что можно преобразовать так $\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\leqslant$

$$\leqslant2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right).$$ Последнее непосредственно приводит к выводу, что $b_n<2$.

Для доказательства второй части утверждения взять M такое, что $c<M<2$, а в качестве последовательности a_n — геометрическую прогрессию с $a_n=q^n$, где $q>1$ определяется из соотношения $\frac{\sqrt{q}+1}{q}=M$, в результате получается требуемое b_n.

4. Из шести последовательных целых чисел по крайней мере одно делится на 5. Показать, что в этом случае n и $n+5$ делятся на 5. Затем показать, что произведение любых двух сомножителей больше третьего. Из этого следует, что в каждой группе три сомножителя. Перебором можно установить, что равенство невозможно ни при каком целом n.

5. Доказать, что противоположные ребра взаимно перпендикулярны. Исходя из этого, доказать, что суммы квадратов противоположных ребер равны. Отсюда получается, что
$$6\,(AD^2+BD^2+DC^2)=$$
$$=3\,(AC^2+BC^2+AB^2).$$

Неравенство

$$(AB+BC+AC)^2\leqslant3\,(AC^2+BC^2+AB^2)$$

Получается сложением неравенств:

$$(AB - BC)^2 \geqslant 0,$$

$$(BC - AC)^2 \geqslant 0,$$

$$(AB - AC)^2 \geqslant 0.$$

$$(AB + AC + BC)^2 = (AB + AC + BC)^2.$$

6. Доказать, что для четырех точек не менее 3 из 4 треугольников остроугольны. Взять 5 точек и показать, что не менее трех треугольников с вершинами в этих точках не остроугольны. Затем подсчитать общее число остроугольных треугольников, учитывая, что остроугольные треугольники могут входить и в другие пятерки точек. В заключение найти отношение полученного числа к общему числу треугольников.

К задачам IV Международной физической олимпиады

1. В случае а) каретка движется относительно колышка равномерно со скоростью v_0. На брусок со стороны каретки действует сила трения $F_{тр} = kmg$, сообщающая ему ускорение $a = \frac{F_{тр}}{M} g$. Поэтому скорость бруска увеличивается со временем $v = at = k \times \frac{m}{M} gt$. Ясно, что брусок не может двигаться быстрее, чем каретка, поэтому, если каретка не успевает достигнуть переднего края бруска, то в момент $t_0 = \frac{v_0 M}{kmg}$ скорость бруска станет равной v_0 и проскальзывание каретки по бруску прекратится. Дальше каретка и брусок будут двигаться равномерно со скоростью v_0. Проверим, успеет ли каретка дойти до края бруска. К моменту t_0 она пройдет относительно бруска путь

$$S = v_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2kmg} \approx 25\ см.$$

$S < L$, то есть каретка не достигнет края бруска.

В случае б) можно не записывать уравнений движения бруска и каретки, а воспользоваться законом сохранения импульса для системы брусок — каретка. Если u скорость бруска, а v скорость каретки, то

$$mv - Mu = mv_0.$$

Учитывая, что $v + u = v_0$, найдем, что $v = v_0$ и $u = 0$: после того как каретку освободили, брусок останется неподвижным, а каретка будет двигаться со скоростью v_0. Переднего края бруска каретка достигнет через время $t = \frac{L}{v_0} = 5 с$.

2. Нетрудно сообразить, что элементарной ячейке NaCl нужно приписать только четыре атома натрия и четыре атома хлора (например, те, которые образуют маленький кубик с ребром $\frac{1}{2}a$, одна из вершин которого совпадает с вершиной элементарной ячейки). Действительно, положение любых других атомов можно найти, если пристраивать такую элементарную ячейку (с ребром a и 8 атомами) к той, что нарисована на рисунке.

Масса элементарной ячейки равна $(4A_{Na} + 4A_{Cl})\, m_H$, где A_{Na} и A_{Cl} — атомные веса натрия и хлора, а m_H — масса атома водорода.

С другой стороны, она должна быть равна $\rho \cdot a^3$. Поэтому

$$\rho a^3 = 4\,(A_{Na} + A_{Cl})\, m_H,$$

откуда

$$m_H = \frac{\rho a^3}{4\,(A_{Na} + A_{Ce})} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ г.$$

3. Обозначим q заряд, индуцированный на поверхности шара. Если пренебречь искажением поля за счет проводника, то можно считать, что поле вне сферы такое, каким бы оно было, если бы все заряды были расположены в центре сферы. Это означает, что потенциал сферы равен $\varphi_1 = \frac{Q + q}{R}$.

В то же время заряд сферы не влияет на поле внутри нее. Поэтому внутри сферы поле такое, каким бы оно было, если бы внешней сферы не было вовсе или если бы она была не заряжена. Это означает, что разность потенциалов между шаром и сферой такая, какой она была бы, если бы сфера была не заряжена, а на шаре был заряд q. Но в этом случае потенциал сферы был бы равен $\frac{q}{R}$, а потенциал шара $\frac{q}{r}$, и поэтому $\Delta\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{R} = q\frac{R - r}{Rr}$.

В нашем случае потенциал шара φ_2 равен

$$\varphi_1 + \Delta\varphi = \frac{Q + q}{R} + q\,\frac{(R - r)}{Rr} = \frac{rQ + Rq}{Rr}.$$

Но ведь шар заземлен и $\varphi_2 = 0$, поэтому

$$\frac{rQ + Rq}{Rr} = 0;$$

отсюда

$$q = -Q\frac{r}{R}.$$

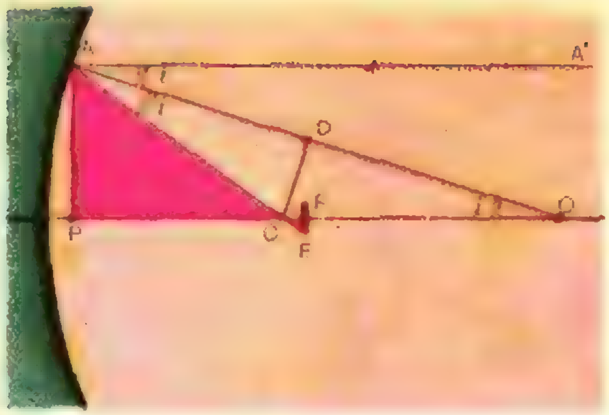
Теперь нетрудно найти потенциал сферы

$$\varphi_1 = \frac{Q + q}{R} = \frac{Q}{R} \cdot \frac{R - r}{R} =$$

$$= \frac{3}{4}\ ед.\ CGSE = \frac{1}{400}\ в.$$

(так как 1 *кул* $= 3 \cdot 10^9$ CGSE).

По определению емкости $C = \frac{Q}{\varphi_1} = \frac{R^2}{R - r} = 40\ см.$



Систему можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора: один из них — сферический конденсатор, образуемый шаром и поверхностью сферы, другой — конденсатор, «обкладками» которого служат поверхность сферы и Земли.

4. При отражении от сферического зеркала конечных размеров параллельный пучок лучей не сходится в одной точке.

Пусть $A'A$ — крайний луч в падающем пучке ($OA=R=2$ *м*), AE — отраженный луч, и размеры приемника, стоящего в фокусе, таковы, что луч AE в него попадает. Из треугольника CDO($CD \perp OA$) следует:

$OC = \frac{R}{2\cos i}$. Так как $OF = \frac{R}{2}$, то отрезки FC и CP соответственно равны:

$$FR = OC - OF = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right),$$

$$CP = OP - OC = R\left(1 - \frac{1}{\cos i}\right).$$

Теперь из подобия красных треугольников APC и CFE следует, что

$$\frac{x}{a} = \frac{CF}{CP} = \frac{1-\cos i}{2\cos i - 1}.$$

Здесь $a=AP$ — поперечный размер зеркала, а $x=EF$ — радиус приемника. Из треугольника APO найдем, что $\sin i = \frac{a}{R}$. Поэтому

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{2R^2} \; (a^2 \ll R^2)$$

и

$$x = \frac{a^3}{2R^2\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)} \approx \frac{a^3}{2R^2} \approx 1,5 \text{ см}.$$

Для ответа на второй вопрос перепишем последнее равенство в виде $a = \sqrt[3]{2R^2x}$. Ясно, что площадь работающей части зеркала, то есть той части зеркала, с которой «снимается» приемником поток излучения, пропорциональна $a^2 = \sqrt[3]{4R^4x^2}$, то есть пропорциональна $x^{2/3}$. Поэтому при уменьшении x в 8 раз, поток, принимаемый приемником, уменьшится в 4 раза.

К заметке «Знаете ли вы определения?»

1. Знак $>$ означает «строго больше», а знак $\geqslant$ означает «больше или равно», то есть формула $a \geqslant b$ верна в любом из двух случаев: и если $a > b$, и если $a = b$. Формула а) неверна, остальные верны.

2. Если точка находится на прямой, то мы перпендикуляр восставляем, независимо от того, в какую сторону мы его ведем. Если точка не лежит на прямой, то мы перпендикуляр опускаем, даже если он при этом идет вверх.

К задачам «Решите на досуге»

(«Квант» № 1, стр. 61)

1. Сможет. Найдем зазор между обручем и землей. По формуле длины окружности $C = 2\pi R$, $C + 1\text{м} = 2\pi\left(R + \frac{1\text{ м}}{2\pi}\right)$, а $\frac{1\text{ м}}{2\pi} \approx$ $\approx \frac{1\text{ м}}{6,3} \approx 16$ *см*.

Ширина зазора даже не зависит от радиуса Земли.

2.
$$\begin{array}{r|l} 101\,002 & 22 \\ \cline{2-2} 22 & 1021 \\ \hline 2\,00 & \\ 1\,21 & \\ \hline 22 & \\ 22 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3. Произвольно напишем на каждом из булыжников одну из букв: A, B, C, D или E. Сравнение по весу, то есть взвешивание, двух булыжников A и B будем обозначать так: (A, B).

а) (A, B)—$A > B$ (в противном случае с помощью мела и тряпки переименуем эти булыжники).

б) (C, D)—$C > D$ (если нужно, вновь воспользуемся мелом и тряпкой.)

в) (A, C)—$A > \begin{cases} B, \\ C > D. \end{cases}$

(В случае необходимости можно A переименовать в C и одновременно B в D.)

Теперь мел и тряпку уберите и самостоятельно нарисуйте таблицу, показывающую, какие булыжники взвешивать (в зависимости от результата предыдущего взвешивания) и в каком порядке.

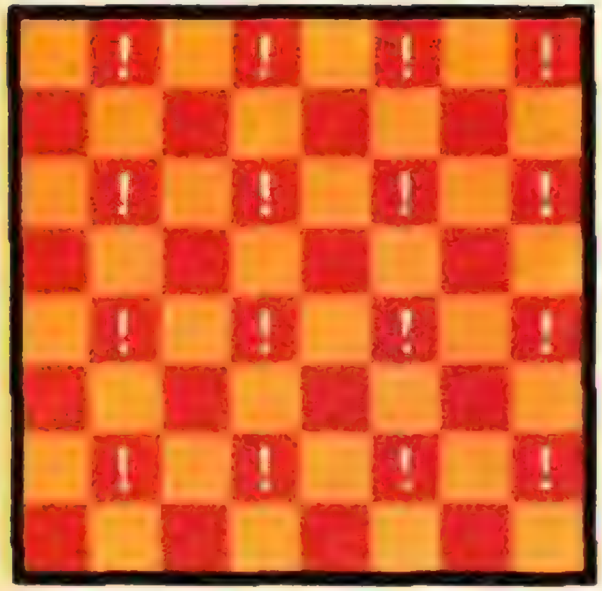


Рис. 1.

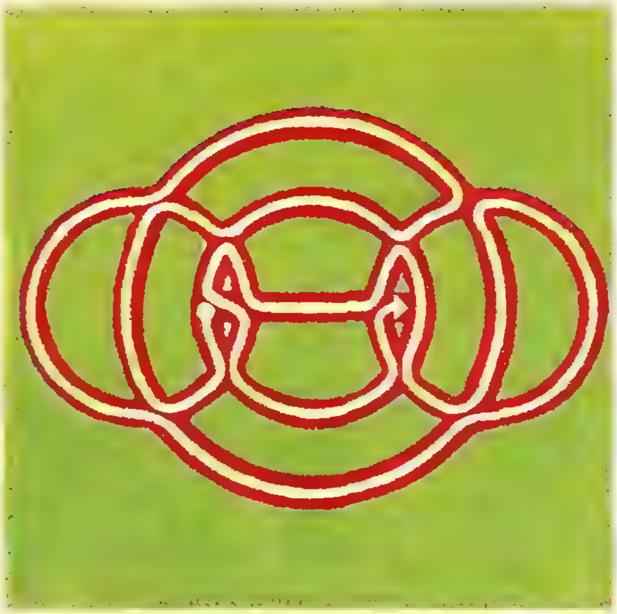


Рис. 2.

К заметке «Квант» для младших школьников»
«Квант» № 1, 3-я стр. обложки)

1.
$$\begin{array}{r} 124 \\ 97 \\ \hline 868 \\ 1116 \\ \hline 12028 \end{array}$$

2. Начинающий должен ставить свою шашку только на клетки, отмеченные восклицательным знаком (рис. 1), что он всегда может сделать (эти клетки находятся в четных строках и четных столбцах, считая снизу слева).

3. 403 + 403 + 403 = 1209, (2 + 2):2 = = 2.

4. Например, как на рисунке 2.

Главный редактор — академик **И. К. Кикоин.**
Первый заместитель главного редактора — академик **А. Н. Колмогоров.**
Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков; В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн; Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург; В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*); В. П. Лишевский; А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева; Н. Х. Розов; А. П. Савин; И. Ш. Слободецкий; М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*); Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

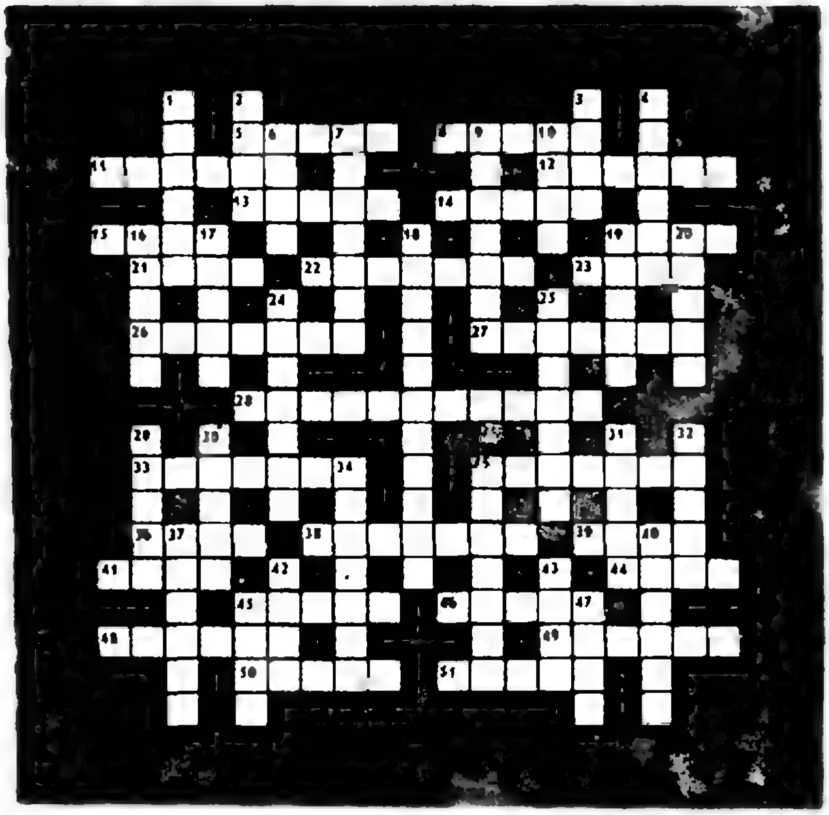
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Л. С. Сомова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23. 10. 70 г.
Подпис. в печать 23. 12. 70 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,44. Тир. 276000
Т-18745
Цена 30 коп. Заказ 1778
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 2

КРОССВОРД



По горизонтали:

5. Образование из букв.
8. Направление на местности, определенное с помощью двух вех.
11. Вид маятника.
12. Советский физик.
13. Форма электрического разряда.
14. Единица измерения светового потока.
15. Оптическое явление.
19. Видимое космическое пространство.
21. Составитель толкового словаря.
22. Деталь часового механизма.
23. Причина, вызывающая вращательное движение.
26. Изменение направления на 180°.
27. Контур.
28. Замена переменной.
33. Отношение расстояний на карте и на местности.
35. Требование.
36. Способ научной работы.
38. Автор сочинения «О плавающих телах».
39. Символ.
41. Простейший механизм.
44. Лестница на корабле.
45. Сверлильный инструмент.
46. Специальное сооружение.
48. Метательный снаряд.
49. Следование шаблону.
50. Деформация.
51. Образ мыслей.

По вертикали:

1. Название труда, содержащего достижения античной математики.
2. Союз, с которого начинается импликация.
3. Отклонение от вертикального состояния.
4. Образец.
6. Единица измерения количества бумаги.
7. Одна из возможных ситуаций.
9. Автор абстрактной вычислительной машины.
10. Астрономический знак.
16. Приверженец какого-либо учения.
17. Химический элемент.
18. Функция.
19. Точка на небесной сфере.
20. Польский математик, бывший узник фашистского концлагеря.
24. Количество световой энергии.
25. Один из основателей теории вероятностей.
29. Содержание высказывания.
30. Первопричина.
31. Порция какой-либо физической величины.
32. Часть электронной лампы.
34. Коллектив французских математиков.
35. Пособие.
37. Наречие, характеризующее порядок следования.
40. Посредник.
42. Единица измерения вязкости жидкости.
43. Яркий источник света.
45. Светлое пятно.
47. Минеральное вещество.

НОМЕР
3

В номере:

Экономика и линейные неравенства *1* *А. Б. Каток*

Преобразование электрических цепей *10* *А. Р. Зильберман*

Нравится ли вам возиться с целыми числами! *15* *М. И. Башмаков*

Удивительные катки *21* *Б. Ю. Коган*

Математический кружок

Полуправильные многоугольники *25* *Л. М. Лоповок*

Задачник «Кванта»

Задачи *30*

Решения задач М26—М28; Ф35—Ф40 *32* *Н. Б. Васильев, А. Н. Виленкин, И. Ш. Слободецкий*

Практикум абитуриента

Показательные уравнения *40* *В. В. Гольдберг*

Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году *45* *Н. Н. Колесников*

Письменный экзамен по физике в Московском автодорожном институте *51* *А. Н. Агеев, Ю. Г. Рудой*

Новости физики *57*

Рецензии, библиография

Если вам нужно что-нибудь посчитать... *57* *Р. С. Гутер*

Чародей с Плуталовой улицы *58* *Г. И. Мишкевич*

Ответы, указания, решения *62*

Уголок коллекционера

Марки, посвященные Н. Е. Жуковскому *64* *А. В. Алтыкис*

«Квант» для младших школьников *3-я стр. обложки*

Кроссворд *4-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

Экономика И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

А. Б. Каток

В настоящее время математика находит все большее применение в экономике. Существует ряд математических методов, помогающих решать экономические задачи. В этой статье мы расскажем вам об одном из таких методов — методе линейного программирования.

Трудно найти человека, который бы не слышал о том, что в последнее время математические методы много и успешно используются при решении экономических задач.

Менее известно, что математическая экономика имеет довольно почтенный возраст. Она возникла около полутора столетий назад, но долгое время не привлекала к себе особенного внимания. К концу прошлого века было опубликовано лишь несколько десятков работ по математической экономике. В настоящее время в различных странах ежегодно выпускаются тысячи книг и статей на эту тему. В чем причина такого резкого роста популярности математической экономики? Очень упрощенно, она состоит в том, что раньше математику пытались использовать только для описания экономических явлений (а такие вопросы волнуют обычно лишь узкий круг специалистов), а теперь математика используется также для выяснения того, как лучше организовать тот или иной производственный процесс. Впервые задача такого рода была рассмотрена в 1939 году советским математиком академиком Л. В. Канторовичем в связи со следующим практическим вопросом, поставленным работниками Ленинградского фанерного треста.

Один из заводов этого треста выпускал пять видов изделий. В плане было указано, какой процент в общем выпуске должны составлять изделия каждого вида. Завод имел восемь станков, каждый из которых мог изготовлять любой из пяти видов изделий с известной производительностью. Требовалось распределить работу между станками так, чтобы выпуск продукции был наибольшим.

При решении этой задачи Л. В. Канторович разработал метод, названный методом линейного программирования. Этот метод оказался полезен, так как многие экономические задачи, казалось бы не связанные между собой, будучи переформулированы на языке математики, оказываются похожими на эту задачу и решаются аналогичными методами.

Задача «фанерного треста» довольно сложна, и потому для уяснения идей, лежащих в основе метода линейного программирования, приведем несколько более простых задач.

1. Задача о велосипедах. На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так,

что вместо двух дорожных велосипедов завод может выпустить один гоночный, причем гоночный велосипед приносит в 1,5 раза больше прибыли. Завод может произвести 700 дорожных велосипедов в день, однако склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпускать в день гоночных и сколько дорожных велосипедов для того, чтобы завод получал максимальную прибыль?

2. Задача о карьерах. В пунктах A и B расположены кирпичные заводы, а в пуктах C и D — карьеры, снабжающие их песком. Потребность заводов в песке не больше производительности карьеров. Известно, сколько песка нужно каждому из заводов и сколько его добывают в каждом из карьеров. Кроме того, известно, сколько стоит перевозка тонны песка из каждого карьера до заводов. Нужно организовать снабжение заводов песком так, чтобы затраты были наименьшими. (Подобные задачи называются транспортными.)

3. Задача о корме для цыплят. Птицеферма занимается откармливанием цыплят. Предположим для простоты, что кормом могут служить два продукта — пшеница и горох. Для того чтобы цыпленок нормально рос, его ежедневный рацион должен содержать не меньше определенного количества калорий, а также белков, жиров и углеводов. Эти количества устанавливаются специалистами по птицеводству, и мы их должны рассматривать как заданные. Пусть известно, сколько калорий, белков, жиров и углеводов содержится в одном грамме пшеницы и в одном грамме гороха, известна также цена каждого вида корма. Как составить наиболее дешевый, но полноценный рацион?

В каждой из приведенных задач нужно произвести оптимальный выбор, хотя в каждой задаче он понимается по-разному.

Для того чтобы увидеть, какие математические вопросы возникают при решении таких задач, разберем подробно задачу о корме для цыплят.

Для анализа этой задачи вполне достаточно тех сведений, которые входят в школьный курс, а все вычисления можно без труда провести, пользуясь карандашом и бумагой.

Пусть в одном грамме пшеницы содержится a_1 калорий, в одном грамме гороха — b_1 калорий, а минимальное необходимое число калорий в дневном рационе равно c_1. Будем изображать меню, содержащее x граммов пшеницы и y граммов гороха, точкой (x, y) на плоскости. Попытаемся выделить на плоскости те точки, которые отвечают рационам, содержащим не менее c_1 калорий. Так как меню, состоящее из x граммов пшеницы и y граммов гороха, содержит a_1x+b_1y калорий, то для таких точек выполняется неравенство

$$a_1x+b_1y\geqslant c_1.$$

Из школьного курса алгебры вам известно, что точки, для которых $a_1x+b_1y=c_1$, лежат на прямой l_1, проходящей через точки $\left(0, \frac{c_1}{b_1}\right)$ и $\left(\frac{c_1}{a_1}, 0\right)$. Эта прямая разбивает плоскость на две части. Для точек (x, y), лежащих по одну сторону от прямой l_1, выполняется неравенство $a_1x+b_1y>c_1$, а для точек, лежащих по другую сторону,— неравенство $a_1x+b_1y<c_1$. Каждая из этих частей вместе с самой прямой l_1 называется *полуплоскостью*. Таким образом, одна полуплоскость состоит из всех точек (x, y), для которых

$$a_1x+b_1y\geqslant c_1,$$

а другая — из точек, для которых

$$a_1x+b_1y\leqslant c_1.$$

Так как в нашем случае a_1 и b_1 — положительные числа, то первая полуплоскость — это полуплоскость L_1,

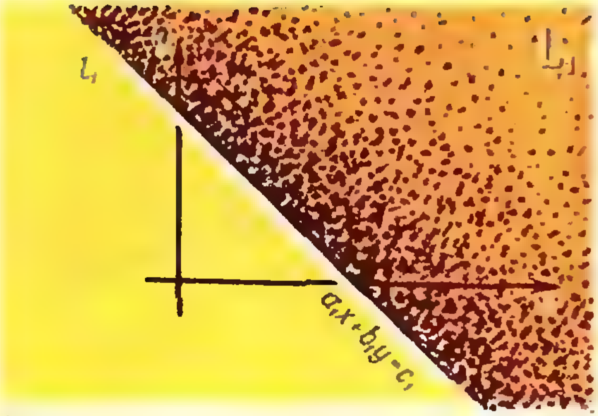


Рис. 1.

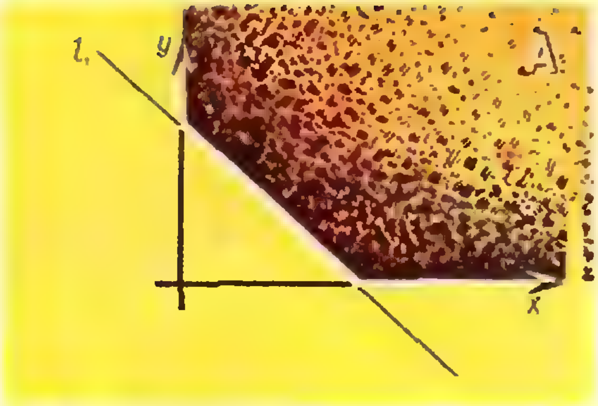


Рис. 2.

которая выделена на рисунке 1. Кроме того, из условия нашей задачи ясно, что x и y — неотрицательные числа (нельзя же давать цыпленку отрицательное количество корма). Условию $x\geqslant 0$ удовлетворяют точки правой полуплоскости (ограниченной осью ординат), условию $y\geqslant 0$ удовлетворяют точки верхней полуплоскости (ограниченной осью абсцисс), а рационам, содержащим не менее c_1 калорий, отвечают точки (x, y), для которых одновременно выполнены три неравенства:

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ a_1x+b_1y\geqslant c_1, \end{cases} \qquad (1)$$

то есть точки, лежащие в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскости L_1. На рисунке 2 выделено множество точек, соответствующих решениям системы неравенств (1). Перейдем к другим ограничениям. Если один грамм пшеницы содержит a_2 граммов белков, один грамм гороха — b_2 граммов белков, а дневной рацион цыпленка должен содержать не менее c_2 граммов белков, то, очевидно, достаточное количество белка содержат те рационы из x граммов пшеницы и y граммов гороха, для которых

$$a_2x+b_2y\geqslant c_2.$$

Соответствующие этим рационам точки лежат в полуплоскости L_2, ограниченной прямой l_2, которая задается уравнением $a_2x+b_2y=c_2$. Точно так же рацион должен удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} a_3x+b_3y\geqslant c_3, \\ a_4x+b_4y\geqslant c_4, \end{cases}$$

где a_3 и a_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме пшеницы, b_3 и b_4 — количество жиров и углеводов в одном грамме гороха, c_3 и c_4 — минимальные количества жиров и углеводов в дневном рационе цыпленка. (Все величины измеряются в граммах.) Точки (x, y), удовлетворяющие первому из этих двух неравенств, лежат в полуплоскости L_3, а точки, удовлетворяющие второму неравенству, — в полуплоскости L_4. Рацион, содержащий достаточное количество всех компонентов (калорий, белков, жиров и углеводов), мы назовем допустимым. Таким образом, допустимыми будут те рационы, состоящие из x граммов пшеницы и y граммов гороха, которые удовлетворяют системе из шести линейных неравенств

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ a_1x+b_1y\geqslant c_1, \\ a_2x+b_2y\geqslant c_2, \\ a_3x+b_3y\geqslant c_3, \\ a_4x+b_4y\geqslant c_4. \end{cases} \qquad (2)$$

Соответствующие допустимым рационам точки плоскости лежат в пересечении правой полуплоскости, верхней полуплоскости и полуплоскостей L_1, L_2, L_3, L_4, то есть внутри или на границе фигуры (бесконечного мно-

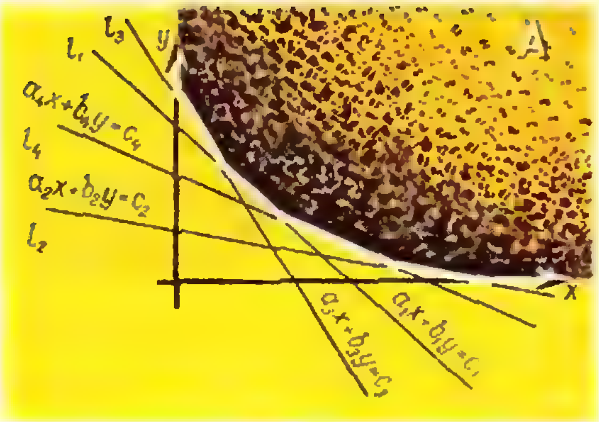


Рис. 3.

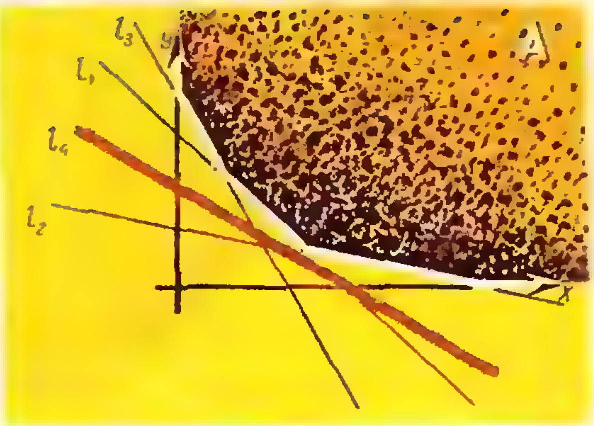


Рис. 4.

гоугольника) A, выделенной на рисунке 3.

На этом рисунке изображен тот случай, когда каждое неравенство в системе (2) существенно, то есть для каждого из шести неравенств найдется решение системы остальных пяти неравенств, не удовлетворяющее этому неравенству. Другой возможный случай изображен на рисунке 4.

Геометрически это означает, что одна из прямых (на рис. 4 — прямая l_4) лежит вне множества A, а алгебраически, что система (2) эквивалентна системе, из которой исключено одно из неравенств (в нашем случае — последнее неравенство). Всюду в дальнейшем, чтобы не делать специальных оговорок, мы будем предполагать, что имеет место случай, изображенный на рисунке 3.

Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти точки. На рисунке 5, *а* изображены некоторые выпуклые, а на рисунке 5, *б* — невыпуклые множества.

Полуплоскость — выпуклое множество, а так как пересечение любого числа выпуклых множеств — также выпуклое множество, то и множество A выпуклое.

Теперь постараемся выбрать из всех допустимых рационов самый дешевый. Пусть 1 грамм пшеницы стоит p копеек, а 1 грамм гороха — q копеек. Тогда рацион из x граммов пшеницы и y граммов гороха стоит $px+qy$ копеек. Таким образом, цена является *линейной функцией* от x и y, а задача нахождения самого дешевого рациона состоит в нахождении среди всех пар чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств (2), таких пар, для которых значение этой линейной функции достигает минимума. Другими словами, нужно найти те из точек множества A, в которых функция $px+qy$ достигает наименьшего значения из всех значений, принимаемых этой функцией в точках множества A.

Множество точек (x, y) плоскости, для которых выражение $px+qy$ равно некоторому числу k, является пря-

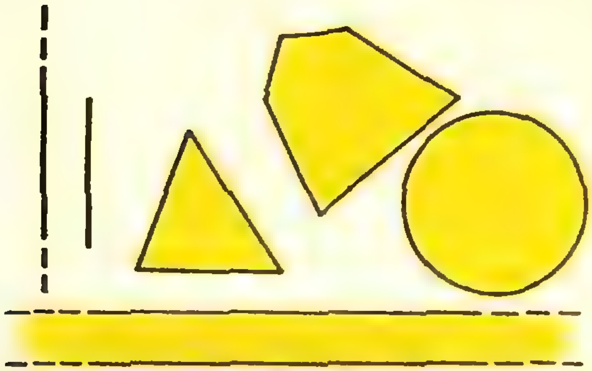


Рис. 5, *а*.

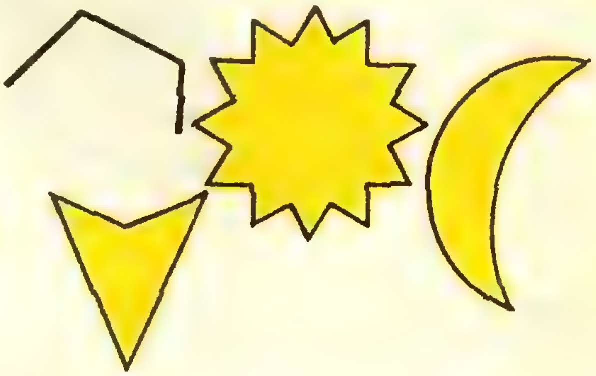


Рис. 5, *б*.

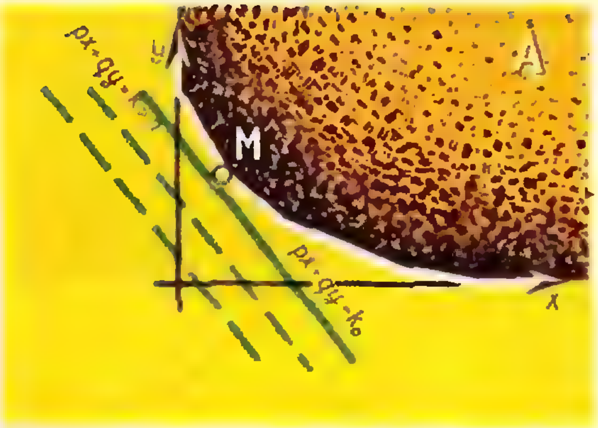


Рис. 6.

мой. При разных k такие прямые параллельны. При отрицательных и достаточно малых положительных значениях k эта прямая не пересекает множества A и, следовательно, не существует допустимого рациона ценой в k копеек. Если увеличивать значения k, начиная, например, с $k=0$, то прямая, задаваемая уравнением

$$px+qy=k,$$

будет смещаться вправо (см. рис. 6). Наконец, при некотором значении $k=k_0$ прямая $px+qy=k_0$ впервые пересечет множество A, «наткнувшись» на одну из его вершин (точка M на рис. 6) или сразу на целую сторону (это может произойти, если прямые $px+qy=k$ параллельны одной из прямых l_1, l_2, l_3, l_4 или, что то же самое, если отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4};$$

см. дальше, рис. 8).

Прямая называется *опорной* к выпуклому множеству на плоскости, если это множество целиком лежит в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость, и в то же время по крайней мере одна точка множества лежит на прямой. Таким образом, уравнение $px+qy=k_0$ задает опорную прямую к множеству A.

Разберем теперь по отдельности два случая, о которых говорилось выше. Предположим сначала, что отношение $\frac{p}{q}$ не равно ни одному из отношений

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4}.$$

Тогда точка $M=(x_0,\ y_0)$ является *единственным решением задачи о самом дешевом допустимом рационе.* В самом деле, любая другая точка множества A лежит в полуплоскости K, задаваемой неравенством $px+qy\geqslant k_0$, и, следовательно, соответствует более дорогому рациону. Сторонами бесконечного многоугольника A служат лучи осей координат и отрезки прямых l_1, l_2, l_3, l_4. Поэтому на каждой из этих сторон одно из шести неравенств системы (2) превращается в равенство, а в каждой вершине многоугольника A превращаются в равенства два неравенства системы (2). В случае, изображенном на рисунке 6, точка M лежит на пересечении прямых l_1 и l_3 (см. рис. 3); следовательно,

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1,\\ a_3x_0+b_3y_0=c_3,\end{cases}$$

откуда

$$x_0=\frac{b_1c_3-b_3c_1}{a_3b_1-a_1b_3};\quad y_0=\frac{c_1a_3-a_1c_3}{a_3b_1-a_1b_3}.$$

Зато остальные четыре неравенства в этой точке выполняются в строгом смысле, то есть со знаком «больше», а не «равно». Это означает, что рацион, состоящий из x_0 граммов пшеницы и y_0 граммов гороха, содержит минимально необходимое количество калорий и жиров, но избыточное количество белков и углеводов (если бы точка M лежала на пересечении других прямых, то вывод бы соответственно изменился).

Если бы специалисты по птицеводству решили, что цыплятам требуется немного больше чем c_2 граммов белков или немного больше чем c_4 граммов углеводов в день, то найденный нами самый дешевый рацион отвечал бы и этим новым требованиям (в самом деле, это означало бы, что прямые l_2 или l_4 немного сдвинулись бы вправо, но если такой сдвиг достаточно мал, то точка M все равно останется вершиной уменьшившегося многоугольника A). Однако если потребуется давать цыплятам чуть-чуть более калорийную пищу или чуть-чуть больше чем c_3

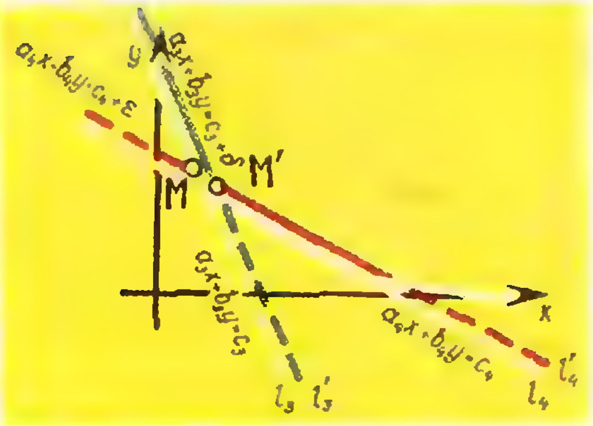


Рис. 7.

граммов жиров в день, то задачу о самом дешевом рационе придется решать заново, так как рацион, соответствующий точке M, перестанет быть допустимым, а самый дешевый рацион станет дороже (см. рисунок 7, где при усиленном требовании $a_3x+b_3y \geqslant c_3+\delta$ самому дешевому рациону отвечает точка M', лежащая внутри полуплоскости K).

Рассмотрим теперь случай, когда отношение $\frac{p}{q}$ равно одному из четырех отношений, например $\frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 8). В этом случае прямая $px+qy=k_0$ совпадает с прямой l_1. Все точки множества A, за исключением точек отрезка M_1M_2, лежат внутри полуплоскости K, и, следовательно, рацион, соответствующий любой точке отрезка M_1M_2, является самым дешевым допустимым рационом. Таким образом, среди точек, соответствующих решениям задачи о самом дешевом рационе, всегда имеются вершины многоугольника A.

Немного теории

Для нахождения решения достаточно сравнить значения функции $px+qy$ во всех вершинах. Если среди этих значений имеется одно, которое меньше всех остальных, то соответствующая вершина является единственным решением задачи; если значения в двух вершинах равны и меньше значений в остальных вершинах, то эти вершины обязательно соседние, и все точки стороны, соединяющей эти вершины, служат решениями задачи. Будем для краткости называть

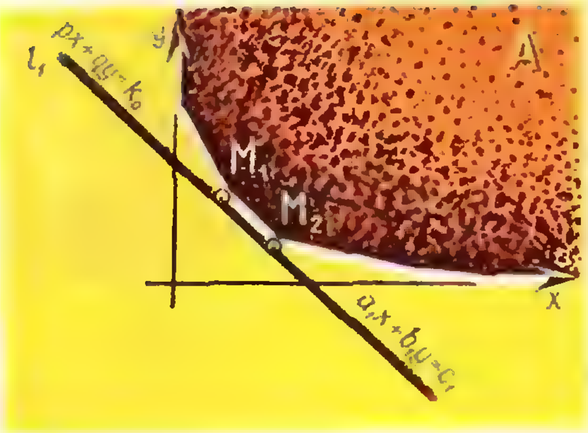


Рис. 8.

острый угол, образуемый прямой с осью абсцисс, углом наклона прямой. Если двигаться по границе множества допустимых точек, начиная с луча оси абсцисс в сторону луча оси ординат, то каждая следующая сторона лежит на прямой с бо́льшим углом наклона, чем предыдущая. Тангенсы этих углов тоже будут возрастать. Тангенс угла наклона α прямой $ax+by=c$ ($a>0$, $b>0$) равен $\frac{a}{b}$. (Если $b=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и принято считать, что $\operatorname{tg}\alpha$ равен бесконечности.)

Пусть опорная прямая проходит через вершину M множества допустимых точек и угол наклона этой прямой равен β, а углы наклона прямых, на которых лежат стороны, прилегающие к вершине M, равны α_1 и α_2. Тогда угол β больше одного из этих углов и меньше другого (см. рис. 9).

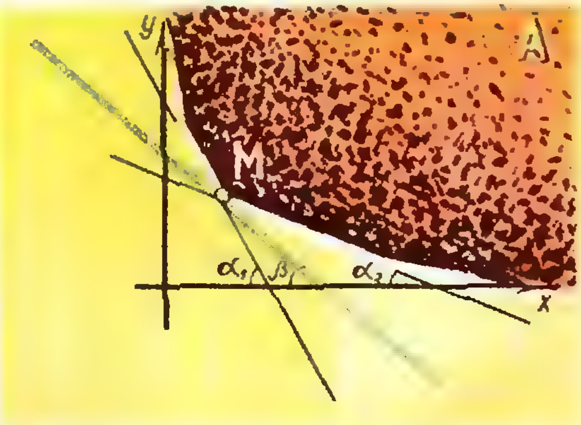


Рис. 9.

Таким образом, для того чтобы найти вершину, через которую проходит опорная прямая данного направления, нужно сравнить угол наклона прямых данного направления с углами наклона прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек, и выбрать такие две соседние стороны, между углами наклона которых лежит угол β. Точка пересечения этих сторон и будет искомой вершиной. Если угол β совпадает с углом наклона одной из сторон, то искомая опорная прямая совпадает с прямой, на которой лежит эта сторона. Вместо сравнения углов наклона можно сравнить их тангенсы, что значительно удобнее, так как тангенс угла наклона просто выражается через коэффициенты уравнения прямой.

Численные примеры

1. Среди решений системы линейных неравенств $2x+y\geqslant 10$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 8$, $3x+7y\geqslant 42$, $x+5y\geqslant 20$ найти такие, для которых линейная функция $4x+3y$ достигает минимума*).

Таблица 1

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y=0$		0
$x+5y=20$	$(0,4)$, $(20,0)$	$\frac{1}{5}$
$3x+7y=42$	$(0,6)$, $(14,0)$	$\frac{3}{7}$
$x+y=8$	$(0,8)$, $(8,0)$	1
$2x+y=10$	$(0,10)$, $(5,0)$	2
$x=0$		∞
$4x+3y=c$	$\left(0, \frac{3}{c}\right)$, $\left(\frac{c}{4}, 0\right)$	$\frac{4}{3}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 10, из которого видно, что сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки всех четырех прямых: $x+5y=20$, $3x+7y=42$, $x+y=8$, $2x+y=10$.

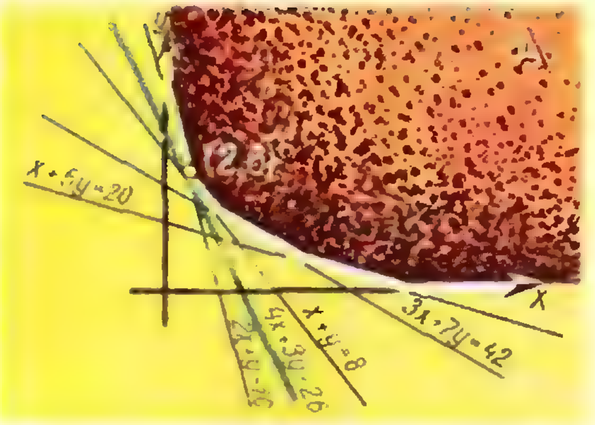


Рис 10

Опорная прямая с тангенсом угла наклона $\frac{4}{3}$ должна проходить через вершину, лежащую на пересечении пары соседних сторон, одна из которых имеет тангенс угла наклона меньше $\frac{4}{3}$, а другая — больше $\frac{4}{3}$. Такую пару образуют стороны, лежащие на прямых

$$x+y=8 \quad \text{и} \quad 2x+y=10,$$

с тангенсами углов наклона 1 и 2 соответственно. Таким образом, координаты искомой вершины определяются из системы

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 2x+y=10, \end{cases}$$

откуда $x=2$, $y=6$. Значение функции $4x+3y$ в этой точке равно $4\cdot 2+3\cdot 6=26$, а опорная прямая определяется уравнением $4x+3y=26$.

Для сравнения вычислим значения функции $4x+3y$ во всех остальных вершинах множества допустимых точек (см. таблицу 2 на стр. 8).

2. Среди решений системы линейных неравенств $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $3x+y\geqslant 15$, $3x+4y\geqslant 36$, $x+2y\geqslant 12$, $2x+8y\geqslant 32$ найти такие, для которых функция $3x+12y$ достигает минимума.

---

*) Численные данные этого примера никак не связаны с величинами, которые задаются в задаче о корме для цыплят.

Таблица 2

Уравнения прямых, на пересечении которых лежит вершина	Координаты вершины		Значения функции $4x+3y$ в вершине
	x	y	
$x=0,\ 2x+y=10$	0	10	$4\cdot0+3\cdot10=30$
$2x+y=10,\ x+y=8$	2	6	$4\cdot2+3\cdot6=26$
$x+y=8,\ 3x+7y=42$	3,5	4,5	$4\cdot3{,}5+3\cdot4{,}5=27{,}5$
$3x+7y=42,\ x+5y=20$	8,75	2,25	$4\cdot8{,}75+3\cdot2{,}25=41{,}75$
$x+5y=20,\ y=0$	20	0	$4\cdot20+3\cdot0=80$

Таблица 3

Уравнение прямой	Точки на осях координат, через которые проходит прямая	Тангенс угла наклона прямой
$y=0$		0
$2x+8y=32$	(0,4), (16,0)	$\frac{1}{4}$
$x+2y=12$	(0,6), (12,0)	$\frac{1}{2}$
$3x+4y=36$	(0,9), (12,0)	$\frac{3}{4}$
$3x+y=15$	(0,15), (5,0)	3
$x=0$		∞
$3x+12y=c$	$\left(0,\ \frac{c}{12}\right)$, $\left(\frac{c}{3},\ 0\right)$	$\frac{1}{4}$

Множество допустимых точек изображено на рисунке 11, из которого видно, что прямая $x+2y=12$ лежит целиком вне этого множества. Таким образом, сторонами этого множества служат лучи осей координат и отрезки трех оставшихся прямых. Так как тангенс угла наклона прямых $3x+12y=c$ совпадает с тангенсом угла наклона одной из прямых, на которых лежат стороны множества допустимых точек (прямой $2x+8y=32$), то опорная прямая совпадает с этой прямой. Решениями задачи служат все точки стороны, лежащей на этой прямой. Концами этой стороны служат вершины, лежащие в точках пересечения прямой $2x+8y=32$ с соседними прямыми — $y=0$ и $3x+4y=36$ (напомним, что прямую $x+2y=12$ мы исключили из рассмотрения).

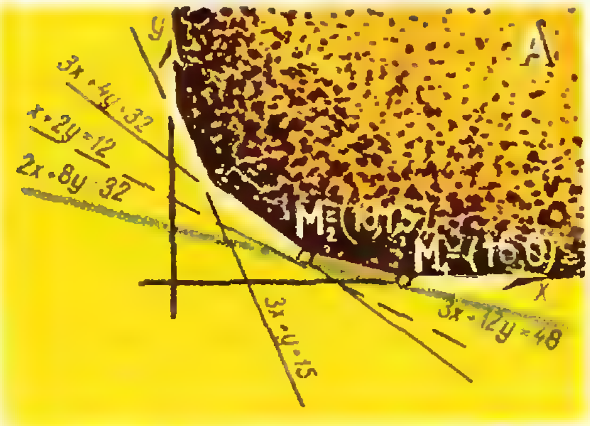


Рис. 11.

Итак, координаты $(x_1,\ y_1)$ первой вершины M_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+8y_1=32, \\ y_1=0, \end{cases}$$

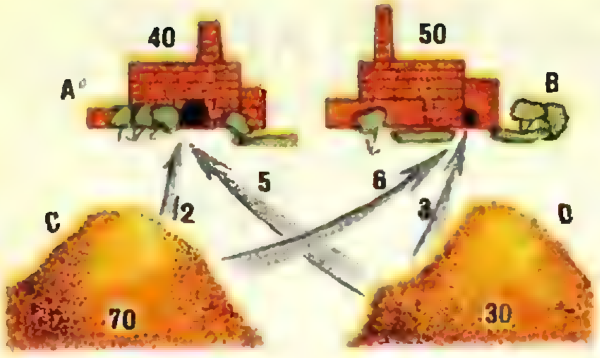


Рис. 12.

откуда $x_1=16$, $y_1=0$, а координаты $(x_2,\ y_2)$ второй вершины M_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_2+8y_2=32, \\ 3x_2+4y_2=36, \end{cases}$$

откуда $x_2=10$, $y_2=1{,}5$.

Решениями задачи служат все точки отрезка M_1M_2, другими словами, точки вида $(16\lambda+10\,(1-\lambda),\ 1{,}5\cdot(1-\lambda))=(10+6\lambda,\ 1{,}5-1{,}5\lambda)$, где λ — любое число между 0 и 1. Значение функции $3x+12y$ во всех точках отрезка M_1M_2 равно 48.

Упражнения*)

1. Решите «задачу о велосипедах».
2. Решите «задачу о карьерах» с данными, приведенными на рисунке 12.
3. Как изменится множество допустимых точек в задаче о самом дешевом рационе, если потребовать дополнительно, чтобы вес рациона не превосходил s грамм? Может ли такое ограничение повлиять на решение?
4. Доказать, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно представить как множество решений системы линейных неравенств.
5. Пусть $\frac{p}{q}=\frac{a_1}{b_1}$ (см. рис. 3 и 8). Как в этой ситуации изменятся решения задачи о самом дешевом рационе, если заменить в системе (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } c_1 \text{ на } c_1+\delta, \\ \text{б) } c_2 \text{ на } c_2+\delta, \\ \text{в) } c_n \text{ на } c_n+\delta; \end{array}\right\} \begin{array}{l}\delta \text{ — положительное, но} \\ \text{очень маленькое число?}\end{array}$$

---

*) Ответы к этим упражнениям будут помещены в следующем номере.

КВАРЦ ВОЛОСАТЫЙ

В природе издавна известен камень, называвшийся в России «кварц волосатый». Это прозрачный кристалл кварца, пронизанный блестящими золотыми нитями (см. рисунок на обложке).

Плиний назвал эти нити «Волосами Венеры», а на востоке их называли «Волосами Магомета» и камень считали священным. В настоящее время эти «волосы», или, как их теперь называют, нитевидные кристаллы, выращиваются в лабораторных условиях. Исследования с помощью электронного микроскопа показали, что «Волосы Венеры» не что иное, как очень тонкие и длинные кристаллы окисла титана (TiO_2 — рубин), представляющие собой трубки прямоугольного сечения с толщиной стенок 1—2 *мк* (см. фотографию).

Нитевидные кристаллы обладают целым рядом очень интересных свойств, одно из которых — высокая прочность — дает возможность создавать на их основе новые, так называемые композиционные материалы.

М. А. Голосова

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Р. Зильберман

В этой статье рассказывается о методе, позволяющем упрощать сложные задачи по расчету электрических цепей.

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из сопротивлений, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене, и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Следовательно, если мы хотим подсчитать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой эквивалентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

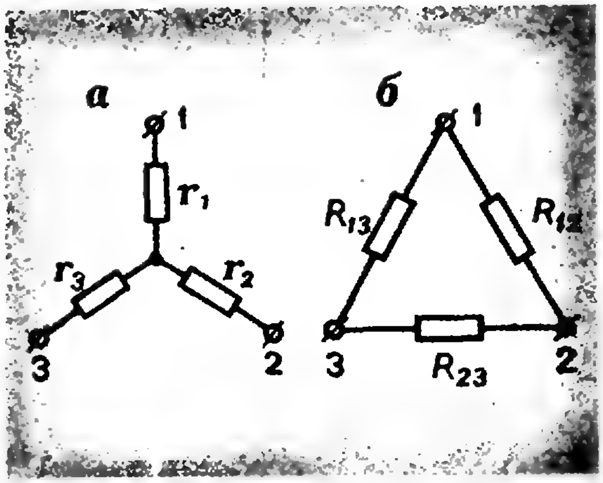


Рис. 1.

С подобными заменами вы уже встречались.

Пусть, например, в схеме два сопротивления r_1 и r_2 включены последовательно, их мы можем заменить одним, равным по величине сумме $r_1 + r_2$. Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна $R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Это простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода — «звезда» (рис. 1, *а*) и «треугольник» (рис. 1, *б*).

Немного непривычные обозначения (рис. 1, *б*) очень удобны, индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление R_{13} включено между точками *1* и *3* и т. д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между r и R, чтобы сопротивления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезды» (рис. 1, *а*) сопро-

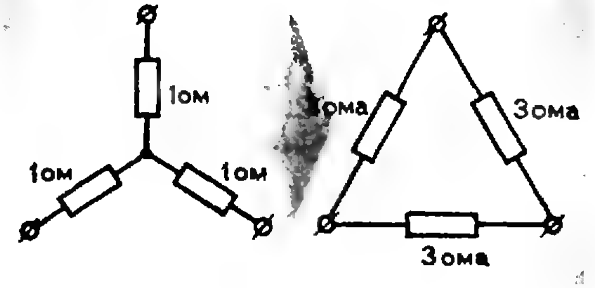


Рис. 2.

тивление между точками 1 и 2 равно r_1+r_2, а в схеме «треугольника» (рис. 1, *б*) оно равно

$$\frac{R_{12}(R_{13}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Следовательно, для того чтобы сопротивления между точками 1 и 2 были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1+r_2=\frac{R_{12}(R_{13}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (1)$$

Аналогично для точек 2 и 3:

$$r_2+r_3=\frac{R_{23}(R_{12}+R_{13})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}, \qquad (2)$$

и для точек 1 и 3:

$$r_1+r_3=\frac{R_{13}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (3)$$

Эта система уравнений легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$r_1+r_2+r_3=$$

$$=\frac{R_{12}R_{13}+R_{12}R_{23}+R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (4)$$

Вычтя теперь из уравнения (4) уравнение (2), получим

$$r_1=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Аналогично найдем, что

$$r_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad \text{и}$$

$$r_3=\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

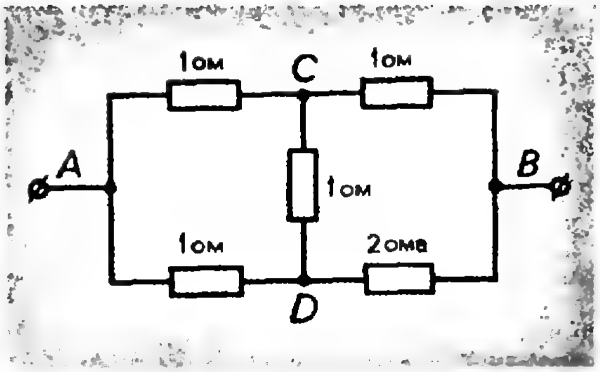


Рис. 3.

Эти результаты легко запомнить: знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева: $r_1 \to R_{12}R_{13}$, $r_2 \to R_{12}R_{23}$, $r_3 \to R_{13}R_{23}$.

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_3},$$

$$R_{13}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_2},$$

$$R_{23}=\frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить — числитель всюду один и тот же, а в знаменателе как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Так, например, звезду с сопротивлениями в 1 ом (рис. 2) можно заменить треугольником с сопротивлениями в 3 ома.

Решим теперь задачу. *Найти сопротивление между точками A и B в схеме на рисунке 3.*

Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» не уравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи уравнений Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих уравнений очень громоздкие — в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим

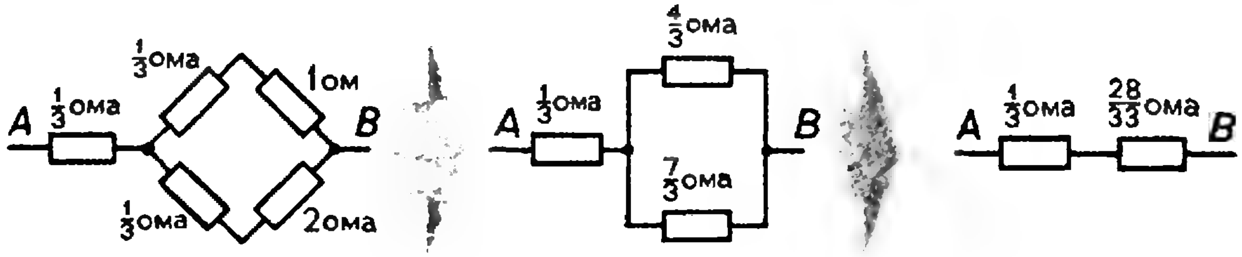


Рис. 4.

«треугольник» ACD «звездой», как показано на рисунке 4.

Теперь ясно, что сопротивление между точками A и B будет равно

$$\frac{1}{3}+\frac{28}{33}=\frac{13}{11}\text{ ома.}$$

Мы заменяли «треугольник» ACD «звездой», но можно было решать задачу иначе — заменяя «звезду» ADB «треугольником».

Пусть теперь к точкам A и B подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и с э. д. с. $E=1$ *в*. Нужно найти ток через участок CB.

Преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление CB. Подойдет то преобразование, которое мы делали раньше (рис. 4).

Используя то, что $R_{AB}=\frac{13}{11}$ ома, получим $I=\frac{E}{R_{AB}}=\frac{11}{13}$ *а*. После разветвления токи поделятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{7}{4}.$$

При этом $I_1+I_2=I$. (I — ток до разветвления, I_1 — ток в верхней ветви, I_2 — ток в нижней ветви).

Отсюда

$$I_1=\frac{7}{13}\ a$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок CD. Для этого пришлось бы еще найти ток, идущий через участок AC, а затем вычесть из него найденный уже ток, идущий через участок CB.

Можно еще немного усложнить задачу — учесть внутреннее сопротивление батареи. Тогда полный ток $I=\frac{E}{r+R_{AB}}$, а остальные токи находятся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: *при каком соотношении между величинами сопротивлений r и R сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рисунке* 5, *максимально в крайнем положении движка потенциометра?*

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник» ACD «звездой» (рис. 6).

Очевидно, что сопротивление r не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления: $5r+R_1$ и $7r+R_2$, где R_1 и R_2 — сопротивления соответственно верхней и нижней частей по-

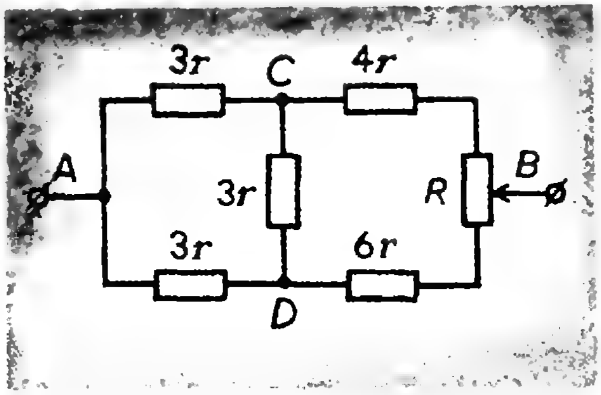


Рис. 5.

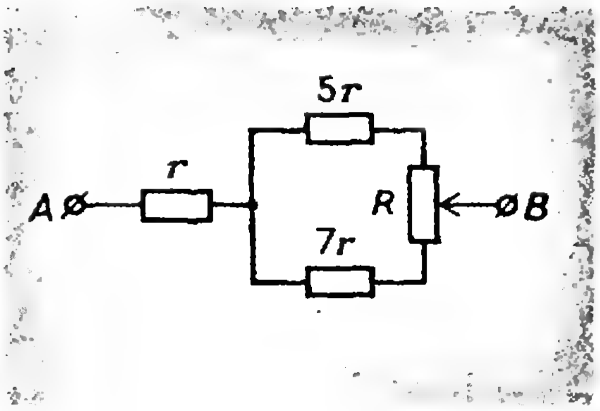


Рис. 6.

тенциометра. Причем сумма сопротивлений $5r+R_1$ и $7r+R_2$ остается постоянной. Посмотрим, какими они должны быть, чтобы полное сопротивление было максимальным. Обозначим $5r+R_1$ через r_1 и $7r+R_2$ через r_2. Тогда общее сопротивление включенных параллельно частей схемы $r_0=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$. Если учесть, что $r_1+r_2=\text{const}=c$, то сопротивление r_0 выразится так: $\frac{r_1(c-r_1)}{c}$. Это выражение максимально, когда максимален числитель. Но $y=(cr_1-r_1^2)$ — это уравнение параболы (рис. 7), ветви которой пересекают ось абсцисс в точках O и c. Поэтому числитель дроби наибольший при $r_1=\frac{c}{2}$. Так как $r_1+r_2=c$, то это означает, что сопротивление между точками A и B максимально, если $r_1=r_2$, то есть $5r+R_1=7r+R_2$, или $R_1-R_2=2r$.

Ясно, что это возможно лишь в том случае, если сопротивление всего потенциометра $R=R_1+R_2$ не меньше чем $2r$. В противном же случае максимум сопротивления между точками A и B достигается, когда движок потенциометра находится в крайнем положении.

Итак, ответ: $R\leqslant 2r$.

Метод, о котором мы рассказали, очень удобен для последовательного преобразования сложной схемы к простому виду. Он позволяет рассчитать практически любую сложную цепь, состоящую из сопротивлений.

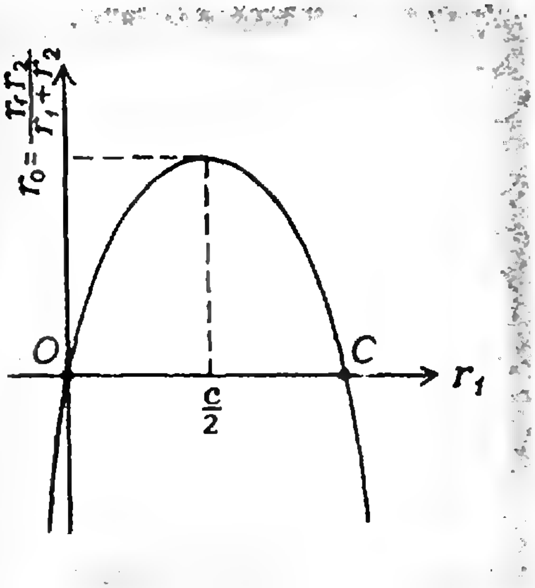


Рис. 7

Этот метод можно применять к цепям, содержащим не только сопротивления.

Обратите внимание на то, что мы вообще не говорили нигде о физических процессах в цепи, а пользовались только формальным выражением для закона Ома: $U=r\cdot I$. Из него следует, что при последовательном соединении сопротивлений их величины складываются, а при параллельном — складываются величины, обратные сопротивлениям $\left(\frac{1}{r_{\text{общ}}}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. Понятно, что если какие-нибудь другие физические величины связаны законом, аналогичным закону Ома, то все наши выводы справедливы и для них.

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором (рис. 8). Мы знаем, что $Q=C\cdot U$, или $U=\frac{1}{C}Q$.

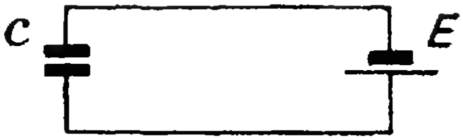


Рис. 8.

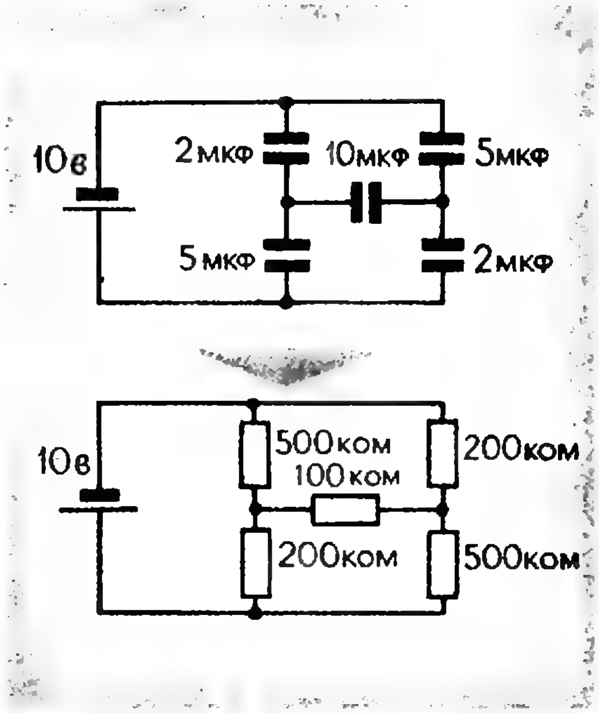


Рис. 9.

Сравним это с выражением для закона Ома $U = r \cdot I$.

Видно, что законы похожи, только вместо тока стоит заряд, а вместо сопротивления — величина, обратная емкости. Это означает, что для того, чтобы найти, скажем, заряды на конденсаторах, можно поступить так. Вместо цепи, содержащей конденсаторы, нарисовать цепь, содержащую сопротивления, причем конденсатор емкостью x фарад заменить сопротивлением $r = \frac{1}{x}$ *ом*. После того, как мы рассчитаем токи в цепи из сопротивлений, можно сразу написать, каковы заряды на конденсаторах: если по сопротивлению течет ток $I = y$ ампер, то на соответствующем конденсаторе будет заряд $Q = y$ кулонов.

Э. д. с. батарей при таком преобразовании цепи остаются без изменения. Но, разумеется, в цепи с конденсаторами внутренние сопротивления батарей не влияют на результат. Поэтому, преобразуя цепь, нам придется лишить батареи их внутренних сопротивлений.

Пусть, например, нужно найти заряд на конденсаторе емкостью 10 *мкф* (рис. 9). Конденсатору $C = 2$ *мкф* $= 2 \cdot 10^{-6}$ *ф* соответствует сопротивление $r = 5 \cdot 10^5$ *ом* $= 500$ *ком*. Далее расчет проводится уже совсем просто.

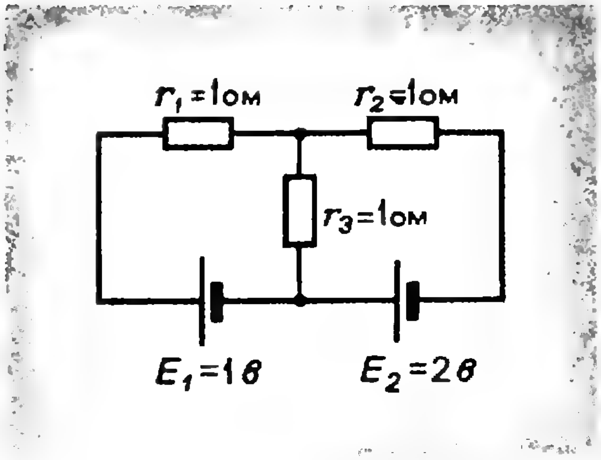


Рис. 10.

Таким образом, метод преобразования цепей, как мы видим, пригоден и для схем из конденсаторов.

Упражнения

1. Найти ток через сопротивление r_3 в схеме, показанной на рисунке 10. (Попробуйте найти сначала токи, текущие через батареи.)

2. Какой заряд протечет через батарею при замыкании ключа на схеме, приведенной на рисунке 11?

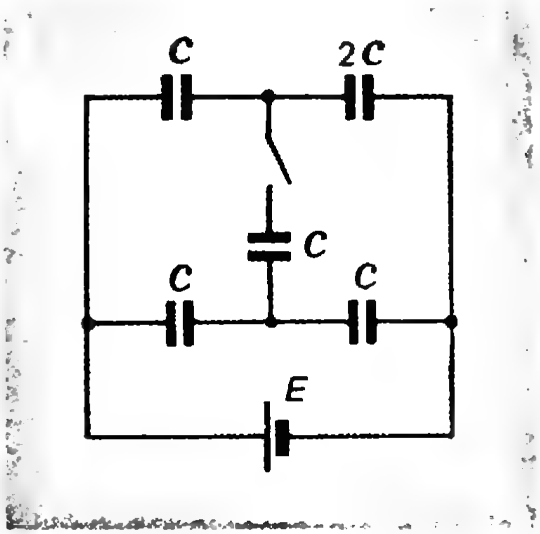


Рис. 11.

НРАВИТСЯ ЛИ ВАМ ВОЗИТЬСЯ С ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ?

М. И. Башмаков

Нескольким школьникам предложили ответить на такой вопрос: Узнать, верно или нет равенство $3^{100}+7^{100}=8^{100}$.

Через несколько минут все они ответили, что это равенство неверно. Вот наиболее типичные объяснения.

1) Посмотрим на последнюю цифру чисел, стоящих справа и слева. 3 в квадрате — это 9. 3 в кубе кончается на 7, в четвертой степени — на 1, в пятой — на 3, в шестой — на 9 и т. д. Через четыре степени последняя цифра повторяется, поэтому у числа 3^{100} последняя цифра та же, что у 3^4, то есть 1. Точно так же легко сосчитать, что у 7^{100} последняя цифра тоже 1, а у 8^{100}—6. Итак, у числа слева последняя цифра 2, а справа — 6. Следовательно, числа слева и справа различны.

2) $3+7$ больше, чем 8. Но $3^2+7^2=58$ меньше, чем $8^2=64$. Далее, $3^{100}+7^{100}=(3^2)^{50}+(7^2)^{50}<(3^2+7^2)^{50}=58^{50}<64^{50}=8^{100}$. Получили, что слева стоит число меньшее, чем справа.

3) Число, стоящее слева, делится на 2, но не делится на 4. Действительно, любое нечетное число в квадрате дает единицу в остатке от деления на 4: $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$. Сумма двух таких чисел $(3^{50})^2+(7^{50})^2$ дает в остатке 2. Справа же стоит число, делящееся на 4.

Похожи ли друг на друга приведенные доказательства? Легко заметить сходство первого и третьего: в том и в другом сравниваются остатки от деления на некоторое целое число, в одном — на 10 (последняя цифра), а в другом — на 4. Но найти аналогию между этими доказательствами и вторым совсем не так просто. Мы попробуем прояснить ее в конце этой статьи. Пока же научимся применять первый способ рассуждения к некоторым другим задачам.

Вычисления «по модулю»

Задача 1. Доказать, что уравнение $x^3=2+3y^2$ не имеет решений в целых числах.

Рассмотрим это уравнение «по модулю 9», то есть с точностью до слагаемых, кратных девяти *). Поскольку каждое целое число x имеет вид $3n$, $3n-1$ или $3n+1$, где n — целое, а $(3n\pm1)^3=27n^3\pm27n^2+9n\pm1=9k\pm1$, где k — целое число, то любое число в кубе или делится на 9, или дает при делении на 9 в остатке 1 или 8. Точно так же, поскольку

$$3(3n\pm1)^2=27n^2\pm18n+3,$$

$3y^2$ дает при делении на 9 остаток 0 или 3. Итак, правая часть нашего уравнения по модулю 9 может равняться только 2 или 5, а левая — только 0, 1 или 8, так что они не могут совпадать ни при каких целых x и y.

Самым трудным местом в таком решении является выбор «модуля», то есть того числа, остатки от деления на которое мы рассматриваем. Сами же вычисления «по модулю» проделать просто. Сформулируем основное правило этих вычислений: если при сложении (или при умножении) мы заменяем числа сравнимыми с ними по модулю k, то получаем число, сравнимое с суммой (или произведением) по модулю k. Иными словами, в равенстве, в котором фигурируют действия сложения и умножения, можно заменять числа на сравнимые с ними по модулю k всегда, когда в ответе мы интересуемся лишь остатком от деления на k.

---

*) Вообще, два целых числа a и b называют сравнимыми по модулю k, если разность $a-b$ делится на k. Тем, кто не знаком с этим понятием, мы советуем посмотреть статью А. А. Егорова «Арифметика остатков» в «Кванте» № 5, 1970.

То, что a и b сравнимы по модулю k, записывают так: $a \equiv b \pmod{k}$. Правила операций над сравнениями можно записать так:

$$\text{если } \begin{cases} a \equiv b \pmod{k}, \\ c \equiv d \pmod{k}, \end{cases}$$

$$\text{то } \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{k}, \\ ac \equiv bd \pmod{k}. \end{cases}$$

Напомним, что по определению $a \equiv b \pmod{k}$ означает, что $a - b = k \cdot q$*).

Займемся такой, довольно искусственной задачей.

Задача 2. Доказать, что равенство $1153^{60} + 211^{60} = 27027 \cdot 100^x + 2$ невозможно ни при каком целом x.

Ясно, что если по какому-либо модулю мы не получим равенства, то его не может быть и в обычном смысле. По модулю 2 никакого противоречия не обнаруживается — справа и слева стоят четные числа (нули по модулю 2). Займемся модулем 3. $1153 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 1153^{60} \equiv 1 \pmod{3}$; $211 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 211^{60} \equiv 1 \pmod{3}$. Справа $27027 \equiv 0 \pmod{3}$. Поэтому вся правая часть дает в остатке 2. Снова не получаем противоречия. Если у вас хватит терпения, убедитесь в том, что по модулю всех чисел до 16 включительно написанное равенство справедливо. (Вы заметите, что $27027 \cdot 100^x$, $x \geqslant 2$, делится на каждое из этих чисел, а слева будет получаться в остатке 2.)

Если вы будете последовательны, то по модулю 17 вы получите следующее равенство: $(-3)(-2)^x + 2 \equiv 0 \pmod{17}$. Перебирая подряд значения x (цикл здесь получится длины 8), вы ни разу не получите нужного равенства. Противоречие найдено.

Проделанные выкладки будят сразу много вопросов:

(1) Если равенство неверно, то можно ли это обнаружить по какому-либо модулю?

(2) Можно ли как-то указывать те модули, по которым более вероятно получение противоречия?

(3) Связано ли между собой поведение равенства по разным модулям?

Если идет речь о каком-то конкретном числовом равенстве (как это было у нас в самом первом примере), то, конечно, всегда найдется такое число, сравнивая по модулю которого мы нащупаем противоречие (например, можно взять число, большее обеих частей равенства). Гораздо более интересны равенства, в которых есть переменные (так было в двух последних примерах). Для уравнений в целых числах каждый из трех поставленных вопросов интересен и не всегда исследован до конца.

Немного недоказанного

Первые уравнения в целых числах, при решении которых появляются серьезные трудности, — это квадратные уравнения *). Издавна математики интересовались вопросами такого сорта: можно ли данное целое число представить в виде суммы двух квадратов? Оказалось, что разрешимость уравнений вида $x^2 + y^2 = a$ и других более общих, задаваемых многочленами второй степени, сводится к проверке разрешимости сравнений (положительный ответ на первый вопрос). Затем было доказано, что в проверке нуждаются лишь сравнения по некоторым модулям (в конечном числе), которые несложно определяются по уравнению. Так, в приведенном примере требуется проверка по всем делителям числа a^2, а также по модулю 8. (Двойка и ее степени играют особую роль в уравнениях степени 2.) Тем самым был получен ответ и на второй вопрос. Доказательство этих фактов вывело бы нас далеко за рамки настоящей статьи. Настойчивым и трудолюбивым читателям можно порекомендовать книгу З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел», в которой эта теория изложена со всеми деталями.

---

*) Будьте осторожны с делением сравнений. Если $ac \equiv bc \pmod{k}$, то не обязательно верно, что $a \equiv b \pmod{k}$. Например, $27 \equiv 3 \pmod{6}$, но $9 \not\equiv 1 \pmod{6}$. Однако если c взаимно просто с модулем k, то сокращать на c можно. Это является следствием такого важного и не просто доказываемого факта: если c взаимно просто с k, то существует такое целое число x, что $cx \equiv 1 \pmod{k}$.

*) Теория линейных целочисленных уравнений довольно проста. В то же время она содержит ряд интересных задач, близких к элементарным, и заслуживает отдельной статьи.

О том, как связана между собой разрешимость сравнений по разным модулям, мы можем кое-что сказать уже сейчас. Заметим, во-первых, что если число делится на каждое из двух взаимно простых чисел*), то оно делится и на их произведение. Отсюда сразу следует, что если некоторое равенство верно по модулю k и по модулю m и если k и m взаимно просты, то оно верно и по модулю km. Теперь ясно, что проверять приходится только по модулю степеней простых чисел. Второе полезное соображение: из разрешимости уравнения по модулю p^n (во всяком случае при достаточно большом n) часто следует разрешимость по модулю p^{n+1}.

Проверим, например, что для простого числа p, не равного 2 и не являющегося делителем a, из разрешимости сравнения $x^2+y^2=a \pmod{p^n}$ следует его разрешимость по модулю p^{n+1}, уже начиная с $n=1$. Действительно, пусть x_1, y_1 — решение исходного сравнения, то есть $x_1^2+y_1^2=a+p^nq$, где q — целое число. Будем подбирать числа x_2 и y_2 так, чтобы получить $(x_1+x_2p^n)^2+(y_1+y_2p^n)^2 \equiv a \pmod{p^{n+1}}$. Раскроем скобки и заменим $x_1^2+y_1^2-a$ на p^nq. Получим, что $2x_1x_2p^n+x_2^2p^{2n}+2y_1y_2p^n+y_2^2p^{2n}+p^nq \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. Ясно, что при $n \geqslant 1$ число p^{2n} делится на p^{n+1}. Осталось подобрать x_2, y_2 так, чтобы число $p^n(2x_1x_2+2y_1y_2+q)$ делилось на p^{n+1}, то есть чтобы число $2x_1x_2+2y_1y_2+q$ делилось на p. Заметим, что по модулю p хотя бы один из коэффициентов при x_2 или y_2 (то есть $2x_1$ или $2y_1$) не равен нулю (так как иначе или $p=2$, или числа x_1 и y_1 оба делятся на p, а тогда и $a=x_1^2+y_1^2-p^nq$ тоже делилось бы на p, что противоречит условию). Можно доказать, что в этом случае линейное сравнение по модулю p разрешимо. Действительно, будем считать для определенности, что $2x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Положим y_2 равным нулю. Итак, нужно доказать, что сравнение $2x_1x_2 \equiv -q$ разрешимо. Рассмотрим числа $2x_1 \cdot 0$, $2x_1 \cdot 1$, ..., $2x_1(p-1)$. Покажем, что они попарно не сравнимы. Если $2x_1 \cdot i \equiv 2x_1 \cdot j$, то $2x_1(i-j) \equiv 0$. Однако $2x_1$ не делится на p, и если $i \neq j$, то $i-j$ тоже не делится на p. Поэтому p чисел $2x_1 \cdot 0$, $2x_1 \cdot 1$, ..., $2x_1(p-1)$ попарно не сравнимы, и, следовательно, среди них найдется число, сравнимое с $-q$.

Гораздо более глубокими являются связи разрешимости по различным простым p. Исследование таких связей представляет сейчас одну из наиболее бурно развивающихся ветвей теории чисел. Заметим только, что если рассматривать решения некоторого сравнения по модулю различных p, то эти решения в конечном их числе не связаны между собой. В то же время все вместе они связаны, как это ни покажется странным, с поведением уравнения, рассматриваемого не только для целых, но и для всех вещественных чисел. Так, например, оказывается, что разрешимость уравнения $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0$ по модулю степеней всех простых чисел, кроме любого одного, и разрешимость его в вещественных числах (для этого надо, чтобы числа a_1, a_2, a_3 не все были одного знака) влечет за собой разрешимость его и по модулю степеней оставшегося простого числа. (Разумеется, ищется решение, у которого не все x_1, x_2, x_3 — нули.)

Принцип Минковского—Хассе

Вернемся к первому из поставленных вопросов. Решение уравнения второй степени — сведение его к разрешимости конечного числа сравнений, — полученное еще Дирихле, подсказало математикам такой метод исследования вопросов, касающихся целых чисел: поставить эти вопросы «по модулю p», а затем из поведения по всем p делать общие выводы. Такой способ рассуждения получил название «принципа Минковского — Хассе». Нашлись и продолжают еще встречаться задачи, для которых он дает результат: задача имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда она разрешима по любому модулю. Тем бо́льшим разочарованием было нахождение примеров, где этот принцип не работает. Одним из первых примеров такого рода (но не самым первым хронологически) оказался пример, найденный норвежским математиком Зельмером. Уравнение $3x^3+4y^3+5z^3=0$ оказалось разрешимым по любому модулю (и, конечно, в вещественных числах), но неразрешимым в целых числах (отличных одновременно от нуля). Этот пример послужил отправной точкой многих исследований по диофантовым уравнениям (то есть уравнениям в целых числах) последних 15 лет. Следует только сказать, что за это время число неясных вопросов и гипотез сильно увеличилось, а истинные корни того, что на самом деле происходит, не прояснились.

---

*) Напомним, что два целых числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, больших 1.

Расстояния между рациональными числами

Важнейшим современным достижением в теории чисел явилось новое понимание того, что означают «вычисления по модулю». Для простоты от целых чисел перейдем к рациональным. (Этот переход часто делается безболезненно — так, очевидным образом связаны между собой решения уравнения $x^n+y^n=z^n$ в целых числах с решениями уравнения $x^n+y^n=1$ в рациональных.) Ясно, что, если мы хотим решить уравнение в рациональных числах, мы должны узнать, решается ли оно в вещественных числах. Эту разрешимость проверять гораздо проще: можно извлекать различные корни, логарифмировать, писать неравенства и т. п.

Но вспомним, как же получились вещественные числа из рациональных? Одна из точек зрения такова: можно рассматривать последовательности рациональных чисел, расстояние между соседними членами которых неограниченно уменьшается. Например, 1; 1,4; 1,41; 1,4142;... Такая последовательность (которую можно представлять себе как последовательность измерений с возрастающей точностью) и определяет вещественное число. Как же измеряется отклонение друг от друга соседних членов последовательности? Если последовательность записать так: a_1; a_2; a_3;..., то расстояние между двумя членами запишется как $|a_m-a_n|$. Таким образом, основой для получения вещественных чисел из рациональных служит расстояние, определенное как абсолютная величина разности. Обозначим расстояние между двумя числами так: $d(a, b)=|b-a|$. Попробуйте вывести следующие свойства расстояния*):

1) $d(a, b)\geqslant 0$, причем $d(a, b)=0 \Rightarrow a=b$;

2) $d(a, b)=d(b, a)$;

3) $d(a, c)\leqslant d(a, b)+d(b, c)$ (неравенство треугольника);

4) $d(a+c, b+c)=d(a, b)$;

5) $d(ab, 0)=d(a, 0)\cdot d(b, 0)$.

Оказалось, что, кроме обычной абсолютной величины, у рациональных чисел есть еще много других расстояний, обладающих свойствами 1—5. Зафиксируем произвольное простое число p. Всякое рациональное число a (кроме нуля) можно представить в виде $a=p^\nu\cdot r$, где $\nu=\nu(a)$ — целое число, а рациональное число $r=r(a)$ таково, что в записи его в

---

*) Первые три из этих свойств — основные, которым удовлетворяет обычное расстояние на плоскости и в пространстве; это — аксиомы, которым должна удовлетворять любая «метрика» (см. статью Н. Б. Васильева «Метрические пространства» в «Кванте» № 10, 1970). Четвертое и пятое свойства связывают расстояние с операциями сложения и умножения чисел. Про метрику, которая им удовлетворяет, говорят, что она является *метрикой поля* (например, $d(b, a)=|b-a|$ — метрика поля вещественных чисел).

виде несократимой дроби ни в числитель, ни в знаменатель не входит p. (Заметим, что $\nu(a)$ может быть и нулем, и отрицательным целым числом. Например, если $p=3$, $a=\frac{73}{324}=3^{-4}\cdot\frac{73}{4}$, то $\nu(a)=-4$.) Возьмем теперь произвольное положительное число $\lambda<1$. Определим расстояние d_p так: $d_p(a,b)=\lambda^{\nu(a-b)}$, если $a\neq b$, и $d_p(a, a)=0$. Нетрудно проверить (попробуйте это сделать самостоятельно), что все свойства расстояния будут выполнены.

Раз есть новое расстояние, то можно попробовать получить новые числа, строя последовательности рациональных чисел $a_1, a_2, \dots$ так, чтобы расстояния между соседними уменьшались. Это означает, что $\lambda^{\nu(a_{n+1}-a_n)}$ при увеличении n должно становиться все меньше и меньше и стремиться к нулю, а тогда $\nu(a_{n+1}-a_n)$ должно расти.

В итоге получим новые числа, которые называют p-адическими *). Они очень похожи на вещественные. Так же легко, как и для вещественных чисел, исследуются вопросы, когда можно извлечь корень, логарифмировать и делать другие операции над p-адическими числами. Задача же о разрешимости уравнений по модулю степеней данного простого числа заменится задачей о разрешимости его в p-адических числах.

Возникает вопрос, нашли ли мы **все** расстояния между рациональными числами. Оказывается, что да. Есть знаменитая теорема Островского (с ней можно познакомиться в цитированной выше книге по теории чисел), показывающая, что все расстояния исчерпываются обычной абсолютной величиной и введенными нами p-адическими расстояниями для каждого простого p.

Мы как бы уравняли в правах поведение уравнения по модулю отдельно взятого простого числа и его степеней, с одной стороны, и поведение его в обычных вещественных числах — с другой. В том и в другом случае числа сравниваются по их расстоянию друг от друга, но эти расстояния выбираются по-разному. (Теперь мы видим, чем похожи второе и третье решения задачи, с которой началась наша статья.)

Понимание этого факта сильно обогатило теорию чисел, снова привело в нее мощные методы теории функций и геометрии, развитые прежде для обычных вещественных чисел, но успешно применяемые и для p-адических чисел, сделало эту самую древнюю ветвь математики вновь одной из самых цветущих.)

Упражнения

1. Докажите, что ни одно из уравнений

а) $x^2+y^2=1971$,

б) $19x^3-17y^3=50$,

в) $3x^2-y^2=5^z$,

г) $x^3+y^3+7z=3$

не имеет решений в целых числах.

2. Докажите, что из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 нельзя составить двух различных семизначных чисел, из которых одно делится на другое. (В каждом числе должны быть использованы все цифры.)

3. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из тридцати единиц, некоторого количества нулей и некоторого количества девяток, не является полным квадратом.

4. Найдите 5-адическое расстояние (то есть расстояние d_5) между числами: а) 0 и $\frac{2}{5}$; б) $1\frac{31}{45}$ и $6\frac{2}{15}$; в) 6 и 631.

5. Докажите, что для 3-адических чисел верно равенство

$$1+3+9+27+\dots=-\frac{1}{2}$$

(другими словами, последовательность расстояний

$$\alpha_n=d_3\left(1+3+\dots+3^n, -\frac{1}{2}\right)$$

стремится к нулю).

Чему равна сумма $1+3^2+3^4+3^6+\dots$?

---

*) Легко доказать, что выбор λ на построение и свойства p-адических чисел не влияет. Можно, если угодно, всюду считать, что $\lambda=\frac{1}{2}$ или $\lambda=\frac{1}{p}$.

6. Назовем p-ичной дробью, по аналогии с десятичными дробями, дробь вида $\frac{A}{p^n}$, где A — натуральное число. Ее можно записать в таком виде:

$$a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{p^n}, \quad (*)$$

где каждое a_i — целое число, $0 \leqslant a_i < p$.

Коротко дробь (*) можно записать так:

$$\langle\langle a_m a_{m-1} \ldots a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \rangle\rangle. \quad (**)$$

Докажите, что расстояние d_p между двумя такими p-ичными дробями, у которых k-е цифры различны, а все следующие вправо (то есть $(k-1)$-я, $(k-2)$-я и т. д.) совпадают, равно λ^k.

Представьте в стандартном виде (**) троичные дроби $4\frac{14}{81}$ и $1\frac{41}{81}$ и найдите 3-адическое расстояние между ними.

7. (Продолжение.) Пусть $a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная последовательность цифр; $0 \leqslant a_i < p$. Предел (в смысле расстояния d_p) последовательности p-ичных дробей

$$x_0 = \langle\langle a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \rangle\rangle,$$

$$x_1 = \langle\langle a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \rangle\rangle$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = \langle\langle a_m \ldots a_1 a_0, a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-n} \rangle\rangle$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

коротко обозначается так *):

$$\langle\langle \ldots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \rangle\rangle. \quad (***)$$

В частности, если $n=0$, то есть все цифры после запятой равны нулю, мы пишем просто

$$\langle\langle \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 \rangle\rangle.$$

Например, из результата задачи 5 следует, что при $p=3$

$$-\frac{1}{2} = \langle\langle \ldots 11111 \rangle\rangle; \quad -\frac{1}{8} = \langle\langle \ldots 01010101 \rangle\rangle;$$

$$\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} = \langle\langle \ldots 11111,2 \rangle\rangle.$$

Представьте в виде (***) 3-адические числа

$$-1; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{2}{45}.$$

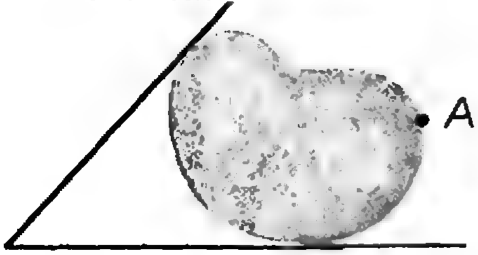
Тем, кого заинтересовала теория этих чисел, «бесконечных влево», мы рекомендуем книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского «Математические беседы» (серия «Библиотека математического кружка»).

ОБ ОДНОЙ НЕРЕШЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ

В этом номере «Кванта» вы прочтете статью Б. Ю. Когана «Удивительные катки». В ней рассматриваются фигуры, которые могут поворачиваться между двумя параллельными прямыми, все время касаясь их обеих.

Нетрудно понять, что любая ограниченная фигура может, поворачиваясь, касаться двух пересекающихся прямых.

Зафиксируем на плоскости точку A и рассмотрим все фигуры, которые, поворачиваясь, касаются данных прямых, причем их граница проходит через точку A (см. рис.). До сих пор неизвестно, существуют ли фигуры, отличные от круга, обладающие таким свойством.



Эта проблема была поставлена около 15 лет назад академиком А. Н. Колмогоровым на лекции для московских школьников. Ее решение имеет и практическое значение. На некоторых заводах производят проверку цилиндрических деталей следующим образом: деталь укладывают в лоток и вращают так, чтобы она касалась обеих сторон лотка, затем сверху подводится «щуп» (стержень, который может совершать продольные перемещения) до соприкосновения с деталью. Если во время вращения щуп сдвигается, то деталь бракуется.

Таким образом, если существуют отличные от круга фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, то цилиндры, имеющие в сечении такую фигуру, будут великолепно проходить через ОТК.

А. П. Савин

---

*) Можно доказать, что этот предел в p-адических числах всегда существует; оказывается, что любое p-адическое число можно записать такой «p-ичной дробью, бесконечной влево» — точно так же, как любое положительное вещественное число можно записать дробью, бесконечной вправо.

УДИВИТЕЛЬНЫЕ КАТКИ

Б. Ю. Коган

Доска движется на круглых катках. При этом она сохраняет горизонтальное положение и остается на той же высоте. Почему это происходит? Да потому, что окружность имеет одну и ту же ширину при любом повороте.

А будет ли доска двигаться так же, если воспользоваться некруглыми катками? В первый момент кажется, что это невозможно. Не будем, однако, спешить. Оказывается, есть кривые, которые, подобно окружности, имеют одинаковую ширину во всех направлениях. Они так и называются линиями одинаковой ширины.

Одна из простейших кривых такого рода показана на рисунке 1. Она состоит из дуг A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 радиуса r и дуг B_1A_3, B_3A_2, B_2A_1 радиуса R, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Легко видеть, что ширина этой кривой одинакова во всех направлениях и равна $R+r$. Следовательно, катки, профили которых очерчены по таким кривым, будут работать ничуть не хуже круглых (рис. 2).

Кривую, изображенную на рисунке 1, можно получить так. Возьмем отрезок A_1B_3 и, повернув его на 60° вокруг точки O_1, переведем в положение B_1A_2. Затем, повернув отрезок B_1A_2 на 60° вокруг точки O_2, получим отрезок A_3B_2 и, наконец, повернув отрезок A_3B_2 на 60° вокруг точки O_3, вновь придем к отрезку A_1B_3. В процессе этих поворотов один конец рассматриваемого отрезка опишет дугу $A_1B_1A_3B_3$, а другой — дугу $B_3A_2B_2A_1$. Следовательно, кривую, показанную на рисунке 1, можно рассматривать как траекторию, описываемую концами некоторого отрезка при трех поворотах вокруг точек, лежащих на этом отрезке. Пользуясь этим методом, можно получить много кривых подобного рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3, образуется в результате поворотов отрезка AB вокруг центров O_1, O_2, O_3. Величина и направление каждого поворота показаны стрелками. Цифры на рисунке показывают длины соответствующих отрезков.

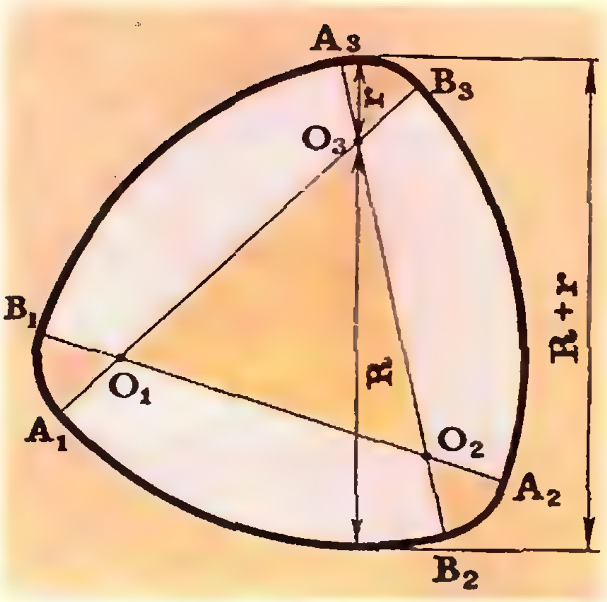


Рис. 1.

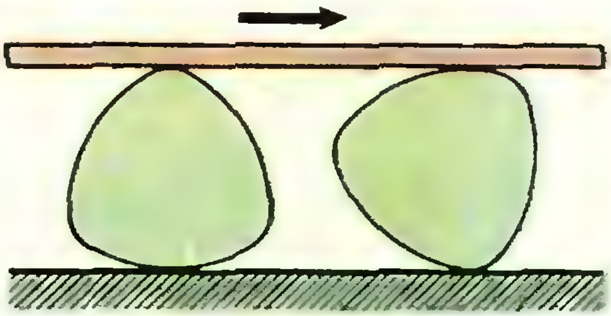


Рис. 2.

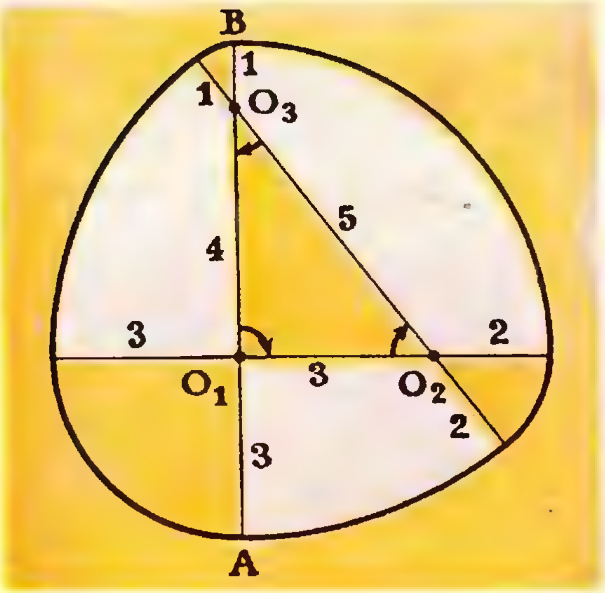


Рис. 3.

Ширина всех этих кривых постоянна и равна длине поворачиваемого отрезка. Можно поворачивать отрезок вокруг одного из его концов. Так мы получим простейшую кривую равной ширины, отличную от окружности (рис. 4). При этом отрезок *AB* поворачивается сначала вокруг точки *A*, переходя в положение *AB'*, затем вокруг точки *B'*, переходя в отрезок *B'B*, и, наконец, вокруг точки *B*, замыкая кривую.

Рассмотрим теперь некоторый отрезок *AB*. Пусть он катится без скольжения по кривой *SS*. Тогда в каждый отдельный момент такое движение можно рассматривать как вращение отрезка относительно точки касания. Точка касания, относительно которой в данный момент совершается поворот, называется мгновенным центром вращения (например, точка *C* на рисунке 5).

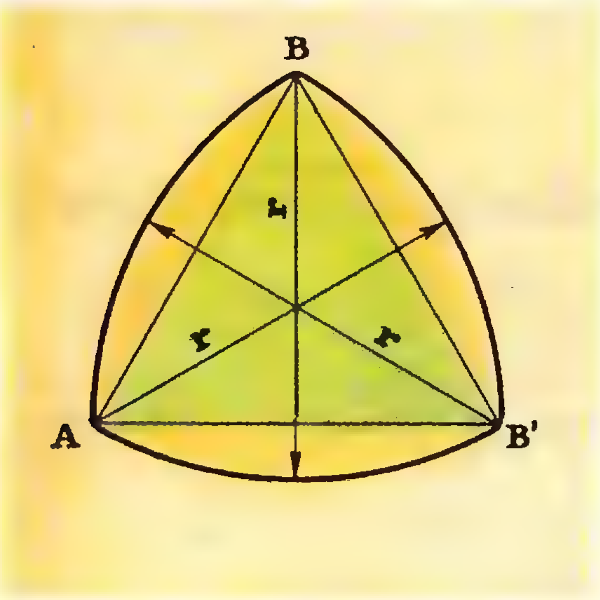


Рис. 4

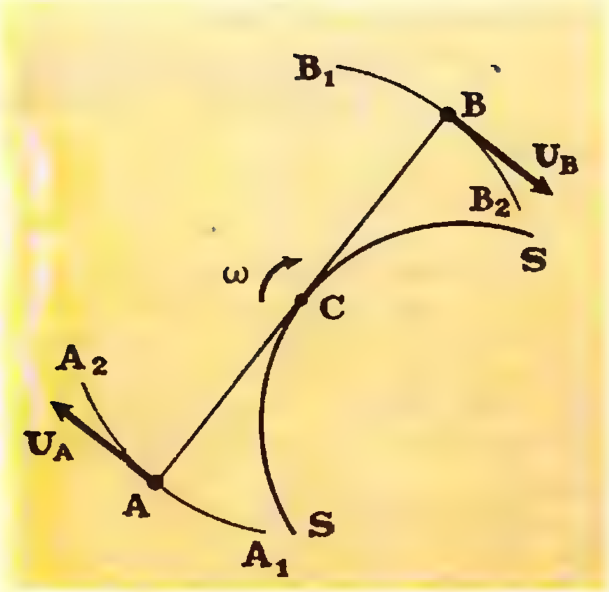


Рис. 5.

Представление о мгновенном центре вращения позволяет легко вычислять скорости различных точек отрезка *AB*. Например, для скоростей точек *A* и *B* будем иметь

$$v_A = \omega \cdot CA,$$

$$v_B = \omega \cdot CB,$$

где ω — угловая скорость отрезка *AB* в его «мгновенном» вращении вокруг центра *C*. При этом скорости рассматриваемых точек будут перпендикулярны соответствующим радиусам вращения, то есть отрезкам *CA* и *CB*. Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или *жестко связанной* с этим отрезком. Если, например, с отрезком *AB* жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки *P* равна произведению $\omega \cdot CP$.

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок *AB* катится по кривой *SS*. Так как скорости v_A и v_B перпендикулярны радиусам *CA* и *CB*, то они параллельны между собой. Но скорость v_A направ-

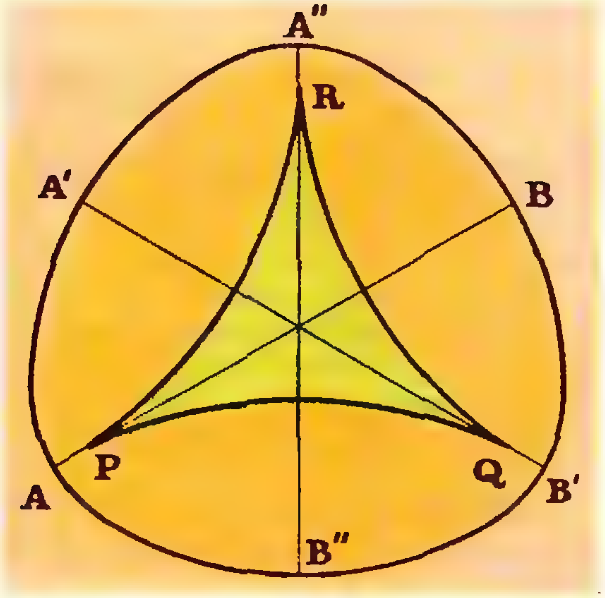


Рис. 6.

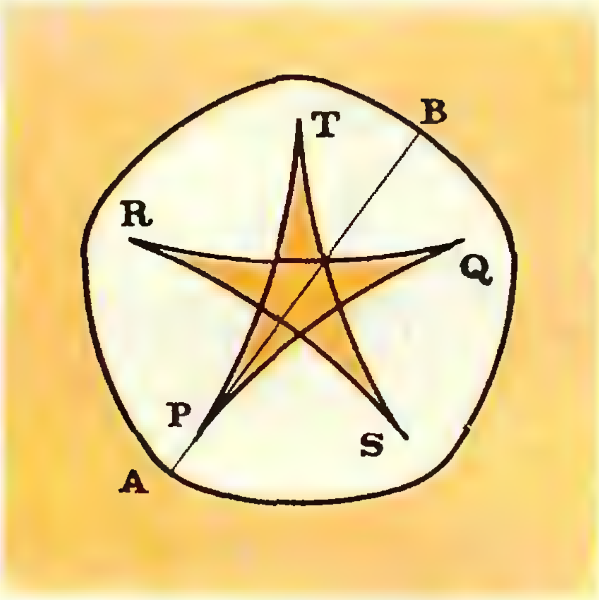


Рис. 7.

лена по касательной к траектории точки A, а скорость v_B — по касательной к траектории точки B. Следовательно, эти касательные *параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным AB*. Но это значит, что траектории A_1A_2 и B_1B_2 можно рассматривать как *участки некоторой кривой постоянной ширины*.

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию SS так, чтобы, обкатывая ее, отрезок AB повернулся на 180°, то есть чтобы точка A пришла в положение B, а точка B — в положение A. Одна из таких линий — $PQRP$ — показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок AB обкатывает ее.

Сначала он катится по участку PQ и приходит в положение $A'B'$. При этом его концы описывают дуги AA' и BB'. Затем он катится по участку QR, а его концы описывают дуги $A'A''$ и $B'B''$. Наконец, он обкатывает участок RP, а его концы движутся по дугам $A''B$ и $B''A$. В результате точка A приходит в положение B, а точка B—в положение A, и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги PQ, QR и RP могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, — это чтобы они были выпуклыми и касались друг друга так, как это показано на рисунке. Что касается отрезков AP и PB, то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой A, не «вольется» в дугу, описываемую точкой B. Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку P прямую, касающуюся дуги PQ, и поставим на ней точку A. Заставим теперь эту прямую обкатывать линию $PQRP$. Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка A, определит положение точки B.

Линия $PQRP$, показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и бóльшим. Например, на рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии $PQRSTP$, состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью. Оно выражается следующей теоремой:

Периметр кривой постоянной ширины $l=\pi D$, где D — ширина этой кривой.

Докажем эту теорему.

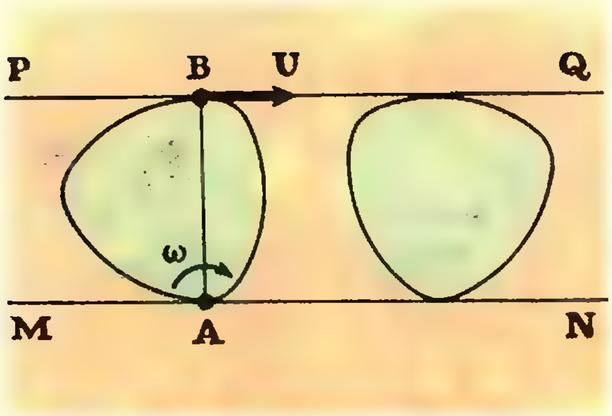


Рис. 8.

Пусть горизонтальная прямая PQ перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис. 8). Рассмотрим один из этих катков, например левый. Пусть его ширина равна D, а периметр — l. Когда прямая PQ передвинется настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой MN на расстояние l вправо. Но так как он катится не только по прямой MN, но и по прямой PQ, то после одного оборота он окажется *смещенным относительно прямой* PQ на расстояние l *влево*. Следовательно, перемещение прямой PQ относительно прямой MN будет равно $2l$.

Но так как это же смещение равно vt, где t — время, за которое каток делает один оборот, то

$$2l=vt. \qquad (1)$$

(Мы считаем, что прямая PQ движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке A, значит, скорость перемещения

$$v=\omega\cdot AB=\omega D,$$

где ω — угловая скорость катка. Подставив это выражение в равенство (1), получим

$$2l=\omega Dt. \qquad (2)$$

Но ωt есть угол поворота катка за один оборот. Следовательно,

$$\omega t=2\pi,$$

и равенство (2) приобретает вид

$$2l=2\pi D,$$

откуда

$$l=\pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности. А какова площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь *кольца* постоянной ширины можно вычислять, как площадь *кольца между двумя концентрическими окружностями*. Более точно это означает следующее.

Рассмотрим кривую постоянной ширины (рис. 9). Через произвольную точку C на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок CC' заданной длины d. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. Если теперь обозначить через S площадь, заключенную между этими кривыми, то будет справедливо равенство

$$S=\frac{\pi D_2^2}{4}-\frac{\pi D_1^2}{4},$$

где D_1 — ширина внутренней кривой, а D_2 — наружной.

Попробуйте доказать это сами.

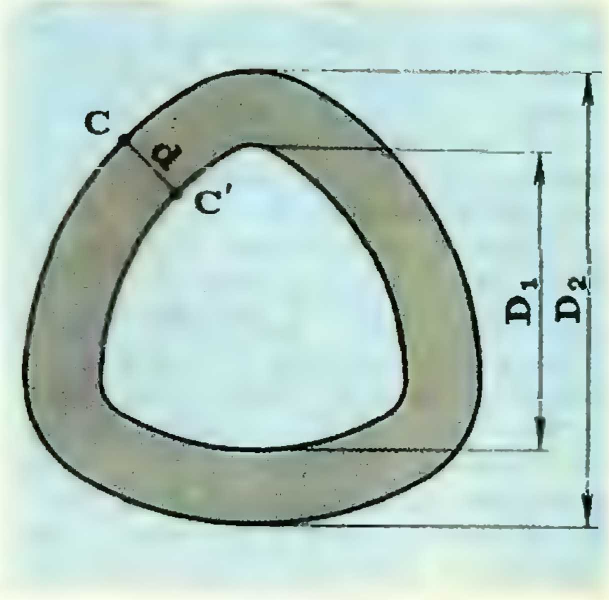


Рис. 9

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Л. М. Лоповок

По определению выпуклый многоугольник называется правильным, если он равноугольный и равносторонний. Однако существует интересный класс фигур, не обладающих этими двумя свойствами одновременно. Мы будем называть полуправильными следующие многоугольники:

а) равноугольные, у которых стороны равны через одну;

б) равносторонние, у которых углы равны через один.

Примером полуправильного многоугольника первого рода является прямоугольник, а второго — ромб. Из описания полуправильных многоугольников видно, что у каждого из них четное число вершин; обозначим его через $2n$.

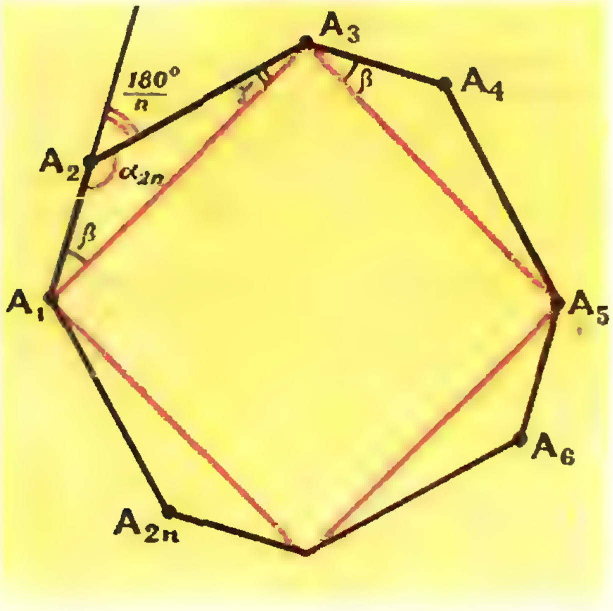


Рис. 1.

Свойства полуправильных равноугольных многоугольников

1. Противоположные стороны равноугольного многоугольника параллельны.

Действительно, выполняя обход многоугольника, замечаем, что каждая сторона повернута относительно предыдущей на внешний угол, то есть на $\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 1). Следовательно, сторона $A_{n+1}A_{n+2}$ повернута относительно стороны A_1A_2 на сумму n внешних углов, то есть на 180°.

2. Если соединить вершины полуправильного равноугольного многоугольника через одну (все нечетные или все четные вершины), то получится правильный многоугольник (рис. 1).

Доказательство несложно: треугольники $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, $A_5A_6A_7, \ldots$ равны по первому признаку, значит, $A_1A_3=A_3A_5=\ldots$ С другой стороны, из равенства треугольников следует равенство их соответственных углов. Обозначим внутренний угол правильного $2n$-угольника через α_{2n}. Находим внутренние углы получившегося у нас многоугольника: они равны

$$\alpha_{2n}-(\beta+\gamma)=\alpha_{2n}-(180^\circ-\alpha_{2n})=$$

$$=2\alpha_{2n}-180^\circ=2\cdot180^\circ\left(1-\frac{1}{n}\right)-$$

$$-180^\circ=180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right),$$

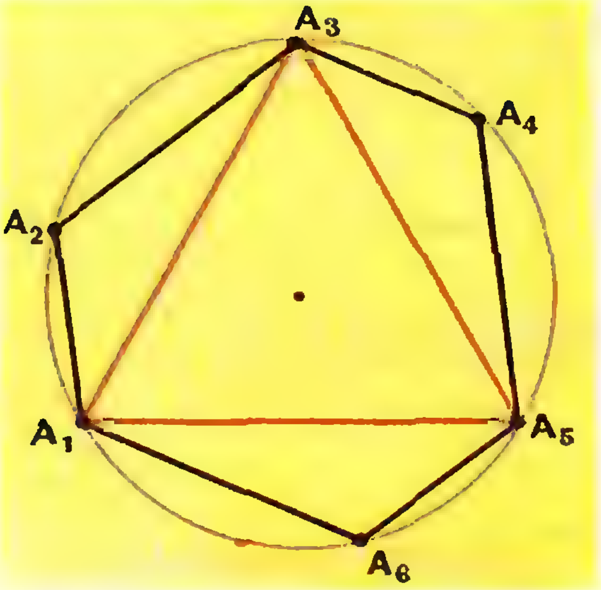


Рис. 2.

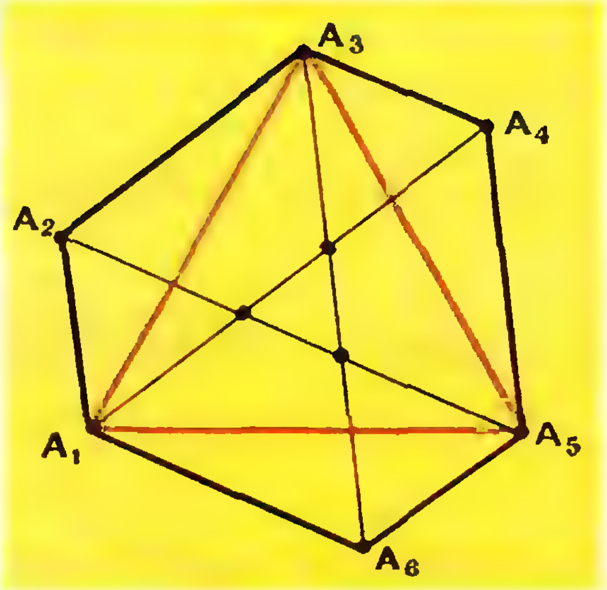


Рис. 3.

как и должно быть у правильного n-угольника.

3. Около полуправильного равноугольного многоугольника можно описать окружность.

Опишем окружность около правильного n-угольника $A_1A_3A_5\ldots$ (рис. 2). Внутренний угол равноугольного $2n$-угольника равен $180^\circ\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Легко подсчитать, что $\angle A_1A_2A_3$ вдвое меньше градусной величины дуги $A_3A_5A_1$, значит, точка A_2 лежит на построенной окружности. Это относится и к другим вершинам: A_4, A_6,...

На свойстве 3 основаны два способа построения полуправильных равноугольных многоугольников.

а) Строим правильный n-угольник $A_1A_3A_5\ldots A_{2n-1}$, описываем около него окружность. Затем находим (с помощью циркуля) на окружности точки $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$, удаленные на одно и то же расстояние от соответствующих вершин n-угольника: $A_1A_2=A_3A_4=\ldots$

б) Строим треугольник $A_1A_2A_3$ по двум сторонам (произвольной длины) и известному углу между ними, описываем около этого треугольника окружность. Затем, зная размеры всех сторон, засечками циркуля последовательно находим остальные вершины.

4. Если число вершин полуправильного равноугольного многоугольника кратно 4, то большие диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Для доказательства используем свойство 2: эти диагонали являются также диагоналями правильного многоугольника с четным числом сторон, поэтому они пересекаются в одной точке — центре описанной около многоугольника окружности — и делятся этой точкой пополам.

Если же число вершин полуправильного равноугольного многоугольника не кратно 4, то нетрудно построить пример (рис. 3), когда большие диагонали пересекаются в нескольких точках.

5. Центр окружности, описанной около полуправильного равноугольного $4n$-угольника, является его центром симметрии.

Из свойства 4 следует, что при центральной симметрии относительно центра окружности вершины многоугольника переходят в вершины; следовательно, стороны тоже переходят в стороны.

6. Прямая, проходящая через середины двух параллельных сторон полуправильного равноугольного многоугольника, является его осью симметрии.

По свойству параллельных хорд окружности эта прямая проходит через центр описанной окружности. Из равенства соответствующих хорд по обе стороны от прямой следует симметричность соответствующих вершин

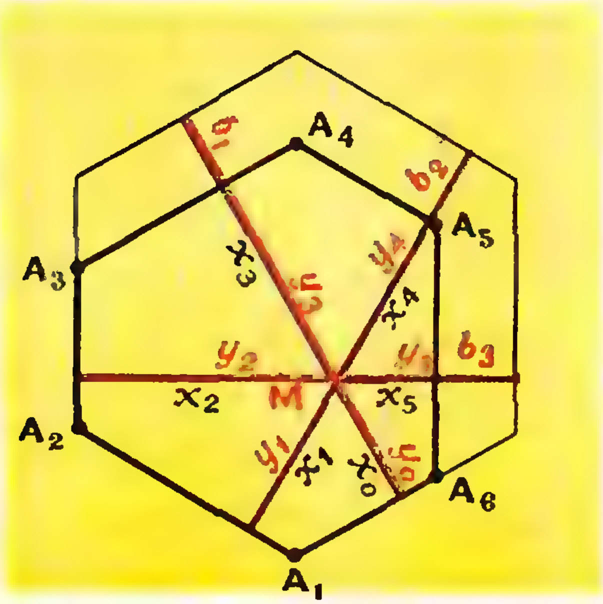


Рис. 4.

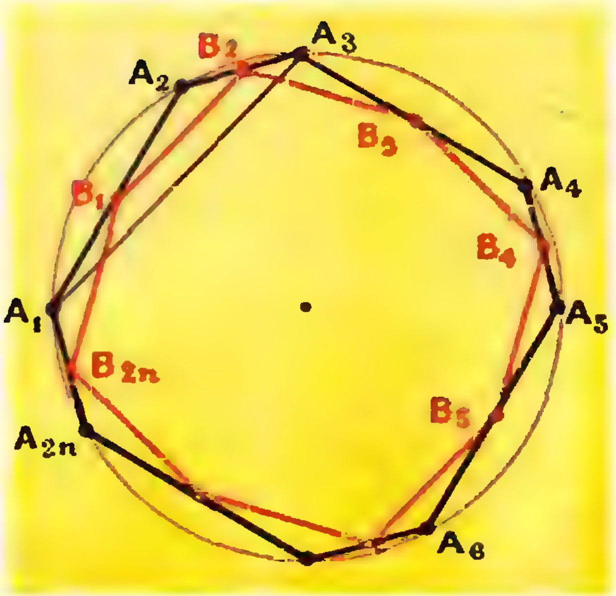


Рис. 5.

многоугольника относительно проведенной прямой (см. далее рис. 6).

7. Пусть полуправильный равноугольный многоугольник имеет $2n$ вершин, тогда центр описанной около него окружности является его центром симметрии порядка n.

Это означает, что при повороте вокруг центра окружности на угол, кратный $\frac{360^\circ}{n}$, многоугольник совмещается сам с собой. Это следует из свойств 2 и 3.

8. Сумма расстояний от внутренней точки до сторон (или их продолжений) полуправильного равноугольного многоугольника постоянна.

Как известно, таким свойством обладает правильный многоугольник.

Если соединить внутреннюю точку правильного многоугольника с вершинами, то сумма площадей полученных треугольников равна площади многоугольника. Обозначив сторону многоугольника через a, а расстояния до сторон через x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$, получим

$$S=\frac{ax_0}{2}+\frac{ax_1}{2}+\frac{ax_2}{2}+\frac{ax_3}{2}+\cdots;$$

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots=$$

$$=\frac{2S}{a}=\text{const}.$$

Пусть в данном многоугольнике сторона A_1A_2 больше стороны A_2A_3. Построим на A_1A_2 правильный $2n$-угольник (рис. 4). Тогда все стороны исходного многоугольника (кроме трех) соответственно параллельны сторонам правильного многоугольника, а три (A_1A_2 и смежные с ней) лежат на сторонах правильного многоугольника. Следовательно, расстояния от внутренней точки M до сторон правильного многоугольника таковы:

$$x_0=y_0,\quad x_1=y_1,\quad x_2=y_2,\quad x_3=y_3+b_1,$$
$$x_4=y_4+b_2,\quad x_5=y_5+b_3,\ldots,$$

где b_1, b_2, b_3 постоянны, а искомая сумма

$$y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots=(x_0+x_1+$$
$$+x_2+x_3+x_4+\ldots)-(b_1+b_2+\ldots)=$$
$$=\text{const}.$$

9. Если последовательно соединить середины сторон полуправильного равноугольного многоугольника, то получится полуправильный равносторонний многоугольник.

Действительно, по свойству 2 все малые диагонали полуправильного равноугольного многоугольника равны между собой. Стороны полученного многоугольника (рис. 5) вдвое меньше этих диагоналей, так как являются средними линиями треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5, \ldots$ Используя свойство 7, легко устано-

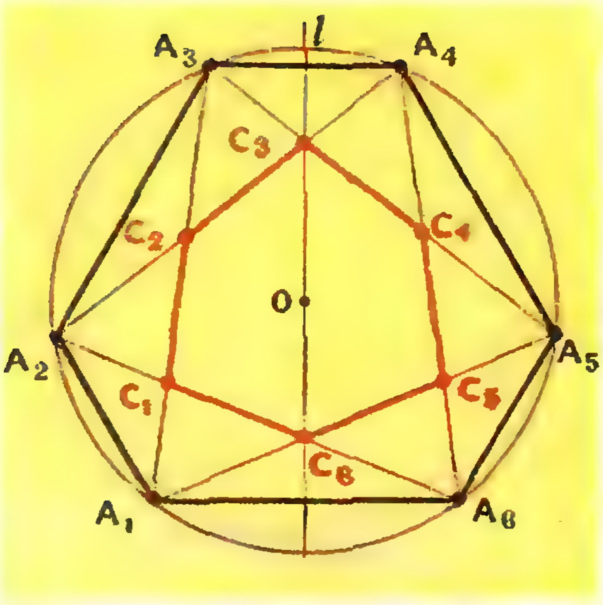


Рис. 6.

вить, что углы этого многоугольника равны через один.

10. Точки пересечения малых диагоналей полуправильного равноугольного многоугольника образуют полуправильный равносторонний многоугольник.

Это свойство следует из свойств 6 и 7. При отражении относительно прямой l (рис. 6) исходный многоугольник переходит в себя, следовательно, треугольник $A_3C_3C_2$ совмещается с треугольником $A_4C_4C_3$, откуда $C_2C_3=C_3C_4$; аналогичные равенства справедливы и для остальных сторон. Равенство углов через один у многоугольника $C_1C_2C_3C_4\ldots$ легко выводится из свойства 7 или из теоремы о том, что угол между двумя хордами равен полусумме соответствующих дуг.

11. Сумма квадратов расстояний от любой точки описанной окружности до вершин полуправильного равноугольного $2n$-угольника равна $4nR^2$.

Мы докажем свойство 11 лишь для четных n. При этом достаточно заметить, что A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, $A_3A_{n+3},\ldots$ — диаметры описанной окружности; поэтому для любой точки M этой окружности $MA_1^2+MA_{n+1}^2=$ $=MA_2^2+MA_{n+2}^2=\ldots=4R^2$.

12. Площадь полуправильного равноугольного $2n$-угольника со сторонами $A_1A_2=a$ и $A_2A_3=b$ равна

$$\frac{n}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}+\frac{n}{4}\Big(a^2+b^2+$$
$$+2ab\cos\frac{180^\circ}{n}\Big)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Эта площадь равна сумме площадей правильного n-угольника и n треугольников, равных $A_1A_2A_3$. Мы уже нашли, что $\measuredangle A_1A_2A_3=180^\circ-\frac{180^\circ}{n}$ (при доказательстве свойства 1); теперь

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Площадь правильного n-угольника $A_1A_3A_5\ldots A_{2n-1}$ равна

$$n\cdot\frac{A_1A_3}{2}\cdot\frac{A_1A_3}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}=$$
$$=\frac{n}{4}(A_1A_3)^2\frac{\operatorname{ctg}180^\circ}{n}.$$

По теореме косинусов для треугольника $A_1A_2A_3$

$$A_1A_3^2=a^2+b^2+2ab\cos\frac{180^\circ}{n},$$

и окончательно

$$S=\frac{n}{2}ab\sin\frac{180^\circ}{n}+\frac{n}{4}\Big(a^2+b^2+$$
$$+2ab\cos\frac{180^\circ}{n}\Big)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Например, площадь полуправильного равноугольного шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+4ab)$, а восьмиугольника — $a^2+b^2+2\sqrt{2}\,ab$.

Самостоятельно докажите следующие свойства полуправильных равносторонних многоугольников.

1. Если число вершин полуправильного равностороннего многоугольника кратно 4, то его противоположные стороны параллельны.

2. Если соединить вершины полуправильного равностороннего многоугольника через одну, то получится правильный многоугольник.

3. В полуправильный равносторонний многоугольник можно вписать окружность.

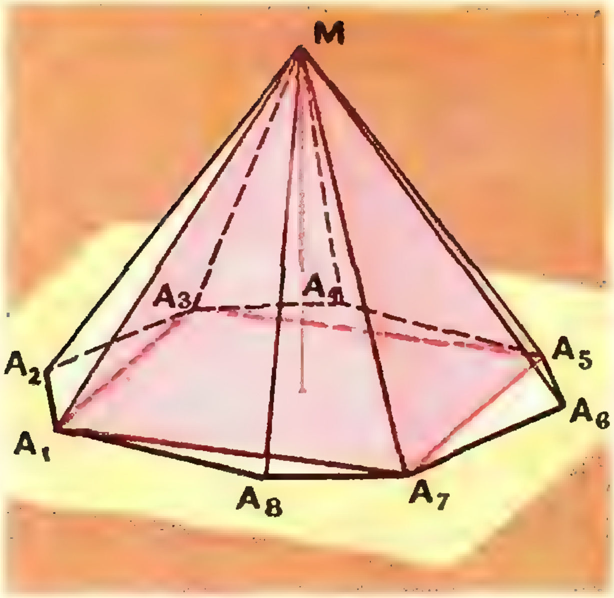


Рис. 7.

4. Большие диагонали полуправильного равностороннего многоугольника пересекаются в одной точке.

5. Центр окружности, вписанной в полуправильный равносторонний $4n$-угольник, является его центром симметрии.

6. Большие диагонали полуправильного равностороннего многоугольника являются его осями симметрии.

7. Пусть полуправильный равносторонний многоугольник имеет $2n$ вершин, тогда центр вписанной в него окружности является его центром симметрии порядка n.

8. Сумма расстояний от внутренней точки до сторон полуправильного равностороннего многоугольника постоянна.

9. Если последовательно соединить середины сторон полуправильного равностороннего многоугольника, то получится полуправильный равноугольный многоугольник.

10. Точки пересечения малых диагоналей полуправильного равностороннего многоугольника образуют полуправильный равноугольный многоугольник.

11. Посмотрите еще раз свойство 11 полуправильного равноугольного многоугольника и попробуйте найти его аналог для полуправильного равностороннего многоугольника.

12. Площадь полуправильного равностороннего $2n$-угольника со стороной a и одним из углов β равна

$$S = \frac{n}{2}a^2\left[\sin\beta + (1-\cos\beta)\,\mathrm{ctg}\,\frac{180^\circ}{n}\right].$$

Полуправильные пирамиды

Пирамиду, у которой равны все боковые ребра, а плоские углы при вершине равны через один, назовем полуправильной равнореберной пирамидой.

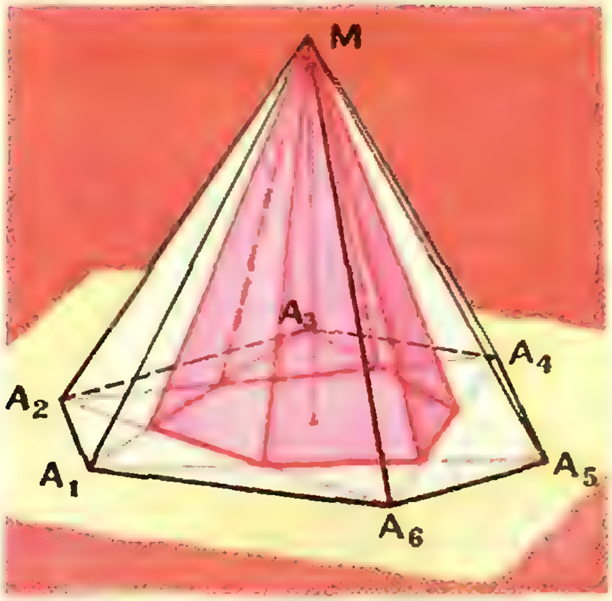


Рис. 8.

Пирамиду, у которой плоские углы при вершине одинаковы, а боковые ребра равны через одно, назовем полуправильной равноугольной пирамидой.

Свойства таких пирамид получаются из свойств полуправильных многоугольников. Мы их сформулируем, а вы попробуйте доказать эти свойства самостоятельно.

1. Основанием полуправильной равнореберной пирамиды является полуправильный равноугольный многоугольник.

2. Малые диагональные сечения MA_1A_3, MA_3A_5, MA_5A_7, ... полуправильной равнореберной пирамиды ограничивают правильную пирамиду (рис. 7).

3. Около полуправильной равнореберной пирамиды можно описать сферу.

4. Если число вершин основания полуправильной равнореберной пирамиды кратно 4, то большие диагональные сечения пирамиды пересекаются по высоте, опущенной на ее основание.

5. Плоскость, проходящая через середины двух параллельных сторон основания и вершину полуправильной равнореберной пирамиды, перпендикулярна плоскости основания.

6. Малые диагональные сечения MA_1A_3, MA_2A_4, MA_3A_5,... полуправильной равнореберной пирамиды ограничивают полуправильную равноугольную пирамиду (рис. 8).

Рассмотрите еще пирамиду, у которой боковые ребра равны через одно и плоские углы при вершине равны через один. Какие из свойств полуправильных пирамид сохраняются для такой пирамиды?

ЗАДАЧНИК кванта

ЗАДАЧИ

М71. Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания.

Подумайте, что будет, если действовать в другом порядке: в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — в строках: получится ли в результате та же самая таблица, что и в первом случае, или другая?

М72. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p,$$

где p — произвольное вещественное число.

Ю. И. Ионин

М73. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причем все такие возможности мы считаем равновероятными), окажется, что угаданы ровно 4 клетки? 5 клеток?... все 8 клеток?

М74. Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a

$$p(x)=p(a-x).$$

Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. Например, если $p(x)=x^5+(1-x)^5$, то, очевидно, $p(x)=p(1-x)$ и, как нетрудно проверить,

$$p(x)=5y^2+\frac{5}{2}y+\frac{1}{16},$$

где $$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

М75. а) Доказать, что в любом выпуклом многограннике сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника.)

б) Доказать, что для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника найдутся три ломаные, каждая из которых идет по ребрам многогранника из A в B и никакие две не проходят по одному ребру.

в) Доказать, что если в выпуклом многограннике разрезать два ребра, то для любых двух его вершин A и B найдется ломаная, идущая из A в B по оставшимся ребрам.

г) Доказать, что в задаче б) можно выбрать три ломаные, попарно не имеющие общих вершин, за исключением концов A и B.

А. Г. Кушниренко

Ф83. Доска массы m и длины l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения доски о пол равен k. Какую работу надо совершить для того, чтобы повернуть доску в горизонтальной плоскости на малый угол α вокруг одного из ее концов?

Ф84. «Черный ящик» (коробка с неизвестной схемой внутри) имеет две пары выводов Если к выводам I приложить напряжение U, то

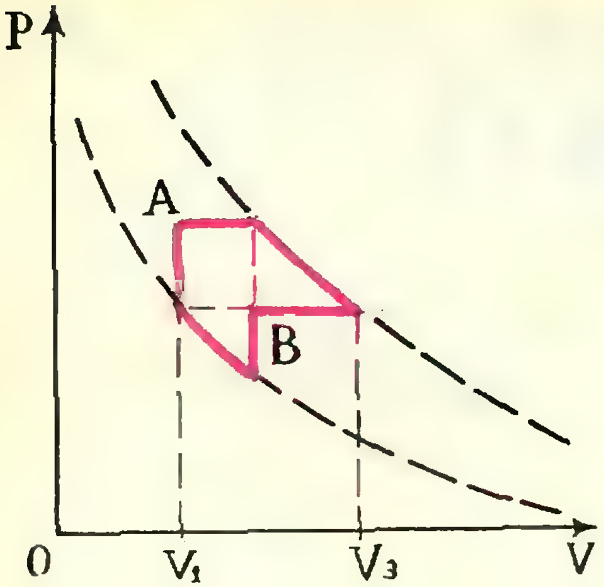


Рис. 1.

вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, подсоединенный к выводам II, покажет напряжение $\frac{U}{2}$. Если же подать напряжение U на выводы II, то вольтметр, подсоединенный к выводам I, покажет U. Какая электрическая схема находится в «ящике»?

С. Г. Семенчинский

Ф85. Можно ли провести с идеальным газом замкнутый процесс (цикл) так, чтобы точки A и B (рис. 1) лежали на одной изотерме?

Температуры T_1 и T_2, которым соответствуют изотермы, проведенные на рисунке, и объем V_1 (или V_3) заданы.

Б. Б. Буховцев

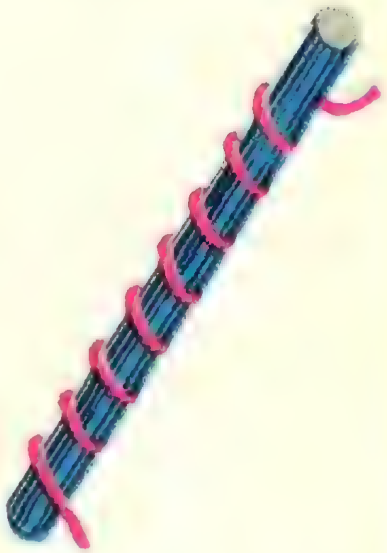
Ф86. В опыте Милликена положение капельки весом 10^{-6} *г* определяется микроскопом с точностью до 10 *мк*. Какова неточность в определении ее скорости?

Ф87. Источник сферических волн движется по поверхности воды со скоростью u. Нарисуйте картины волн на поверхности воды, когда скорость волн c больше и меньше скорости источника.

Л. Г. Асламазов

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Первые электромагниты появились вскоре после того, как Христиан Эрстед в 1820 году открыл магнитное действие электрического тока. Уже осенью того же 1820 года Ампер придумал безжелезный электромагнит — соленоид (название это тоже введено Ампером). Тремя годами позже малоизвестный английский преподаватель физики Стердженпридумал, изготовил и показывал на лекциях первый настоящий электромагнит в виде покрытого лаком железного стержня (см. рис.) с намотанной на нем проволокой. Лак служил электрической изоляцией. Как большое достижение отмечалось, что этим электромагнитом можно было удерживать несколько десятков граммов железа. Стердженом же был изготовлен и первый подковообразный электромагнит, которым можно было удерживать груз более 4 *кг*.



(Окончание на. стр. 44.)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

M26

Предположим, что в каждом номере нашего журнала в задачнике «Кванта» будет пять задач по математике. Обозначим через $f(x, y)$ номер первой из задач x-го номера журнала за y-й год (например, $f(6,1970)=26$). Напишите общую формулу для $f(x, y)$ для всех x, y ($1\leqslant x\leqslant 12$, $y\geqslant 1970$). Решите уравнение $f(x, y)=y$.

Функция f удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(1,1970)=1$;

2) $f(x+1, y)=f(x,y)+5$ $(1\leqslant x<12)$ — за каждый месяц $f(x, y)$ увеличивается на 5;

3) $f(1, y+1)=f(1, y)+60$ — за каждый год $f(x, y)$ увеличивается на 60.

Ясно, что этими условиями функция однозначно определяется; ее можно задать, например, такой формулой:

$$f(x, y)=5x+60(y-1970)-4.$$

Нетрудно проверить, что $f(5,2003)=2001$; $f(6,2003)=2006$. Поэтому уравнение $f(x, y)=y$ не имеет решений.

Правильные решения прислали *Е. Орлюк* из Житомира, *Н. Ильин* из поселка Захар Иркутской обл., *М. Перельмутер* из Киева и другие читатели.

Из сказанного выше ясно, что если бы мы ввели еще такую функцию: $f(k, x, y)$ — номер k-й задачи x-го номера журнала за y-й год ($1\leqslant k\leqslant 5, 1\leqslant x\leqslant 12, y\geqslant 1970$), то уравнение $f(k, x, y)=y$ имело бы единственное решение $k=3$, $x=5$, $y=2003$ — другими словами, если наша система сохранится до тех пор неизменной (по-прежнему в каждом номере будет пять задач по математике), то третья задача в задачнике «Кванта» № 5 за 2003 год будет иметь номер **М2003**. Общая формула для $f(k, x, y)$ такова:

$$f(k, x, y)=k+5x+60(y-1970)-5.$$

Для читателей, пожалуй, полезнее формулы, задающие обратную функцию, которые по номеру n задачи позволяют найти год y и номер журнала x, в котором предлагалась эта задача.

Для этого удобно использовать такие обозначения: $[a]$ — целая часть числа a (наибольшее целое число, не превосходящее a) и $\{a\}=a-[a]$ — дробная часть числа a.

Проверьте, что

$$x=\left[12\left\{\frac{n-1}{60}\right\}\right]+1,\quad y=\left[\frac{n-1}{60}\right]+1970.$$

M27

Докажите, что если $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, то

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Это утверждение следует из такого тождества:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

Для его доказательства достаточно почленно перемножить две суммы, стоящие в левой части тождества, и учесть, что сумма трех дробей

$$\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ca-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=\frac{bc-ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

равна нулю.

Такое решение прислал *А. Шильштут* из Ташкента. Менее прозрачные, но тоже верные решения прислали *Б. Пагис* из Новомосковска Тульской области и *А. Избицкий* из Малориты Брестской области.

После прочтения такого искусственного решения, конечно, может возникнуть вполне резонный вопрос: а как догадаться, что данное выражение нужно умножить именно на $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$? Нельзя ли придумать общий способ рассуждения, позволяющий решать подобные задачи?

Более естественно было бы решать эту задачу так. Запишем данные выражения в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=$$
$$=\frac{p\,(a,b,c)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$
$$=\frac{q\,(a,b,c)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

(p будет многочленом третьей степени, а q — пятой). Мы должны доказать, что если $p\,(a,b,c)=0$, то и $q\,(a,b,c)=0$. Естественно попробовать доказать, что многочлен q делится на многочлен p, то есть найти такой многочлен $r=r\,(a,b,c)$, что $q=pr$ (можно доказать общую теорему для многочленов от любого числа переменных: если q равен нулю при всех тех значениях переменных, при которых p равен нулю, и при этом многочлен p *неприводим*, то есть не раскладывается на множители — а в данном случае так оно и есть, — то q должен делиться на p). Делить многочлены можно обычным образом — «уголком», считая их многочленами от одной переменной a (в коэффициенты которых входят буквы b и c); например, p запишется так:

$$p\,(a,b,c)=-a^3+p_1(b,c)\,a^2+$$
$$+\,p_2(b,c)\,a+p_3(b,c).$$

В результате мы получили бы, разумеется, что $q=pr$, где

$$r\,(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)\left(\frac{1}{a-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=-a^2+ab+ac+$$
$$+\,bc-b^2-c^2.$$

В данном примере осуществление этого плана решения связано с очень трудоемкими вычислениями (в многочлене $q\,(a,b,c)$ даже после приведения подобных членов останется 21 член!), но мы очень советуем читателям обдумать все детали этого общего плана, применимого ко многим другим задачам.

Н. Б. Васильев

М28

а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

Начнем с аналогичной, но более простой задачи. Пусть дано n шаров, среди которых один радиоактивен; за сколько проверок его можно выделить? Легко указать способ, позволяющий за k проверок выделить один из $n=2^k$ шаров: вначале делим все шары на две равные кучки по 2^{k-1} шаров в каждой, проверяем одну из них и тем самым определяем, в какой из них находится радиоактивный шар, затем эту кучку из 2^{k-1} шаров снова делим пополам, проверяем одну из половин и т. д. — при каждой проверке число шаров уменьшается вдвое, и после k проверок мы найдем радиоактивный шар. Ясно, что если $n<2^k$, то тоже достаточно k проверок. Итак, для того чтобы выделить один радиоактивный шар из n, достаточно проделать $f_1(n)$ проверок, где $f_1(n)$ — наименьшее целое число k, для которого $n\leqslant 2^k$ (другими словами, $f_1(n)$ — наименьшее целое число, большее или равное $\log_2 n$). Ниже мы увидим, что меньшего числа проверок заведомо недостаточно.

Теперь перейдем непосредственно к решению нашей задачи. Здесь уже не удается получить точный результат сразу для любого n, и мы выясним сначала, за сколько проверок можно выделить 2 радиоактивных шара из n, если n — небольшое число.

Для $n=3$ достаточно двух проверок; после того, как мы проверим один за другим два шара, будет уже ясно, радиоактивен ли оставшийся третий шар. Может, конечно случиться, что первый же проверенный шар не радиоактивен, и тогда дальнейшие проверки не нужны;

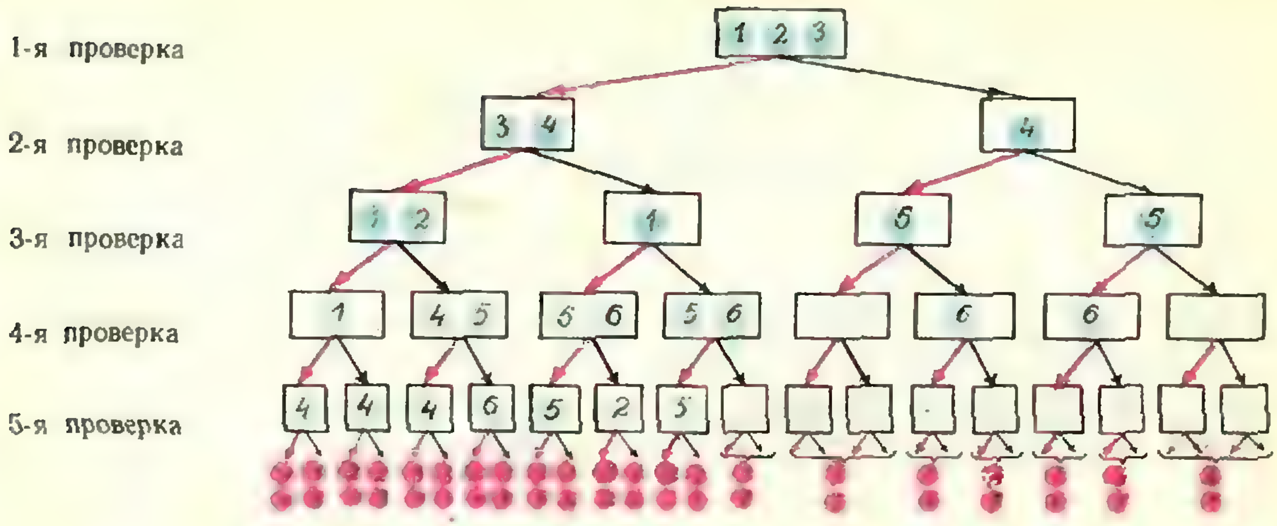


Рис. 1. На этом рисунке представлен способ, позволяющий за 5 проверок выделить 2 радиоактивных шара из 7. Мы считаем, что шары занумерованы числами 1, 2, ..., 7, и в каждой клетке записываем кучку шаров, которые подвергаются проверке (иногда кучка состоит из одного шара). Например, первой проверяется кучка из трех шаров {1, 2, 3}. У каждой проверки возможны два исхода: «есть радиоактивность» — тогда нужно идти по красной стрелке, и «нет радиоактивности» тогда по черной стрелке. Если клетка заштрихована, значит, дальнейшие проверки не нужны. Для каждого пути, спускающегося по стрелкам сверху вниз, в результате всех проделанных на этом пути проверок можно установить, какая именно пара шаров радиоактивна (она указана под самой нижней стрелкой). Убедитесь в этом!

но нас интересует, за какое число проверок можно выделить радиоактивные шары наверняка, при любом, даже самом невыгодном для нас варианте их расположения. Точно так же, проверяя шары один за другим, можно выделить два шара из 4 за 3 проверки, из 5 — за 4, из 6 — за 5, из 7 — за 6 и т. д. Впрочем, для $n=7$ можно обойтись и пятью проверками. Прежде чем читать решение дальше, попробуйте это доказать, то есть найти соответствующий способ поиска радиоактивных шаров. Один такой способ (их существует несколько) указан на рисунке 1.

Этот рисунок помогает понять, что мы понимаем под словами «способ поиска шаров»: чтобы задать какой-то способ, нужно указать кучку шаров, которая проверяется первой, а также указать, какую кучку проверять после каждого из возможных исходов очередного испытания на радиоактивность; другими словами, нужно начертить диаграмму из прямоугольных клеточек и стрелок — такую же, как на рисунке 1, только, если нужно, с другим числом k проверок — и вписать в каждую клетку какие-то номера шаров.

Теперь постараемся ответить на два тесно связанных между собой вопроса: как найти способ поиска двух шаров среди n, состоящий из k проверок, если такой способ существует; если его не существует, то как это доказать?

В принципе для любых конкретных n и k эти вопросы можно решить «полным перебором»: перепробовать один за другим все возможные способы заполнить клетки диаграммы, соответствующей k проверкам, подмножествами из n шаров (ведь таких способов существует конечное число!) и для каждого из этих способов проверить, позволяет ли он выделить радиоактивные шары или нет (то есть будут ли разным предположениям: какая именно пара шаров радиоактивна — соответствовать разные пути по стрелочкам сверху вниз). Но число таких способов даже при небольших n и k настолько велико, что практически проделать «полный перебор» невозможно даже с помощью вычислительной машины (например, при $n=11$ и $k=7$ заполнить клетки диаграммы кучками можно *более чем 10^{400} разных способов!). Мы покажем сейчас, как можно этот перебор сильно сократить.*

Вернемся снова к рисунку 1. От самого нижнего ряда клеточек, соответствующего последней, пятой проверке, отходит $2^5=32$ стрелки. В общем случае, для k проверок, их будет 2^k. Если способ поиска, записанный на диаграмме, гарантирует выделение радиоактивных шаров, то каждой из этих стрелочек соответствует только один из возможных вариантов ответа: какие именно два шара радиоактивны (но, может быть, разным стрелочкам соответствует один и тот же вариант). Поэтому число различных возможных вариантов ответа заведомо не больше числа стрелочек, то есть не больше 2^k.

Сформулируем это основное соображение так:

Если число возможных вариантов больше 2^k, то не существует способа, позволяющего за k проверок выделить один из этих вариантов.

То же самое можно сказать так:

Если существует способ, позволяющий за k проверок выбрать один вариант из N возможных, то $N \leqslant 2^k$.

(Последнее неравенство можно записать еще и так: $k \geqslant f_1(N)$.)

Конечно, это правило применимо к любой задаче, где нужно выбрать один вариант из N по результатам нескольких проверок; важно лишь то, что *каждая проверка имеет два возможных исхода* (в нашей задаче эти исходы таковы: «есть радиоактивность» и «нет радиоактивности»). В частности, из этого правила следует, что нельзя выделить один радиоактивный шар из n менее чем за $f_1(n)$ проверок: если $f_1(n)=k$, то $2^{k-1}<n$, а различных вариантов в этой задаче существует n (радиоактивен 1-й шар, радиоактивен 2-й шар, ..., радиоактивен n-й шар).

Вернемся снова к задаче, где имеется два радиоактивных шара. Сколько здесь различных вариантов? На рисунке 1, где мы выбираем 2 шара из 7, число вариантов равно 21. В общем случае существует $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ вариантов выбрать 2 шара из n. Из нашего основного правила, напечатанного выше на розовом фоне, следует, что если можно за k проверок выделить 2 шара из n, то $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$.

Условимся обозначать наименьшее число проверок, необходимое для выделения 2 шаров из n, через $f_2(n)$. Тогда последнее неравенство можно записать так:

$$f_2(n) \geqslant f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

n	3	4	5	6	7	8
$\frac{n(n-1)}{2}$	3	6	10	15	21	28
$f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$	2	3	4	4	5	5
$f_2(n)$	2	3	4	5	5	6

Из таблицы видно, что при некоторых n (например, при $n=6$, $n=8$) здесь возможно и строгое неравенство. Действительно, для того чтобы за k проверок можно было найти 2 радиоактивных шара среди n, мало того, чтобы выполнялось неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$. Нужно еще, чтобы таких вариантов, для которых первая проверка дала результат «+» (есть радиоактивность), было не больше 2^{k-1} и таких, для которых она дала результат «—» (нет радиоактивности), тоже было бы не больше 2^{k-1}, — ведь иначе, согласно основному правилу, мы не сможем за k—1 проверку выбрать из этих вариантов один! Точно так же каждому из исходов «++» (1-я проверка «+», 2-я проверка «+»), «+—», «—+», «— —» должно соответствовать не более 2^{k-2} вариантов и т. д.

Мы вернемся к решению этой задачи в следующем номере журнала.

А. Н. Виленкин

Ф35.

Спутник летит на высоте $h=300$ км. Какие неподвижные предметы можно будет рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника, если время экспозиции составляет $\tau=0{,}2$ сек?

На фотографии, полученной со спутника, при хорошем качестве пленки можно будет рассмотреть те неподвижные предметы, величина которых превышает смещение спутника относительно Земли за время экспозиции. Предметы меньших размеров на фотографии будут нерезкими — «размытыми».

Для того чтобы найти смещение спутника, нам нужно знать период T обращения спутника вокруг Земли. Нетрудно найти угловую скорость ω вращения спутника. Считая орбиту круговой, мы можем записать уравнение движения спутника (уравнение второго закона Ньютона):

$$m\omega^2 (R+h) = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

(m — масса спутника, M — масса Земли, R — радиус Земли и γ — гравитационная постоянная). Отсюда

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{(R+h)^3}} \quad \text{и}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{\gamma M}}.$$

Так как $h \ll R$, то мы можем пренебречь h по сравнению с R и записать формулу для периода обращения спутника в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}.$$

Это выражение можно еще упростить. Так как тело массы m, лежащее на поверхности Земли, притягивается к ней с силой, равной mg,

то $mg = \gamma \frac{Mm}{R^2}$. Поэтому $\gamma \frac{M}{R^2} = g$ и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5000 \text{ сек}.$$

Пусть спутник находится над точкой A земной поверхности (рис. 2).

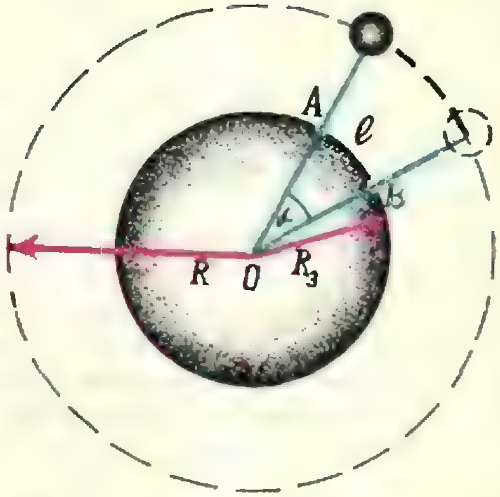


Рис. 2.

За время экспозиции τ он сделает $\frac{\tau}{T}$ часть оборота вокруг Земли и будет находиться над точкой B. Найдем расстояние l между точками A и B:

$$l = \frac{2\pi R}{2\pi}\alpha = R\cdot\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right) =$$

$$= 2\pi R\frac{\tau}{T} \approx 1{,}6\cdot 10^3 \text{ м}.$$

Таким образом, на фотографии можно будет рассмотреть предметы, размеры которых больше 1,6 *км*.

Если считать, что объектив фотокамеры имеет фокусное расстояние 10 *см*, то, как нетрудно подсчитать, предметы длиной 1,6 *км* на фотопленке должны иметь размер 0,5 *мм*. Это означает, что определяющим при фотографировании будет не качество пленки, а размытость изображения из-за смещения спутника.

Ф36

Капля жидкости лежит на плоской стороне полусферической стеклянной пластинки. Покажите, как можно определить показатель преломления жидкости из наблюдений полного внутреннего отражения. Показатель преломления стекла тоже неизвестен, и его надо определить.

Если луч света идет так, как показано на рисунке 3, то мы можем записать, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n_{\text{ж}},$$

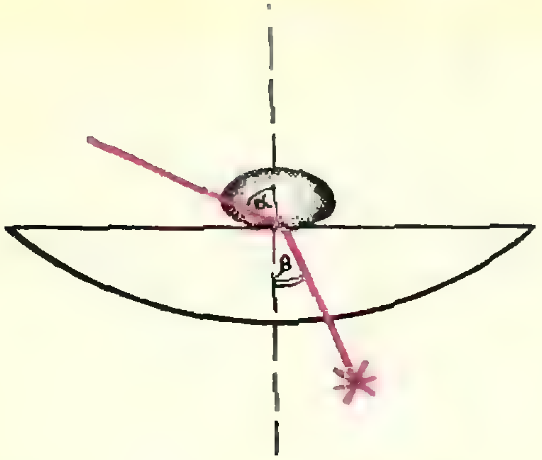


Рис. 3.

где $n_{жс}$ — показатель преломления луча света при переходе из жидкости в стекло.

При полном внутреннем отражении света на границе стекло — жидкость $\alpha=90°$, и поэтому $\sin\beta_0=n_{жс}$, где β_0 — угол падения луча, при котором наблюдается полное внутреннее отражение. Аналогично для полного внутреннего отражения света на границе стекло — воздух мы можем записать $\sin\delta_0=\frac{1}{n_c}$, где n_c — показатель преломления стекла. Из этих двух формул, учитывая, что $n_{жс}=\frac{n_ж}{n_c}$, найдем

$$n_ж=\frac{\sin\beta_0}{\sin\delta_0}.$$

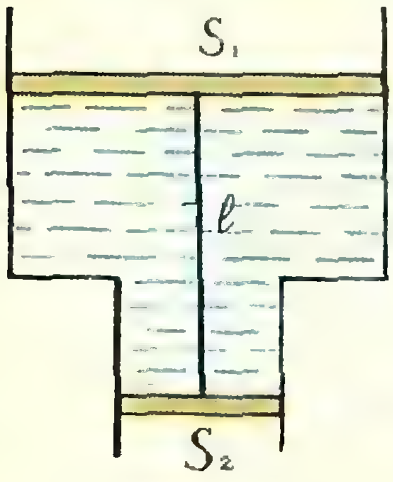


Рис. 4.

Теперь несложно определить показатель преломления жидкости: направить луч света так, чтобы его можно было наблюдать лишь испытавшим полное внутреннее отражение на границе раздела стекло — жидкость. Этим мы определим угол β_0. Затем точно так же определим угол δ_0. После этого вычислить показатель преломления жидкости не составит труда. Провести опыты поможет то обстоятельство, что луч не испытывает преломления на сферической границе стекла и воздуха, так как он падает перпендикулярно поверхности стекла. Это позволяет легко определить направление луча, падающего на плоскую границу пластинки.

Ф37

В двух вертикально расположенных цилиндрах, площади сечения которых S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня, соединенных тонкой невесомой нитью длины l (рис. 4). Пространство между поршнями заполнено водой. Найти натяжение нити, если концы сосудов открыты в атмосферу. Плотность воды ρ.

Если давление жидкости на большой поршень (с площадью S_1) равно p, а атмосферное давление p_0, то на поршень действует вверх сила давления $F_1=S_1p$, а вниз — сила T натяжения нити и сила атмосферного давления $F'_1=p_0\cdot S_1$. Так как поршень находится в равновесии, то

$$S_1p=S_1p_0+T.$$

Аналогичное уравнение можно составить и для нижнего поршня: вверх на него действуют сила натяжения нити T и сила атмосферного давления $F'_2=p_0S_2$, а вниз — сила давления воды $F_1=p'S_2$. Причем давление p' воды на нижний поршень на величину ρgl больше, чем на верхний. Так как поршень находится в равновесии, то

$$T+p_0S_2=(p+\rho gl)S_2.$$

Решая оба уравнения совместно, найдем

$$T=\rho gl\frac{S_1S_2}{S_1-S_2}.$$

Обычно мы проверяем ответ, исследуя его при предельных значениях параметров. Будем считать, что $S_2 \to S_1$. В этом случае $T \to \infty$. Это и понятно. Вся система сохраняет равновесие благодаря давлению воды на кольцо с площадью $S_1 - S_2$ на верхнем поршне. Если $S_1 \to S_2$, то давление на это кольцо должно стремиться к бесконечности. При этом к бесконечности должна стремиться и сила натяжения нити.

При $S_1 = S_2$ мы получим, что T бесконечно. Однако это уже неверно. Подобный предельный переход невозможен. Решая задачу, мы исходили из того, что система находится в равновесии. Однако при $S_1 = S_2$ равновесие невозможно и система поршней будет падать равноускоренно с ускорением свободного падения g. Натяжение нити в этом случае должно быть равно нулю. Этот пример показывает, как осторожно нужно относиться к предельным переходам в физике. Нужно следить за тем, чтобы при этом явление не стало совсем иным.

Такое решение прислали *Н. Федин* из Омска, десятиклассник *М. Федоров* из Москвы, *А. Рагозин* из Ижевска.

Интересное решение предложил *А. Жуков* из Кировска Донецкой области. Он воспользовался методом виртуальных перемещений. Хотя подробный рассказ об этом методе требует особой большой статьи, решение будет понятно и так.

Пусть нить уменьшилась на Δl, причем верхний поршень переместился на Δl_1, а нижний — на Δl_2. Так как при этом объем воды между поршнями не изменился, то оба поршня должны сместиться в одну и ту же сторону (опуститься), причем так, что

$$\Delta l_1 S_1 = \Delta l_2 S_2 \text{ и } \Delta l_2 - \Delta l_1 = \Delta l \quad (\Delta l_2 > \Delta l_1).$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$\Delta l_1 = \Delta l \frac{S_2}{S_1 - S_2} \text{ и } \Delta l_2 = \Delta l \frac{S_1}{S_1 - S_2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы при перемещении объема воды $\rho S_1 \Delta l_1$ (или $\rho S_2 \Delta l_2$) на l должно быть равно работе силы натяжения нити. Поэтому мы можем записать, что

$$T\Delta l = \rho g l(\Delta l_1 S_1) = \rho g l(\Delta l_2 S_2).$$

Отсюда

$$T = \rho g l \frac{S_2 S_1}{S_1 - S_2}.$$

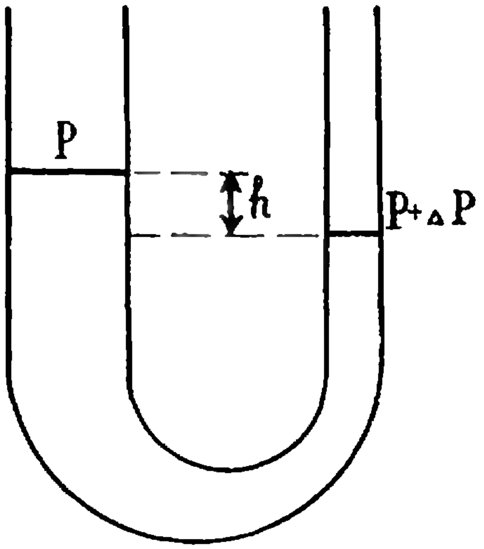


Рис. 5.

Ф38

Широкое колено U-образного ртутного манометра имеет втрое больший диаметр, чем узкое. К какому колену следует прикрепить шкалу для отсчета изменения давления, чтобы точность измерения была выше?

Пусть при изменении давления уровень ртути в широком колене поднялся на Δh_1, а в узком — опустился на Δh_2. Из условия неразрывности столба $\Delta h_1 S_1 = \Delta h_2 S_2$. Отсюда

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{S_1}{S_2} = 9\Delta h_1.$$

Это означает, что если шкалу прикрепить к тонкому колену манометра, то цена деления будет в 9 раз меньше. В 9 раз точнее будет при этом и отсчет изменения давления.

Интересно посмотреть, к какому из колен манометра выгоднее подсоединять сосуд, в котором мы измеряем изменение давления. Из условия равновесия жидкости в U-образном сосуде мы можем записать

$$p + \Delta p = p + \rho g h,$$

где h — разность уровней жидкости в коленах (рис. 5). Из этого уравнения найдем, что $h=\frac{\Delta p}{\rho g}$. Мы видим, что h не зависит от площадей колен манометра. Это означает, что точность измерений при подсоединении сосуда как к широкому, так и к узкому колену одна и та же.

Правильное решение прислали *А. Жуков* и восьмиклассница *С. Пастухова* из Свердловска.

Ф39

Планету радиуса r и массы M окружает равноплотная атмосфера, состоящая из газа с молекулярным весом μ. Какова температура атмосферы на поверхности планеты, если высота атмосферы равна h?

Запишем уравнение газового состояния для объема газа V с массой m (уравнение Менделеева — Клапейрона):

$$PV=\frac{m}{\mu}RT;$$

P — давление, V — объем газа, R — газовая постоянная и T — температура. Так как $\frac{m}{V}=\rho$, где ρ — плотность газа, то это уравнение мы можем переписать в виде $P=\frac{\rho}{\mu}RT$.

Отсюда $T=\frac{P\mu}{\rho R}$.

Ясно, что для того, чтобы найти температуру на поверхности планеты, нам нужно найти давление на ее поверхности. Если $\rho=\text{const}$, то $P=\rho gh$, где g — ускорение свободного падения на данной планете. Найдем его.

Для тела массы m, находящегося на поверхности планеты, сила притяжения равна mg. С другой стороны, согласно закону всемирного тяготения она равна $\gamma\frac{mM}{r^2}$. Поэтому можно записать, что $mg=\gamma\frac{mM}{r^2}$.

Отсюда $g=\gamma\frac{M}{r^2}$ и $P=\rho\gamma\frac{M}{r^2}h$.

Подставив это выражение для P в уравнение для температуры, получим

$$T=\frac{\gamma M\mu h}{r^2R}.$$

Правильное решение задачи прислал *В. Мальков* из Орши и *А. Проскуряков* из Москвы.

Ф40

При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона $I=21{,}5$ *эв*, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа равно $l=0{,}4$ *мм*? Электроды имеют вид больших плоских пластин, расположенных на расстоянии $d=3$ *мм* друг от друга.

Если разность потенциалов между электродами U, то напряженность электрического поля между ними $E=\frac{U}{d}$. В этом поле на электрон действует сила $F=E\cdot e$ (e — заряд электрона), сообщающая ему ускорение $a=\frac{F}{m}=\frac{Ee}{m}=\frac{Ue}{dm}$, где m — масса электрона.

При столкновении с атомом газа электрон передает ему свою энергию и останавливается (мы считаем, что столкновение неупруго). Масса атома много больше массы электрона. Поэтому атому газа при столкновении передается энергия $\frac{mv^2}{2}$, приобретаемая электроном между его последовательными столкновениями. Эта энергия должна быть равна энергии ионизации газа I:

$$\frac{mv^2}{2}=I. \qquad (*)$$

Найдем теперь скорость, приобретаемую электроном. Если время разгона равно τ, то мы можем записать, что $v=a\tau=\frac{Ue}{md}\tau$ и $l=\frac{a\tau^2}{2}=\frac{Ue\tau^2}{2md}$.

Из этих уравнений найдем, что

$$v=\sqrt{\frac{2Uel}{md}}.$$

Подставляя это выражение для v в уравнение (*), получим

$$\frac{Uel}{d}=I.$$

Отсюда $U=\frac{Id}{el}\approx 160\textit{в}$.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. В. Гольдберг

Показательными уравнениями обычно называют уравнения, в которых неизвестная величина содержится в показателе степени (а основания степеней ее не содержат).

Решение показательных уравнений основано на следующем свойстве степеней:

если две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны, то равны и их показатели.

Согласно этому свойству простейшее показательное уравнение

$$a^x=b \quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

решается следующим образом:

$$a^x=a^{\log_a b},\ x=\log_a b.$$

Трудность при решении показательных уравнений часто состоит в том, что нужно уметь увидеть общее основание левой и правой частей уравнения. Если в уравнении

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3} \qquad (1)$$

общее основание $\frac{2}{3}$ (или $\frac{3}{2}$) левой и правой частей сразу бросается в глаза, то в уравнении

$$(0,4)^{x-1}=(6,25)^{6x-5} \qquad (2)$$

для отыскания общего основания $\frac{2}{5}$ $\left(\text{или } \frac{5}{2}\right)$ необходимо предварительно обратить десятичные дроби в обыкновенные. (Доведите до конца решения приведенных примеров; в уравнении (1) вы получите ответ $x=2$, а в уравнении (2) $x=\frac{11}{13}$.)

Для сведения многих показательных уравнений к простейшему часто бывает полезна следующая хорошо известная формула:

$$a^p\cdot b^p=(ab)^p. \qquad (3)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=225.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$3^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{2}}=225.$$

Пользуясь формулой (3), получим

$$15^{\frac{x}{2}}=15^2,$$

откуда находим $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2^{3x}\cdot 5^x=1600.$$

Решение. Имеем следующую цепочку эквивалентных уравнений:

$$(2^3)^x\cdot 5^x=1600,\ 8^x\cdot 5^x=1600,$$
$$40^x=40^2,\ x=2.$$

Легко свести к простейшему уравнение вида

$$a^{\varphi(x)}=1 \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

Для этого достаточно единицу представить как a в нулевой степени: $1=a^0$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5^{x^2+x-2}=1.$$

Решение. Последовательно находим

$$5^{x^2+x-2}=5^0,\ x^2+x-2=0,$$
$$x_1=-2,\ x_2=1.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$9^{3-5x}\cdot 7^{5x-3}=1.$$

Решение. По определению степени с отрицательным показателем $9^{3-5x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{5x-3}$. Далее последовательно находим

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{5x-3}=\left(\frac{7}{9}\right)^{0},\quad 5x-3=0,$$

$$x=\frac{3}{5}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}.$$

Решение. В этом уравнении имеются два основания: 3 и 5. Подсчитаем, с каким показателем эти основания входят в уравнение. С этой целью «перенесем» (с помощью деления) все члены в левую часть:

$$\frac{3^{2x-1}}{9\cdot 3^{3x}}\cdot\frac{5^{3x+2}\cdot 5}{5^{2x}}=1.$$

Далее имеем

$$5^{x+3}\cdot 3^{-x-3}=1,\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0},$$

$$x+3=0,\quad x=-3.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

Решение. Сгруппируем члены, содержащие 4^x и 9^x:

$$9^{x}\left(\frac{1}{3}\cdot 81+\frac{9}{2}\right)=4^{x}(24-3),$$

$$\frac{63}{2}\cdot 9^{x}=21\cdot 4^{x}.$$

Сокращая на 21, получим $\frac{3}{2}\cdot 9^{x}=4^{x}$, или $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$, откуда находим

$$2x+1=0,\quad x=-\frac{1}{2}.$$

К простейшим показательным уравнениям иногда удается свести показательные уравнения более сложного вида:

$$f(a^{x})=0.$$

Замена $a^{x}=y$ сводит это уравнение к уравнению $f(y)=0$. Если $y_1,\ldots,y_k$ — корни последнего уравнения, то нам остается решить совокупность простейших показательных уравнений

$$a^{x}=y_1,\ \ldots,\ a^{x}=y_k.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$2^{x+1}+3\cdot 2^{x-3}=76.$$

Решение. Обозначим 2^x через y, тогда уравнение примет вид $2y+\frac{3}{8}y=76$, откуда находим $y=32$. Таким образом, $2^{x}=32$, $2^{x}=2^{5}$, $x=5$.

Пример 8. Решить уравнение

$$3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3\cdot 9^{\frac{2}{x}}-10\cdot 9^{\frac{1}{x}}+3=0.$$

Обозначив $9^{\frac{1}{x}}$ через y, получим квадратное уравнение относительно y: $3y^{2}-10y+3=0$, откуда $y_1=3$, $y_2=\frac{1}{3}$.

Далее рассматриваем два случая:

а) $9^{\frac{1}{x}}=3,\quad 3^{\frac{2}{x}}=3^{1},\quad \frac{2}{x}=1,\ x_1=2;$

б) $9^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{3},\quad 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1},\quad \frac{2}{x}=-1,$

$$x_2=-2.$$

К решению квадратного уравнения сводятся решения таких показательных уравнений, в которых имеются три различных основания, образующие геометрическую прогрессию, причем эти основания возводятся в одну и ту же зависящую от x степень*).

---

*) В общем виде такие уравнения можно записать следующим образом: $a(m^{2})^{\varphi(x)}+b(mn)^{\varphi(x)}+c(n^{2})^{\varphi(x)}=0$, где $mn>0$, $m\neq 1$, $n\neq 1$, a, b, c — любые действительные числа, причем $a\neq 0$. Заменой $\left(\frac{m}{n}\right)^{\varphi(x)}=y$ это уравнение сводится к квадратному $ay^{2}+by+c=0$.

Пример 9. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x.$$

Решение. Мы видим, что в этом уравнении основания 16, 36, 81 образуют геометрическую прогрессию и возводятся в одну и ту же степень x. Для решения разделим обе части уравнения на 81^x. Получаем

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{9}\right)^x=2.$$

Обозначив $\left(\frac{4}{9}\right)^x$ через y, приходим к квадратному уравнению $3y^2+y-2=0$ с корнями $y_1=-1$, $y_2=\frac{2}{3}$. Рассматриваем два случая:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=-1$ (решений нет);

б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^1$,

$$2x=1,\ x=\frac{1}{2}.$$

Пример 10. Решить уравнение

$$27^x+12^x=2\cdot 8^x.$$

Это уравнение близко к только что рассмотренному: показатель степени у оснований один и тот же, однако основания 27, 12 и 8 геометрической прогрессии не образуют. Геометрическую прогрессию образуют числа 27, 18, 12 и 8 — мы можем считать, что член, содержащий 18^x, входит в уравнение с нулевым коэффициентом.

Решение. Делим все члены на 8^x, получаем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2.$$

Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ через y, приходим к кубическому уравнению

$$y^3+y-2=0,$$

левую часть которого легко разложить на множители:

$$(y^3-1)+(y-1)=0,$$
$$(y-1)(y^2+y+2)=0.$$

Единственный действительный корень этого уравнения $y=1$ приводит к уравнению $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$, откуда находим $x=0$.

Пример 11. Решить уравнение

$$5\cdot 2^{3x-3}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{5}{8}\cdot 2^{3x}-\frac{96}{2^{3x}}+7=0.$$

Обозначим 2^{3x} через y, тогда получим:

$$\frac{5}{8}y-\frac{96}{y}+7=0.$$
$$5y^2+56y-768=0,$$
$$y_1=-19{,}2;\quad y_2=8.$$

а) $2^{3x}=-19{,}2$ — уравнение не имеет решений.

б) $2^{3x}=8$, $2^{3x}=2^3$, $3x=3$, $x=1$.

В разобранном примере произведение оснований равно единице, и это сразу бросается в глаза; в следующем примере этот факт заметить не так просто *).

Пример 12. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+$$
$$+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10.$$

Решение. Перемножим основания:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=$$
$$=\sqrt{25-24}=1.$$

Если обозначить $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ через y, то $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=$ $=\frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x}=\frac{1}{y}$. Следовательно, уравнение принимает вид $y+\frac{1}{y}=10$ или $y^2-10y+1=0$, откуда находим $y_1=5+2\sqrt{6}$, $y_2=5-2\sqrt{6}$. Рассматриваем два случая:

---

*) Заметим, что уравнения, разобранные в примерах 11 и 12, можно отнести к тому же типу, что и уравнения примеров 9 и 10: основания степеней в них 2, 1, $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, 1, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ образуют геометрическую прогрессию и возводятся в одну и ту же зависящую от x степень.

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$,

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2,$$

$$x_1=2.$$

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$,

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=$$

$$=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{-2},\quad x_2=-2.$$

Не всегда показательное уравнение можно отнести к одному из рассмотренных типов. В следующих примерах даны уравнения, при решении которых появятся моменты, не встречавшиеся у нас ранее.

Пример 13. Решить уравнение

$$5^x\cdot\sqrt[x+1]{8^x}=100.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$5^x\cdot2^{\frac{3x}{x+1}}=5^2\cdot2^2. \qquad (4)$$

Разделим обе части уравнения (4) на $5^2\cdot2^2$, получим

$$5^{x-2}\cdot2^{\frac{x-2}{x+1}}=1,\ \text{или}$$

$$\left(5\cdot2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1. \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что это равенство возможно в любом из двух случаев:

а) показатель степени равен нулю, что дает $x_1=2$;

б) выражение, возводимое в степень $x-2$, равно единице, что приводит ко второму решению:

$$5\cdot2^{\frac{1}{x+1}}=1,\ 5^{x+1}\cdot2=1,$$

$$(x+1)\lg5+\lg2=0,$$

$$x+1=-\frac{\lg2}{\lg5},\quad x_2=-1-\frac{\lg2}{\lg5},$$

$$x_2=-\frac{1}{\lg5}.$$

При решении этого уравнения второй корень часто теряют, либо забывая в уравнении (5) приравнять основание единице, либо сразу приравнивая показатели у 5 и 2 в уравнении (4).

Пример 14. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$$

Решение. Заметим, что

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2^2.$$

Поэтому данное уравнение имеет решение $x=2$. Трудность состоит в доказательстве единственности полученного решения. Здесь можно рассуждать, например, так. Запишем наше уравнение в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1. \qquad (6)$$

Каждая из функций $y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ и $y=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$, как показательная функция с основанием, меньшим единицы, является убывающей для $-\infty<x<+\infty$, поэтому их сумма — тоже убывающая функция. Значит, при $x<2$ левая часть уравнения (6) больше единицы, а при $x>2$ меньше единицы.

Ответ: $x=2$.

Упражнения

Решить следующие уравнения:

1. $2\cdot(0{,}5)^{-\sqrt{x}}=(0{,}25)^{1-\sqrt{x}}$.
2. $12^{2x+4}=3^{3x}\cdot4^{x+6}$.
3. $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=8\cdot3^{\frac{x}{3}}$.

4. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

5. $3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x = 2^{x+3} + 3^{x-2}$.

6. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

7. $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

8. $9^{x-1} + 3^x = 2\cdot 3^{1,5x}$.

9. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} =$
$= 6$.

10. $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$.

11. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$.

12. $\sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} - \sqrt[x]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} -$
$- \sqrt[x]{\frac{2}{3}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 3$.

13. $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0$.

14. $4^x = 2\cdot 14^x + 3\cdot 49^x$.

15. $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x +$
$+ \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x = 2a$
$(a > 1)$.

Проверьте, что уравнение примера 12 получается из этого уравнения при $a = 5$. Напишите, какой вид принимает это уравнение при $a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, 3, 4, 6$.

16. $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$.

17. $(\sin 1)^x + (\cos 1)^x = 1$.

18. $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

19. $5^{\sqrt{x}} + 12^{\sqrt{x}} = 13^{\sqrt{x}}$.

20. $10^{x^2} = 2\cdot 100^x$.

21. $2^{x+3} - 3^{x^2-2} = 3^{x^2+1} - 2^{x-1}$.

22. $3^{x^2} + 4^{x^2} = 5^{x^2}$.

23. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

24. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$.

25. $8^x + 9\cdot 2^{x+2} = 208$.

(Начало см. на стр. 31.)

Следующий важный шаг в усовершенствовании электромагнитов был сделан американским физиком Джозефом Генри в 1827 году. Он первый догадался намотать на железный сердечник не один, а много слоев проволоки, а сами витки укладывать вплотную друг к другу. Возможно, что до этого додумались бы и другие, но в то время еще не было проволоки, покрытой изоляцией. Генри и был первым, кто сделал такую проволоку. В продаже проводов с изоляцией тогда, да и много позже, конечно, не было. По свидетельству сотрудника Генри, изобретателя телеграфа Ф. Морзе, даже в 1837 году не голыми проволоками пользовались только ... модистки для изготовления каркасов дамских шляп. Провода, покрытые изоляцией, Генри изготовил сам. В качестве изоляционного материала он использовал полосы из шелка, нарезанного из ... нарядов его жены (в те времена женщины носили длинные и пышные одежды). Так впервые появились и были использованы изолированные провода. Судя по сохранившимся в музее электромагнитам Генри, ему пришлось намотать шелковые полосы на многие километры проволоки. Но зато уже в 1831 году он мог сообщить, что самый большой его электромагнит способен удерживать груз в 930 килограммов!

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ НА МЕХМАТЕ МГУ В 1970 ГОДУ

Н. Н. Колесников

В «Кванте» № 2 за 1970 год была напечатана статья Н. С. Бахвалова и Н. Н. Кузнецова о письменном экзамене по математике на мехмате МГУ в 1969 году. Хотелось бы, не повторяя сделанные там замечания о характере этого экзамена, подчеркнуть некоторые его особенности в 1970 году.

Задачи, предложенные поступавшим, еще раз подтверждают положение о том, что успешное их решение доступно любому абитуриенту, твердо усвоившему школьную программу, а не только выпускникам математических школ. Вы увидите, что эти задачи не содержат «подводных камней» или «ловушек», а требуют четкого понимания основных разделов программы по математике для поступающих в вузы и определенных навыков в технике математических выкладок и решении простейших уравнений, неравенств и геометрических задач.

Естественно, что такая «стандартность» задач предполагает повышение требований к оценке их решений, требований к умению доводить решение до конца, а не ограничиваться намеками на решение. Удовлетворительная оценка (три) ставилась в 1970 году за доведенное до конца правильное решение любых двух или трех задач, хорошая (четыре) — любых четырех задач, отличная (пять) — пяти задач. На решение задания (набора из пяти задач — варианта) отводилось 4 астрономических часа.

Перейдем к разбору одного из вариантов письменного экзамена по математике, коротко останавливаясь на наиболее характерных ошибках, встретившихся в работах поступавших на механико-математический факультет.

Вариант I

1. Решить неравенство

$$-\log_{\frac{1}{2}}(1+\cos 3x) \leqslant 2+\log_2\left(\frac{1}{4}-\cos x\right).$$

2. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} y^2-|xy|+2=0, \\ 8-x^2=(x+2y)^2. \end{cases}$$

3. Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $1/3$ длины шоссе, а гонщик C — перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 минут A впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем C. Сколько времени тратит на круг гонщик A?

4. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

5. Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P

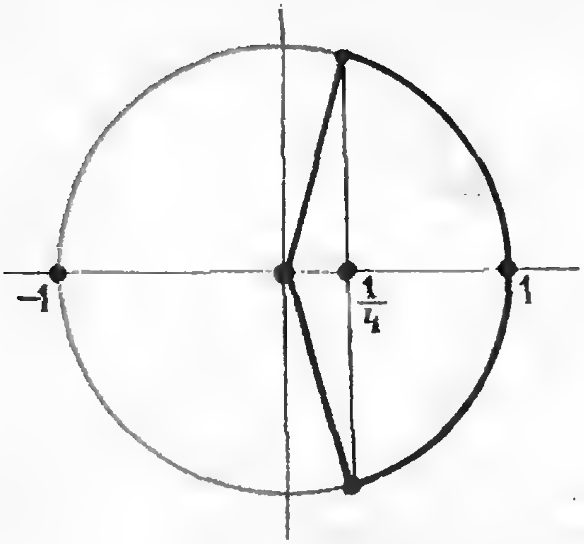


Рис. 1.

угол φ, пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $AC=2r$

1. Решение таких примеров принято начинать с нахождения общей области определения входящих в него функций, или ОДЗ. Очевидно, ОДЗ данного неравенства определяется системой

$$\begin{cases}1+\cos 3x>0,\\ \frac{1}{4}-\cos x>0,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\cos 3x>-1,\\ \cos x<\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Первое неравенство системы можно переписать так: $\cos 3x\neq -1$, откуда $x\neq\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$. Учитывая, что $\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$, то есть значения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ исключаются вторым неравенством, получаем следующую систему неравенств (эквивалентную исходной):

$$\begin{cases}x\neq\pi(2k+1),\\ \cos x<\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Значения неизвестного, удовлетворяющие последней системе, на тригонометрическом круге (рис. 1) отмечены красным цветом, а аналитически ОДЗ записывается следующим образом:

$$\arccos\frac{1}{4}+2\pi k<x<2\pi-\arccos\frac{1}{4}+2\pi k,$$
$$x\neq\pi(2k+1).$$

Перейдем в логарифмах к одному основанию, например к 2. Тогда неравенство примет вид

$$\log_2(1+\cos 3x)\leqslant 2+\log_2\left(\frac{1}{4}-\cos x\right)$$

или

$$\log_2(1+\cos 3x)\leqslant\log_2(1-4\cos x).\quad (1)$$

Неравенство (1) в отмеченной ОДЗ эквивалентно такому:

$$1+\cos 3x\leqslant 1-4\cos x.$$

Перенося все члены влево и заменяя $\cos 3x$ на $4\cos^3 x-3\cos x$, получим неравенство

$$(1+4\cos^2 x)\cos x\leqslant 0.$$

Выражение в скобках, очевидно, положительно, следовательно, неравенство (1) равносильно в ОДЗ такому:

$$\cos x\leqslant 0.$$

Решения последнего неравенства хорошо известны, с учетом ОДЗ *) получаем окончательно ответ:

$$2\pi k+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2\pi k,$$

причем $x\neq\pi(2k+1)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

Самым характерным недочетом при решении этого простого примера явилось игнорирование ОДЗ или неумение с нею обращаться, что приводило к ошибке в ответе (точка π не была исключена). К неправильному ответу приходили и те поступавшие, которые не овладели техникой решения простых тригонометрических уравнений. Так, зачастую, считалось, что условие $\cos 3x>-1$ выполнено для любых x.

2. Решение этой системы можно провести несколькими способами. Приведем один из них.

Поскольку в первое уравнение

---

*) Ограничение $\cos x<{}^1/_4$ перекрывается неравенством $\cos x\leqslant 0$; поэтому остается лишь учесть, что $x\neq\pi(2k+1)$.

входит модуль произведения неизвестных, рассмотрим два случая.

а) Пусть $xy \geqslant 0$. При этом условии система имеет вид

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2 = 0, \\ -8 + 2x^2 + 4xy + 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 4 и складывая со вторым, получим $2x^2 + 8y^2 = 0$, что возможно только при действительных $x = y = 0$. Но эти значения неизвестных рассматриваемой системе явно не удовлетворяют.

б) Пусть теперь $xy < 0$. Исходная система примет вид

$$\begin{cases} y^2 + xy + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y^2 + xy + 2 = 0, \\ 2x^2 + 4xy + 4y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение опять на 4 и вычитая его из второго, получим $x^2 = 8$, то есть $x = \pm 2\sqrt{2}$. Теперь из первого уравнения легко найти y: $(y \pm \sqrt{2})^2 = 0$, откуда $y = \mp \sqrt{2}$.

Согласно предположению $xy < 0$. Учитывая это, находим ответ:

$$x = 2\sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$$

или

$$x = -2\sqrt{2},\ y = \sqrt{2}.$$

Проверка подтверждает, что обе пары чисел являются корнями.

Этот пример также не содержит в себе никаких подвохов и хитростей. Он рассчитан на школьников, имеющих обычную математическую культуру. Ошибки поступавших при решении этого примера были связаны с нечетким представлением об абсолютной величине (модуле) функции и неумением правильно записать ответ. При этом либо не рассматривались два случая, а уравнение с модулем просто заменялось тем или другим уравнением без него, либо полученный набор значений x и y не был согласован с условием $xy < 0$, появлялись лишние ответы.

3. Эту задачу можно решать по-разному, вводя те или другие неизвестные.

Пусть t_A, t_B и t_C — времена, которые тратят на круг гонщики A, B и C соответственно (длину пути примем за единицу). Тогда скорости каждого из них будут $\frac{1}{t_A}$, $\frac{1}{t_B}$, $\frac{1}{t_C}$.

Заметим, что при любых, но одинаковых абсолютных скоростях расстояние между гонщиками во все время движения сохранялось бы неизменным. Расстояния между гонщиками сокращаются за счет избытка скорости одного над скоростью другого. Скорость гонщика A относительно B есть $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}$, A относительно C — $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}$, а скорость B относительно C равна $\frac{1}{t_B} - \frac{1}{t_C}$.

Теперь легко перевести условия задачи на язык уравнений. Поскольку гонщик A впервые догнал B, когда последний закончил свой первый круг, то A догнал B за t_B часов. Но для этого A понадобилось покрыть $^1/_3$ круга с относительной скоростью $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}$, это дает уравнение

$$\left(\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B}\right) t_B = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Начальное расстояние между гонщиками A и C было $^2/_3$, гонщик A покрыл его с относительной скоростью $\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}$ за $t_B + \frac{1}{6}$ часов; получили второе уравнение:

$$\left(\frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_C}\right)\left(t_B + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Кроме того, известно, что

$$t_B + \frac{1}{24} = t_C. \qquad (3)$$

Из уравнения (1) сразу следует, что $t_B = \frac{4}{3} t_A$, а из уравнения (3) $t_C = \frac{4}{3} t_A + \frac{1}{24}$. Исключая теперь из

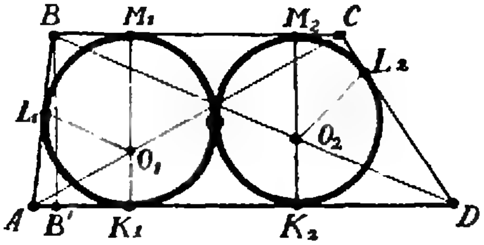


Рис. 2.

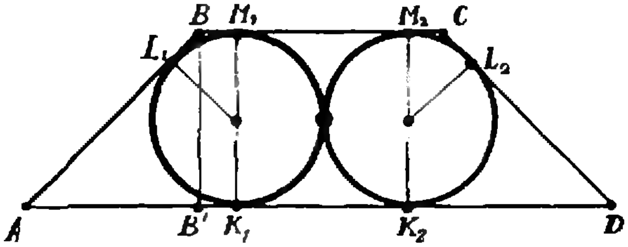


Рис. 3.

уравнения (2) t_B и t_C, получаем уравнение, содержащее только t_A:

$$\left(\frac{1}{t_A}-\frac{24}{32t_A+1}\right)\left(\frac{4}{3}t_A+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3},$$

или

$$64t_A^2-12t_A-1=0. \qquad (4)$$

Отбрасывая непригодное по смыслу задачи отрицательное решение квадратного уравнения (4), получаем ответ: $t_A=\frac{1}{4}$.

Большинство поступавших, не решивших до конца эту задачу, не проявили достаточных навыков в решении логических задач: они либо ошибались при составлении уравнений, либо не могли аккуратно решить полученную систему.

4. Пусть $ABCD$ (рис. 2) — данный четырехугольник, O_1 и O_2 — центры указанных окружностей, лежащие на диагоналях AC и DB. Точки K_1, L_1, M_1 являются точками касания окружности с центром в O_1 со сторонами AD, AB, BC соответственно, а K_2, L_2, M_2 — точки касания окружности с центром в O_2 со сторонами AD, CD, BC. Пусть B' — основание высоты, опущенной из B на AD.

Согласно условиям окружности равны и касаются друг друга, откуда следует параллельность общих к ним касательных: BC и AD. Теперь замечаем, что $\measuredangle BCA=\measuredangle CAD$, как накрест лежащие углы, и $\measuredangle CAD=\measuredangle BAC$, так как AC — биссектриса (AB и AD — касательные, а AC проходит через центр окружности). Следовательно, $\measuredangle BAC=\measuredangle CAD$, треугольник ABC — равнобедренный и $AB=BC$.

Итак, у нашего четырехугольника $BC \parallel AD$, $AB=CD$, следовательно, он либо трапеция, причем равнобедренная, либо параллелограмм.

Параллелограмм не подходит, поскольку центры O_1 и O_2 должны лежать на средней линии четырехугольника, но в параллелограмме диагонали, пересекаясь между собой, делятся пополам, то есть центры окружностей обязаны были бы совпасть, что противоречит условиям. Сделаем новый рисунок (рис. 3).

Пусть $BM_1=M_2C=x$. Тогда $AB=BC=2r+2x$. Но $BM_1=BL_1$, как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, и тогда

$$AL_1=AK_1=2r+x.$$

По построению $B'K_1=x$, следовательно, $AB'=2r=BB'$, треугольник $AB'B$ равнобедренный и прямоугольный, то есть

$$\measuredangle A=\measuredangle ABB'=\frac{\pi}{4} \text{ и } \measuredangle D=\frac{\pi}{4}.$$

Теперь легко получить ответ. Искомая площадь

$$S=BB'\frac{BC+AD}{2},\quad BB'=2r,$$

$$BC=AB=2\sqrt{2}\,r,$$

$$AD=BC+2AB'=2\sqrt{2}\,r+4r,$$

$$S=2r\cdot\frac{2\sqrt{2}r+(2\sqrt{2}r+4r)}{2}=$$

$$=4(\sqrt{2}+1)r^2.$$

Характерной ошибкой поступавших при решении этой задачи бы-

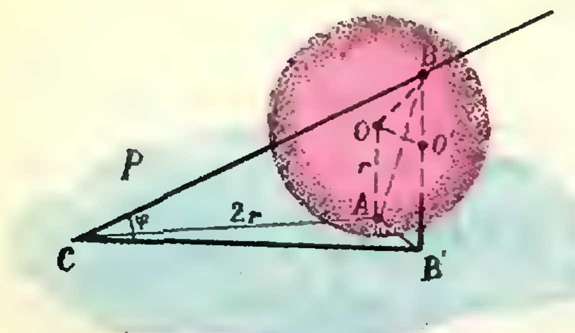


Рис. 4.

ло чрезмерное увлечение «очевидностью» некоторых логических выводов, небрежность в промежуточных рассуждениях. Так, многие без всяких доказательств написали, что $ABCD$ — равнобочная трапеция, другие возможности при этом не исследовались. Были случаи, когда доказательством того, что $ABCD$ может быть только трапецией, служил ... чертеж и слова о том, что для выполнения условий задачи по-другому четырехугольник нарисовать нельзя.

5. Пусть B' — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость P (рис. 4). Согласно условию

$$\angle BCB' = \varphi,\ OB = OA = r,\ CA \quad 2r,$$

$$\angle CBO = \frac{\pi}{2}.$$

Искомую длину отрезка AB можно найти, например, из прямоугольного треугольника $AB'B$, стороны которого легко вычислить. Замечаем, что $CB=CA=2r$ — это отрезки касательных к шару, проведенных из одной точки. Отсюда следует, что

$$BB'=CB\sin\varphi=2r\sin\varphi.$$

Сторона AB' треугольника $AB'B$ равна перпендикуляру OO', опущенному из O на BB' ($OA \parallel BB'$, как перпендикуляры к одной плоскости; $BB' \perp AB'$ так как AB' лежит в плоскости P, перпендикулярной BB'; $OO' \perp BB'$ по построению; поэтому $OO'B'A$ — прямоугольник). OO' находится из прямоугольного треугольника $OO'B$:

$$OO' = \sqrt{r^2-(BO')^3},$$

$$BO' = |BB'-B'O'| = |BB'-OA| =$$

$$= |2r\sin\varphi - r|,$$

$$OO' = AB' = \sqrt{\sin\varphi-\sin^2\varphi}\ 2r.$$

Наконец, AB находится из треугольника $AB'B$:

$$AB = \sqrt{(AB')^2+(B'B)^2} =$$

$$= 2r\sqrt{\sin\varphi}.$$

Мы сейчас убедились, что трудности при решении этой стереометрической задачи (как и других, предложенных в 1970 году) не превосходят тех, которые встречаются при решении школьных задач. Однако каждый год очень много абитуриентов на письменном экзамене по математике просто не приступают к решению стереометрических задач, видимо, считая, что их заведомо невозможно решить.

Из ошибок, встречавшихся в работах поступающих, следует отметить частое непонимание того, что такое угол прямой с плоскостью. Так, в разобранной задаче за этот угол часто принимался $\angle BCA$.

Также часто при решении пользовались условием, что $\angle CB'A$ — прямой, хотя в общем случае это совсем не так.

В заключение предлагаем читателям журнала для самостоятельного решения еще один вариант письменной работы по математике, предлагавшийся на мехмате МГУ в 1970 году.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_2(1+\cos 4x) \leqslant 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x.$$

2. Найти все действительные решения системы

$$\begin{cases} |xy-2| = 6-x^2, \\ 2+3y^2 = 2xy. \end{cases}$$

3. Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 минуту из одной точки кольцевого шоссе и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более двух минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, и еще через 3 минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности находится на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности находится на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая окружность касается сторон AB, BC и CD. Найти AC.

5. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1. BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

Замечания. В задаче 2 систему можно решать иначе: из первого уравнения выразить x через y и подставить во второе. Попробуйте такой метод решения.

Рисунок 3 симметричен, поэтому $BM_1 = M_2C$, что использовалось в решении задачи 4. Можно, однако, вывести это равенство из равенства соответствующих треугольников.

В задаче 5

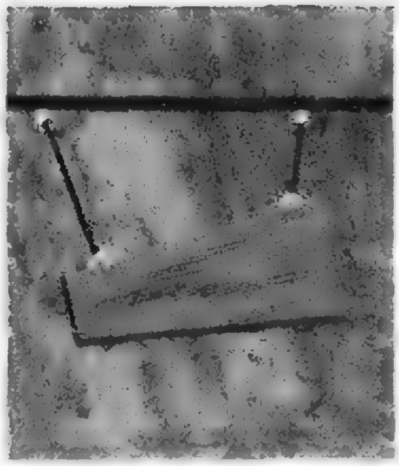
В решении задачи 5 знаки модуля в BO' поставлены потому, что точка B может лежать ниже, чем точка O'.

ВОПРОСЫ ПО ФИЗИКЕ

1. Хватит ли мощности гидроэлектростанции, чтобы испарить воду, проходящую через ее турбины?

2. Что стынет быстрее в одинаковых условиях: бульон или чай? Почему?

3. Конический стержень подвешен на легких нитях (см. рис. 1). Где находится его центр тяжести?



4. Два одинаковых удава начинают одновременно заглатывать друг друга с хвоста и делают это с постоянной скоростью, пока каждый из них не проглотит туловище другого полностью (но без головы). Нарисуйте схематически, чем все это кончится.

5. Кастрюля емкостью 2 *л* доверху наполнена водой. В нее ставят тонкостенную кастрюлю емкостью 1,5 *л* и массой 0,6 *кг* (рис. 2.). Сколько воды выльется?

6. Чистая вода прозрачна для света. Почему непрозрачен туман, представляющий собой мелкие капли воды?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКОМ АВТОДОРОЖНОМ ИНСТИТУТЕ

А. Н. Агеев, Ю. Г. Рудой

В этом году в Московском автодорожном институте впервые был проведен письменный экзамен по физике. Каждый билет состоял из теоретического вопроса по одному из разделов программы и четырех задач, подобранных так, чтобы охватить все разделы программы.

При ответе на теоретический вопрос и решении задач абитуриенты должны были показать как знание физических законов и умение применять их в той или иной конкретной физической ситуации, так и знание единиц измерений физических величин и корректность в вычислениях. Поэтому все задачи требовалось вначале решить в общем виде, а затем получить численный ответ.

Как показали экзамены, ответы на теоретический вопрос не вызывали затруднений и подавляющее большинство абитуриентов ответило на них хорошо. Задачи же давались, как правило, труднее.

Приведем для примера несколько задач, предлагавшихся в экзаменационных билетах и, рассказывая их решения, остановимся коротко на некоторых характерных ошибках поступающих. Для удобства мы разбили эти задачи по традиционным разделам.

В задачах по механике ошибки в основном были связаны с тем, что экзаменующиеся не всегда умели выделить все силы, управляющие движением, правильно определить их точку приложения и направление. Отсюда и неверно составленное уравнение движения. Например, в такой задаче.

Задача 1 (вариант № 26). Два тела с массами $m_1=50$ *г* и $m_2=100$ *г*, связанные невесомой нитью, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К первому телу приложена сила $F=300$ *Г*, направленная вдоль плоскости. Найти натяжение нити при движении тел. Изменится ли натяжение, если ту же силу приложить ко второй массе? Трением о поверхность пренебречь (рис. 1).

Ускорение системы в первом и во втором случае одинаково. Действительно, применяя 2-й закон Ньютона ко всей системе, получим:

в случае *а*) $F=(m_1+m_2)a_1$,

в случае *б*) $F=(m_1+m_2)a_2$.

Отсюда

$$a_1=a_2=a=\frac{F}{m_1+m_2}.$$

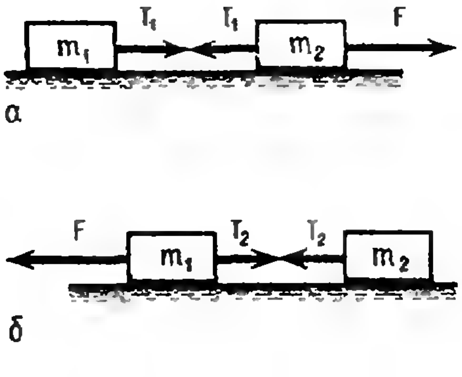


Рис. 1.

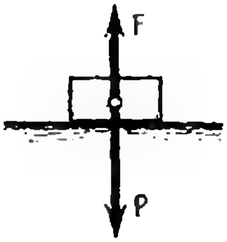


Рис. 2.

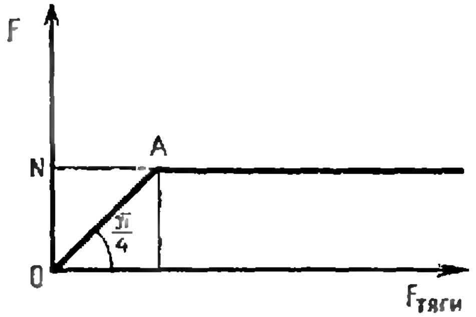


Рис. 3.

Натяжения нити, однако, различны: сила T_1 сообщает ускорение a телу с массой m_1, и поэтому

$$T_1 = m_1 a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F = 100\ Г,$$

а сила T_2 сообщает это же ускорение телу с массой m_2, и поэтому

$$T_2 = m_2 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot F = 200\ Г.$$

Много ошибок было и в такой задаче:

Задача 2 (вариант № 16). Груз с массой $m = 140$ *кг*, лежащий на полу кабины опускающегося лифта, давит на пол с силой $N = 147$ *кГ*. Определить величину и направление ускорения лифта.

Предположим, что ускорение направлено вверх (рис. 2). Тогда на основании 2-го закона Ньютона можем написать $F - P = ma$ (F — сила реакции опоры).

Отсюда

$$a = g\,\frac{F - P}{P}.$$

По 3-му закону Ньютона $F = N$. Поэтому

$$a = g\,\frac{N - P}{P} = 0{,}05g.$$

Итак, ускорение направлено вверх и равно $0{,}05\,g$.

Довольно большое число абитуриентов путает трение покоя и трение скольжения. Трение покоя всегда равно силе тяги, а трение скольжения равно kN, где N — сила нормального давления. Если к брусу, лежащему на горизонтальной поверхности, присоединить динамометр и медленно увеличивать силу тяги до тех пор, пока брусок не начнет скользить по поверхности, то зависимость силы трения от силы тяги будет графически изображаться так, как показано на рисунке 3. Точка A соответствует началу движения.

Много было ошибок, связанных с недостаточным знанием законов сохранения и неумением пользоваться этими чрезвычайно мощными методами решения задач.

В тех случаях, когда применение законов сохранения энергии и импульса позволяет получить простое и изящное решение, абитуриенты обычно выбирали сравнительно длинный путь решения, используя законы движения. Приведем для иллюстрации задачу из II тура олимпиады по физике, которая проводилась в МАДИ в 1970 году.

Задача 3. Шайба массы m движется горизонтально со скоростью v_0, попадает на платформу массы M и продолжает движение по ее поверхности с трением. Определить ско-

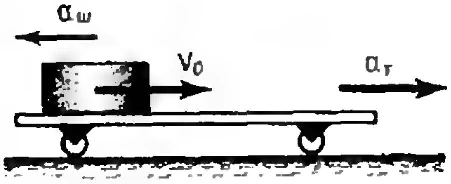


Рис 4.

рость платформы к тому моменту времени, когда шайба остановится на ней. Коэффициент трения между шайбой и платформой равен *k*. Платформа может катиться по рельсам без трения.

Решим сначала эту задачу, используя законы движения.

На шайбу и платформу в горизонтальном направлении действует сила трения, равная kmg, под действием которой платформа и шайба двигаются с ускорениями $a_{пл}$ и $a_ш$ относительно земли. Направления ускорений показаны на рисунке, а их величины определяются 2-м законом Ньютона:

$$ma_ш = kmg, \text{ и поэтому } a_ш = kg,$$

$$Ma_{пл} = kmg, \text{ и поэтому } a_{пл} = kg\frac{m}{M}.$$

Ускорение шайбы относительно платформы равно

$$\vec{a} = \vec{a}_ш - \vec{a}_{пл}, \text{ или } a = a_ш + a_{гл} = kg\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Так как скорость шайбы относительно платформы уменьшается со временем по закону $v = v_0 - at$, то $v = 0$ (то есть шайба остановится) через время

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{kg\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

К этому времени скорость платформы станет равной

$$v_{пл} = a_{пл}t = kg\frac{m}{M} \cdot \frac{v_0}{kg\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Значительно проще решается эта задача, если воспользоваться законом сохранения импульса. Действительно, сила трения между шайбой и платформой является внутренней силой, и, следовательно, она не может изменить общий импульс системы. В то же время внешние силы в горизонтальном направлении на систему платформа — шайба не действуют (напоминаем, что платформа катится по рельсам без трения). Приравнивая импульс системы в начальный момент, когда платформа еще покоится, ее импульсу в момент, когда шайба останавливается на платформе, получим

$$mv_0 = (m + M)v_{пл}.$$

Отсюда

$$v_{гл} = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Много было ошибок при решении задач на газовые законы. Здесь абитуриенты довольно легко справлялись с теми задачами, для решения которых достаточно лишь формального знания законов, однако в тех случаях, когда для решения необходимо было как-то преобразовать запись законов или просто последовательно применить газовые законы для различных элементарных процессов, многие терялись. Приведем пример.

Задача 4 (вариант № 26). Газ сжат изотермически от объема $V_1 = 8$ *л* до объема $V_2 = 6$ *л*. Давление при этом возросло на $\Delta p = 4 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}$. Каким было первоначальное давление?

Для решения достаточно записать закон Бойля — Мариотта в следующем виде:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \text{ Отсюда}$$

$$P_1 = \Delta P\frac{V_2}{\Delta V} = 12 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}.$$

Экзамены показали, что абитуриенты слабо знают диаграммные представления различных процессов. Поэтому мало кто верно решает задачи следующего типа.

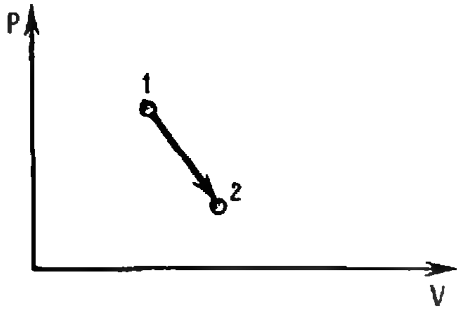


Рис. 5.

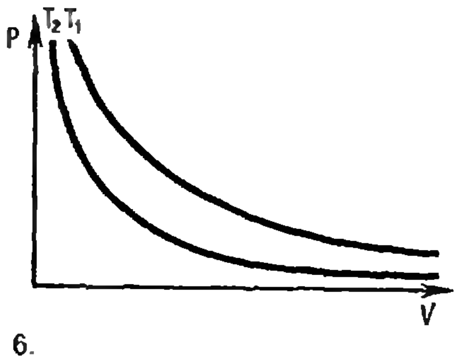


Рис. 6.

Задача 5 (вариант 38). На диаграмме PV (рис. 5) изображен процесс, в результате которого газ из состояния 1 перешел в состояние 2. Как при этом изменялась температура?

Две изотермы, соответствующие различным температурам T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), на диаграмме PV выглядят так, как показано на рисунке 6, а на диаграмме PT — так, как показано на рисунке 7.

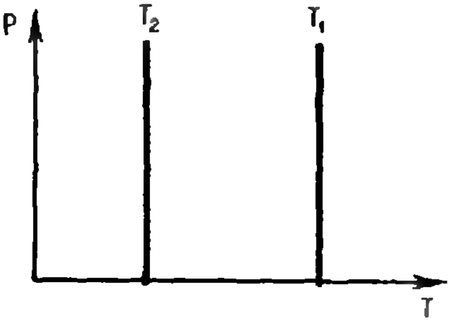


Рис. 7.

Поэтому для решения задачи достаточно нанести на диаграмму сетку изотерм (рис. 8). Тогда становится очевидным, что температура газа уменьшилась ($T_1 > T_2$).

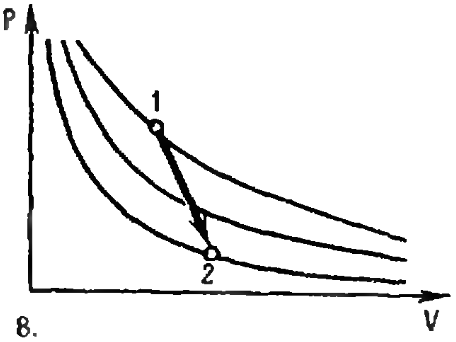


Рис. 8.

Вызывали затруднения задачи на составление уравнения теплового баланса в тех случаях, когда конечное состояние заранее не очевидно. Например, такая задача.

Задача 6 (вариант 17). Смешивают 300 *г* воды при температуре 10° С и 400 *г* льда, взятого при температуре — 20° С. Определить установившуюся температуру смеси.

$$c_в = 1 \frac{кал}{г\cdot град},\ c_л = 0{,}5 \frac{кал}{г\cdot град},\ \lambda = 80 \frac{кал}{г}.$$

Здесь конечное состояние не очевидно, и поэтому нельзя сразу написать уравнение теплового баланса. Такую задачу следует решать постепенно.

Подсчитаем вначале количество тепла, необходимое для нагревания льда до 0° С: $Q_1 = c_л m_л \Delta t$.

Затем найдем количество тепла, которое отдает вода, охлаждаясь до 0°С; $Q = c_в m_в \Delta t$. Сравним Q_1 и Q_2. В нашем случае $Q_1 = 4000$ *кал* и $Q_2 = 3000$ *кал*. Мы видим, что для того, чтобы нагреть весь лед до 0° С, недостает 1000 *кал*. Это количество тепла выделится при превращении m_x *г* воды в лед. Очевидно,

$$m_x = \frac{1000\ кал}{\lambda} = 12{,}5\ г.$$

Итак, в конечном состоянии при 0° С будет 412,5 *г* льда и 283,5 *г* воды.

При решении задач на электростатику наибольшее количество ошибок было связано с единицами измерения и с определением работы по перемещению заряда в поле другого точечного заряда или в поле заряженной сферы. Размерность таких величин, как заряд, напряженность, потенциал, довольно сложная, и поэтому они имеют условные наименования, такие, как единица заряда СГСЕ, единица потенциала СГСЕ и т. д. Кроме того, формулы электростатики сами содержат коэффициенты, различные в разных системах единиц. Поэтому при решении задач на электростатику нужно очень внимательно следить за единицами измерения, записать все данные задачи и формулы в какой-либо одной выбранной системе и только тогда проводить численные расчеты.

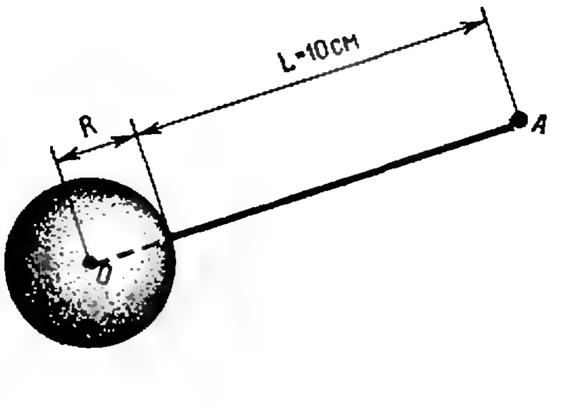


Рис. 9.

Ошибки в задачах на определение работы перемещения заряда в основном связаны с плохим пониманием физического смысла такой характеристики электрического поля, как потенциал. Многие пытались найти работу по формуле $A=F\cdot S$, тогда как в неоднородном поле сила, действующая на заряд, меняется при перемещении и пользоваться этой формулой нельзя. Для решения подобных задач необходимо применить понятие разности потенциалов. Приведем в качестве примера следующую задачу.

Задача 7 (вариант 24). Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q=20$ ед. СГСЕ из бесконечности в точку A, находящуюся на расстоянии $L=10$ *см* от поверхности металлического шарика (рис. 9)? Потенциал шарика равен φ_0 200 *в*, радиус шарика $R=2$ *см*. Шарик находится в воздухе (рис. 11).

По определению потенциал в точке A равен численно работе по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку. Поэтому искомая работа $W=q\cdot\varphi_A$. Так как поле заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, равного заряду сферы и находящегося в центре сферы, то потенциал в точке A равен $\varphi_A=\frac{Q}{R+L}$. Далее, так как

$$\varphi_0=\frac{Q}{R},\quad \text{то}\quad \varphi_A=\varphi_0\cdot\frac{R}{R+L}\quad \text{и}$$

$$W=q\cdot\varphi_A=q\cdot\varphi_0\cdot\frac{R}{R+L}=2{,}2\ \text{эрг}.$$

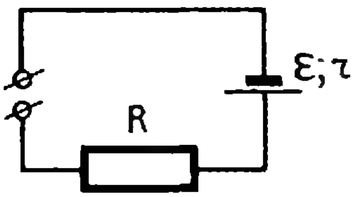


Рис. 10.

В разделе «Постоянный ток» наибольшее затруднение вызвали задачи на расчет цепи при зарядке аккумулятора. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 8 (вариант 52). Аккумулятор, разряженный до 12 *в*, подключен для зарядки к сети с напряжением 15 *в* (рис. 10). Какое дополнительное сопротивление R нужно подключить в цепь для того, чтобы сила зарядного тока не превышала 1 *а*? Внутреннее сопротивление аккумулятора $r=2$ *ом*.

В том случае, когда аккумулятор работает как источник тока и подключен на нагрузку R, ток определяется по закону Ома для полной цепи: $I_0=\frac{E}{R+r}$. Внутри источника этот ток направлен от отрицательного электрода к положительному (рис. 10). При зарядке аккумулятора ток в нем имеет противоположное направление, то есть от положительного электрода к отрицательному. Если аккумулятор полностью разряжен, то зарядный ток определяется формулой $I_з=\frac{U_c}{R+r}$, где U_c — напряжение сети.

В том случае, когда аккумулятор разряжен не полностью, как это имеет место в нашем случае, полный ток можно представить как разность $I=I_з-I_0=\frac{U_c}{R+r}-\frac{E}{R+r}$, где E — значение э. д. с. разряженного аккумулятора.

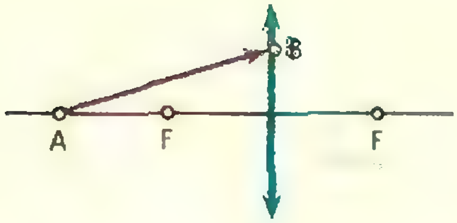


Рис. 11.

Таким образом, $U_c = I(R+r)+E$. Отсюда

$$R = \frac{U_c - E - Ir}{I} = 1 \text{ ом}.$$

В последнем разделе программы «Оптика», как правило, не решались задачи на построение изображения в линзах в тех случаях, когда требовалось воспользоваться понятием фокальной плоскости и побочного фокуса. Приведем примеры таких задач.

Задача 9 (вариант 78). Найти построением ход луча AB после собирающей линзы (рис. 11).

Проведем побочную оптическую ось, параллельную AB и пересекающую фокальную плоскость. Точка пересечения побочной оси с фокальной плоскостью (F') является побочным фокусом, в котором собираются все лучи, параллельные данной оси. Следовательно, луч AB после преломления линзой должен пройти через точку F' (рис. 12).

Аналогично решается такая же задача с рассеивающей линзой. Нужно только помнить, что фокусы в этом случае мнимые (рис. 13).

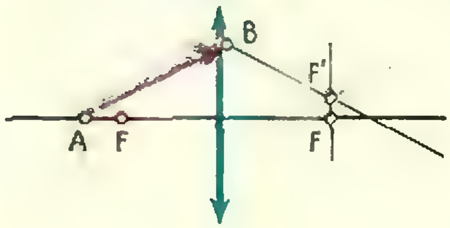


Рис. 12.

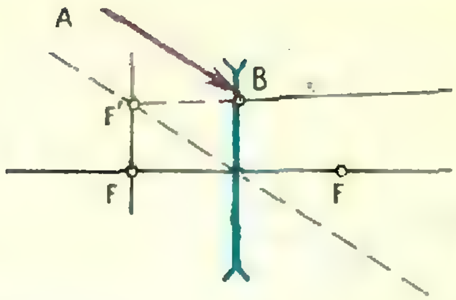


Рис. 13.

В заключение приведем один из вариантов билетов, которые предлагались на вступительных экзаменах.

Вариант 47

1. Магнитное взаимодействие проводников с током. Понятие о магнитном поле, индукции и силовых линиях (на примере прямого и кругового тока).

2. Автомобиль весом $P = 1$ т, развивающий мощность 60 *л. с.*, поднимается в гору со скоростью $v = 36$ *км/час*. Определить угол наклона горы α. Трение не учитывать.

3. В 480 *г* воды при 22° С бросили кусок льда при температуре —8° С. Чему равна температура смеси, если льда бросили 56 *г*? Уд. теплоемкость льда 0,5 *кал/г·град*, удельная теплота плавления 80 *кал/г*.

4. Какую скорость приобретает электрон, прошедший в электрическом однородном поле с напряженностью 0,01 единиц СГСЕ вдоль силовой линии расстояние 2 *см*?

5. Построить изображение отрезка AB в собирающей линзе (рис. 14).

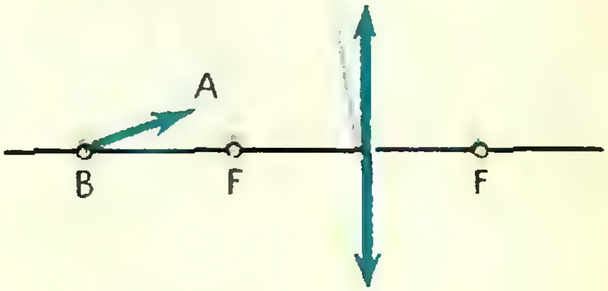


Рис. 14.

НОВОСТИ ФИЗИКИ

Новый тип радиоактивности — протонная радиоактивность

До сих пор было известно четыре типа радиоактивных распадов. β — распад происходит с излучением электронов (β^-- распад) или позитронов (β^+ распад); α — распад, происходящий с излучением α — частиц и γ — распад — излучение квантов света с большой энергией. Сюда можно еще добавить деление ядер (самопроизвольное — как говорят, спонтанное), открытое в 1940 году советскими физиками Флеровым и Петржаком, при котором тяжелое ядро (уран, плутоний и т. д.) разваливается на два.

В конце 1970 года был открыт еще один тип распада—протонная радиоактивность, существование которой было предсказано членом-корреспондентом АН СССР В. И. Гольданским. Протонная активность была открыта Черни с группой английских и американских физиков.

Протонно-активным оказался изотоп кобальта с массовым числом 53. Ядро этого изотопа содержит 27 протонов и 26 нейтронов. Распадающийся изотоп находится в возбужденном состоянии — его энергия примерно на 3 *Мэв* больше нормальной (1 *Мэв* = 1 миллион электрон вольт = $1{,}6\cdot10^{-6}$ *эрг* $=1{,}6\cdot10^{-13}$ *дж*). ^{53}Co распадается, превращаясь в изотоп железа с массовым числом 52:

$$^{53}Co \rightarrow {}^{52}Fe + \text{протон}$$

$^{53}Co^m$ (буква *m* означает, что кобальт возбужден и находится в метастабильном состоянии) живет в среднем около 0,3 секунды. Протонно активный изотоп кобальта получался в результате обстрела ядрами кислорода мишени из кальция:

$$^{40}Ca + {}^{16}O = {}^{53}Co^m + 2\ \text{нейтрона} + 1\ \text{протон}$$

и в результате обстрела протонами железа

$$^{54}Fe + p = {}^{53}Co^m + 2\ \text{нейтрона}$$

Энергия вылетающих протонов 1,6 *Мэв*.

Рецензии, библиография

Если вам нужно что-нибудь посчитать...

В наше время такая потребность может возникнуть довольно часто и далеко не всегда нужно обращаться при этом к помощи электронных вычислительных машин. Но если придется считать самим, то обязательно понадобятся таблицы.

Можно быть уверенным в том, что почти во всех случаях для вычислений будет достаточно пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» Л. С. Хренова, изданными в качестве пособия для учителей издательством «Просвещение» в 1967 году.

Кроме числовых таблиц автор дает краткую формулировку «Правил приближенных вычислений». В них приводятся основные определения, правила действий с приближенными числами и интерполирования, рекомендации относительно порядка выполнения вычислений. Как это ни сложно, но автору удалось здесь быть одновременно кратким, точным и ясным. Так же хорошо написаны и «Пояснения к таблицам».

Основным содержанием книги являются четырехзначные таблицы основных элементарных функций, хорошо известных учащимся средней школы и часто встречающихся при вычислениях. В книге приводятся также небольшая таблица простых чисел, таблица биноминальных коэффициентов и представления несократимых дробей в виде десятичных.

Таблицы Л. С. Хренова можно вполне рекомендовать и как учебное пособие для школьников, и как пособие для массовых вычислений.

Р. С. Гутер

Чародей с Плутановой улицы

Г. И. Мишкевич

Поэт математики, бард физики, герольд астрономии — таким по праву был Яков Исидорович Перельман. Его занимательные книги по математике (арифметике, алгебре, геометрии), физике (механике, акустике, оптике), астрономии и межпланетным путешествиям разошлись по всему миру миллионными тиражами. С именем Я. И. Перельмана связана целая эпоха русской и особенно советской научно-популярной литературы и того ее специфического направления, которое именуется занимательным.

Яков Исидорович Перельман родился в Белостоке в 1882 году. Его отец был счетоводом, мать — школьной учительницей.

Свою первую «занимательную» работу он опубликовал еще в 1899 году, будучи учеником белостокского реального училища. Это был очерк «По поводу ожидаемого огненного дождя», напечатанный в «Гродненских губернских ведомостях». В очерке в живой форме разоблачались вздорные измышления церковников о «предстоящем конце света». Уже в этой юношеской работе ясно видны задатки будущего талантливого популяризатора.

Я спрашивал Якова Исидоровича о том, как он стал популяризатором, и Перельман ответил так:

«Этим я обязан своим учителям и книгам. Они научили меня не только любить математику и физику, но и парадоксально мыслить. Я стал отыскивать занимательное начало повсюду, даже там, где его, казалось бы, и в помине не было».

Позднее Яков Исидорович в статье «К методике научной популяризации» пишет: «Находить в старом новое умеет не всякий, и далеко не всякий склонен глубоко задумываться над тем, что постоянно совершается перед глазами. Чтобы привлечь внимание к обыденным явлениям, надо показать в них новые, неожиданные стороны».

В другой статье — «Что такое занимательная наука» Перельман на первое место ставит удивление: «Мы рано перестаем удивляться, рано утрачиваем драгоценную способность, которая побуждает интересоваться вещами, не затрагивающими непосредственно нашего существования».

Я. И. Перельман в совершенстве владел искусством удивлять, умел заинтриговать, задеть читателя за живое. Он оживлял сухие догмы школьной премудрости, превращая их в увлекательнейший предмет.

В начале текущего столетия Я. И. Перельман переехал в Петербург и начал заниматься литературной деятельностью, одновременно учась в Петербургском лесном институте. Однако лесоводом он не стал. (Правда, в течение двух лет Перельман работал в «Особом совещании по топливу». Здесь он предложил перевести на час вперед стрелки часов, чтобы сберечь топливо для освещения. Это предложение получило силу закона.)

Когда Перельман учился в Лесном институте, на его математические способности обратил внимание профессор А. С. Домогаров. Он-то и привил своему студенту любовь к умению находить необычное в обычном.

Учась в Лесном институте, Яков Исидорович работал корректором у книгоиздателя П. П. Сойкина. Затем редактировал журналы «Природа и люди», «В мастерской природы», печатался в «Мире приключений». Статьи, подписанные «Я. Лесной», «П. Сильвестров», «Я. П.», все больше завоевывали симпатии читателей. Здесь, в книгоиздательстве Сойкина, Перельман начал серьезно заниматься проблемами занимательного изложения науки, в первую очередь физики. Основой такого изложения Яков Исидорович считал умение вызвать обостренный интерес к предмету. Только такой интерес сможет облегчить понимание и, следовательно, породить сознательное и прочное усвоение основ наук.

Первая книга Я. И. Перельмана — «Занимательная физика» — вышла в свет в 1913 году. И первым ее читателем и рецензентом стал знаменитый педагог-физик, профессор Петербургского университета Орест Данилович Хвольсон. Он пригласил Перельмана к себе на квартиру, и между ними произошел, как рассказывал Яков Исидорович, такой разговор:

— Вашу книгу я прочитал с удовольствием, она преотличная. Но среди физиков я не встречал вашей фамилии. Где вы изволили кончить курс?

— Я ученый лесовод, вот мой диплом...— смутился Перельман.

— Ну, вот что я вам скажу,— ответил Хвольсон — Лесоводов ученых у нас и без вас, что деревьев в лесу, а вот физиков, которые умели бы так писать, как вы, вовсе не имеется. Продолжайте сочинять подобные книги и впредь...

За «Занимательной физикой» последовала целая серия занимательных книг, написанных Яковом Исидоровичем. Да, Хвольсон нисколько не ошибся, отговорив Перельмана от занятий лесоводством.

Учителями Перельмана, формировавшими его искусство популяризатора, были также и книги. Он читал много, систематически и с хорошим педантизмом. Его педантизм выражался в том, что Яков Исидорович скрупулезно вел картотеку прочитанного и делал тысячи выписок. Я хорошо помню стеллажи с аккуратными коричневыми ящичками, заполненными карточками, исписанными каллиграфическим почерком. Стеллажи занимали целую стену в его обширном рабочем кабинете.

Яков Исидорович любил повторять афоризм Паскаля: «Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его немного занимательным»—и он делал это с поразительным блеском. Не только в приложении к математике, но и к обширному классу физических наук.

Перечитывая А. П. Чехова (уже со своих «занимательных» позиций), Перельман отыскивает в рассказе «Репетитор» задачу, которую купец Удодов решил вмиг на конторских счетах — гораздо быстрее, чем это сделал репетитор его сына. Яков Исидорович остроумно и увлекательно вскрывает математическую суть купеческого способа решения задачи. Рассказ Л. Н. Толстого «Как в городе Париже починили дом» дает Перельману повод комментировать явление теплового расширения металлов. В «Сценах из рыцарских времен» А. С. Пушкина мечтатель Бертольд надеется открыть «вечное движение». Перельман вводит в свою «Занимательную физику» пушкинский текст с соответствующим научным толкованием.

Произведения Перельмана населены героями романов, повестей, рассказов, очерков — от сервантесовского Дон-Кихота до советского парашютиста Кайтанова, мастера затяжных прыжков.

Я. И. Перельман подвергает анализу научно-фантастические произведения таких королей этого жанра, как Жюль Верн и Герберт Уэллс. Нисколько не умаляя сюжетных и литературных достоинств, Яков Исидорович показывает, на какой научной «ниточке» держится все произведение. Первого августа 1934 года группа ленинградских писателей и ученых-популяризаторов встретилась в гостинице «Астория» с находившимся тогда в Ленинграде знаменитым английским писателем Гербертом Уэллсом.

В завязавшейся беседе Уэллс, между прочим, спросил:

Не вы ли тот самый Джекоб Перлман, который столь своеобразно интерпретировал мои произведения? Я читал вашу «Удивительную физику» — так она именуется в английском переводе.

— Тот самый,— улыбнувшись, ответил Перельман.

—... и который так ловко разоблачил моего «Человека-невидимку», указав, что он должен быть слеп, как новорожденный щенок... И мистера Кэйвора за изобретение вещества, якобы свободного от действия земного тяготения...

— Да, я писал об этом еще в 1915 году. Но ведь от этого ваши романы не стали хуже?

— А я, признаться, так тщательно старался скрыть эти уязвимые места от взоров читателя!

Его талант заключался в том, что он умел читать.

Сотни писем шли отовсюду на Плуталову улицу. Многим нужен был Яков Исидорович: рабочие ждали его в красных уголках цехов, чтобы послушать лекцию о космических путешествиях; школьники старались заполучить его в свои кружки занимательной науки; нужен он был и юристам как сведущее лицо, эксперт по вопросам, связанным с научным истолкованием какого-либо спорного факта. (Известен случай, когда Яков Исидорович выступал в суде по делу машиниста, обвинявшегося в халатности. Перельман объяснил и доказал суду, что машинист не виновен — причиной наезда было неправильное формирование состава.)

Яков Исидорович охотно делился своими знаниями. Не жалея сил, он терпеливо «откапывал» повсюду способных людей. На редкость точно и метко сказал о нем писатель Л. В. Успенский: «Бациллоноситель острейшего перельманита»!

В Николаеве Перельман отыскал инженера-технолога В. В. Рюмина, и на свет появился автор «Занимательной химии» и «Занимательной техники на стройке». В Москве был «обнаружен» профессор физики А. В. Цингер — страстный собиратель гербариев. Благодаря Перельману физик Цингер стал автором чудесной «Занимательной ботаники».

С легкой руки Перельмана выходят «Занимательная метеорология»

Д. О. Святского и Т. Н. Кладо, «Занимательное мироведение» В. О. Прянишникова, «Занимательная статистика» Е. Е. Святловского.

Появление «Занимательной минералогии» и «Занимательной геохимии» академика А. Е. Ферсмана, «Занимательной геологии» академика В. А. Обручева и «Занимательной географии» Л. В. Успенского также во многом обязано Перельману.

География, геология, геохимия, минералогия, статистика, метеорология, даже военное дело (имеется в виду книга полковника В. П. Внукова «Физика и оборона страны») втянуты в орбиту занимательной литературы.

В 1935 году Яков Исидорович с коллегами — В. А. Камским, А. Я. Малковым, В. О. Прянишниковым, Л. В. Успенским — основал знаменитый в Ленинграде Дом занимательной науки (ДЗН). Это была подлинная кунсткамера занимательных наук: физики, математики, астрономии, географии, геологии, метеорологии. В 1939 году в ДЗН насчитывалось более 100 крупных экспонатов, сгруппированных в четырех отделах: Астрономии, Географии (с залом Геологии), Математики, Физики (с залом Оптики). Кроме того, создавался отдел Электричества.

В этом доме все было занимательно, но все — строго обоснованно. Переходя из зала в зал, от экспоната к экспонату, посетитель убеждался в том, что простые, набившие оскомину школьно-азбучные истины не так уж просты. Здесь людей учили видеть в заурядном занимательное, в скучном — захватывающе интересное.

Вот, к примеру, «Доска Гальтона». Это был совсем нехитрый экспонат — наклонная доска, утыканная стальными иглами-шпеньками. В воронку насыпали пшено. Ударяясь о набитые иглы, крупинки укладывались на наклонной доске, очерчивая всегда одну и ту же кривую линию.

Так демонстрировался математический закон нормального распределения — закон Гаусса. Гаусс и... пшено!

ДЗН не был культурно-просветительной «забегаловкой». Занимательность была там не самоцелью, а средством пропаганды науки.

В этот период своей деятельности Перельман активно сотрудничал с такими корифеями отечественной ракетной науки и техники, как К. Э. Циолковский, Ф. А. Цандер, С. П. Королев, Н. А. Рынин и другие. Он встречался с ними по работе в ЛенГИРДе, вел обширную переписку.

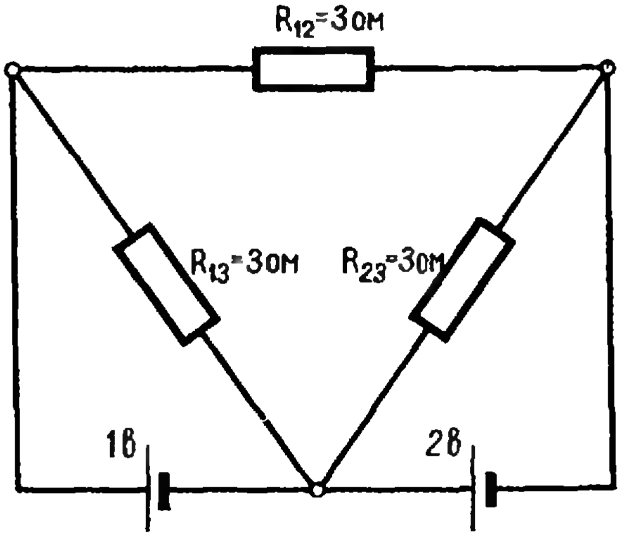
В память заслуг Якова Исидоровича Перельмана его именем назван один из кратеров на обратной стороне Луны, впервые сфотографированной советской автоматической межпланетной станцией «Луна-3» 7 октября 1959 года. Кратер Я. И. Перельмана имеет диаметр 95 километров и находится в точке с лунными координатами $\beta = +16°30'$ и $\lambda = -160°$.

На Луне имя Я. И. Перельмана увековечено... Обидно, что на Земле это не сделано. Плуталова улица, на которой жил Перельман, не стала улицей Перельмана, а на доме № 12 даже нет мемориальной доски. Не возрожден и Дом занимательной науки. ...

* * *

Мы попытались дать набросок портрета человека, имя которого широко известно во всем мире. Добавим, что Яков Исидорович Перельман был настоящим патриотом. Когда началась Великая Отечественная война, он отказался эвакуироваться из Ленинграда. В первые же недели войны на фронте погиб его единственный сын Михаил. От голода вскоре скончалась жена — врач. Третьего апреля 1942 года Яков Исидорович Перельман умер от истощения в блокированном Ленинграде.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ



К статье «Преобразование электрических цепей»

1. Преобразуем «звезду» $r_1=r_2=r_3$ в треугольник (см. рис.). Нетрудно найти токи, идущие через сопротивления R_{12}, R_{13} и R_{23}: $I_{12}=\frac{1\,в+2\,в}{R_{12}}=1 a$; $I_{13}=\frac{1}{3}a$; $I_{23}=\frac{2}{3}a$. Это означает, что через батарею E_1 течет ток $I_1=\frac{4}{3}a$, а через батарею E_2 — ток $I_2=\frac{5}{3}a$. Значит, через сопротивление r_3 в исходной схеме идет ток $I=\frac{1}{3}a$.

2. При разомкнутом ключе общая емкость системы конденсаторов равна $C_1=\frac{C}{2}+\frac{C\cdot 2C}{3C}=\frac{7}{6}C$. При замкнутом ключе она равна $C_2=\frac{13}{11}C$. Поэтому

$$\Delta Q=E\left(C_2-C_1\right)=EC\left(\frac{13}{11}-\frac{7}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{66}EC.$$

К статье «Нравится ли вам возиться с целыми числами?»

1. Рассмотрите эти уравнения по модулям: а) 4; б) 9; в) 8; г) 7.

2. Используйте, что любое такое число имеет остаток 1 при делении на 9.

3. Такое число делится на 3 и не делится на 9.

4. а) λ^{-1}; б) λ, поскольку $6\frac{2}{15}-1\frac{31}{45}=\frac{8}{9}\cdot 5$; в) λ^4.

5. $1+3+3^2+\ldots+3^n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}$, поэтому $\alpha_n=d_3\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1},\ 0\right)=\lambda^{n+1}$. Поскольку $\lambda<1$, то эта последовательность стремится к 0.

Заметьте, что геометрическая прогрессия $1, 3, 3^2, \ldots, 3^n, \ldots$ является в смысле расстояния d_3 бесконечно убывающей: $d_3(3^{n+1},0)=\lambda^{n+1}$, поэтому не удивительно, что ее сумму можно найти по обычной формуле

$$1+3+3^2+\ldots=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}.$$

6. $4\frac{14}{81}=$ «*11,0112*»; $1\frac{41}{81}=$ «*1,1112*»;

$$d_3\left(4\frac{14}{81},\ 1\frac{41}{81}\right)=\lambda^{-1}.$$

7. $-1=$ «… *22222*»; $\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)+1=$ « .. *11112*»; $\frac{2}{5}=$ «… *121012101211*» (можно воспользоваться тем, что $\frac{2}{5}=\frac{48}{1-81}+1$); $\frac{2}{45}=$ «… *1210121012,11*».

К статье «Показательные уравнения»

1. $x=9$.
2. $x=4$.
3. $x=3$.
4. $x=\frac{3}{2}$.
5. $x=\frac{\lg 45-\lg 17}{\lg 3-\lg 2}$.
6. $x=\frac{3}{2}$.
7. $x=2$.
8. $x_{1,2}=\frac{2\lg\left(9\pm\sqrt{72}\right)}{\lg 3}$.
9. $x=\frac{3}{2}$.
10. $x=0$.
11. $x_1=\log_3(2+\sqrt{5})$; $x_2=\log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Указание: обозначьте 3^x-3^{-x} через y и покажите, что $9^x+9^{-x}=y^2+2$.

12. $x=\frac{\lg 2-\lg 3}{\lg(1+\sqrt{5})-\lg 2}$. Указа-

ние: введите обозначение $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=y$ и проверьте, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{x}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}=y^3+3y$.

13. $x_1=1$; $x_2=-1$.

14. $x=\frac{\lg 3}{\lg 2-\lg 7}$.

15. $x=2$.

16. $x=2$. Указание: приведите уравнение к виду $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=1$.

17. $x=2$.

18. $x=3$.

19. $x=4$.

20. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\lg 2}$. Указание: прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 10.

21. $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\log_3 2\pm\sqrt{\log_3^2 2-4\log_3\frac{56}{153}}\right)$. Указание: приведите уравнение к виду $3^{x^2}=2^x\cdot\frac{153}{56}$ и прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 3.

22. $x=\pm\sqrt{2}$.

23. $x_1=1$, $x_2=4$.

24. $x_1=1$, $x_2=8$.

25. $x=2$.

К статье «Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году»

1. $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где

$$x\neq\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ x\neq\frac{3}{4}\pi+2\pi n$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

2. $x_1=\sqrt{6}$, $y_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$;

$$x_2=-\sqrt{6},\quad y_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. 3 *мин*.

4. $AC=2\sqrt{5}\,r$.

5. $SE=\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}$.

К статье «Письменный экзамен по физике в Московском автодорожном институте»

Вариант № 47

2. $\sin\alpha=0{,}3$.
3. $\theta=12^\circ$ С.
4. $v=1{,}5\cdot10^6$ *м/сек*.

К статье «Кинематика и связи» («Квант» № 2) *)

1. В точке A проекции скоростей цилиндра $v_{АЦ}$ и стержня v_{AC} на направление AO' ($AO'\perp OA$) совпадают. Значение v_{AC} равно $\omega\cdot OA=\omega\cdot r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Заметим, что мгновенная ось вращения цилиндра проходит через точку B. Поэтому $v_{АЦ}$ направлена перпендикулярно AB и равна $\Omega\cdot AB$, где Ω — угловая скорость вращения цилиндра. Поскольку

$$\Omega=\frac{v}{r}\ \text{и}\ AB=2r\cos\frac{\alpha}{2},\ \text{получим}$$

$$v_{АЦ}=\frac{v}{r}\cdot 2r\cos\frac{\alpha}{2}=2v\cos\frac{\alpha}{2}..$$

Из условия равенства проекций имеем

$$v_{AC}=v_{АЦ}\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$$

или

$$\omega r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2v\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\frac{\omega r}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\omega r}{1-\cos\alpha}.$$

2. Поскольку длина AB неизменна, проектируя скорости концов шатуна на направление AB, получим ($v_A=\omega r$):

$$v\cos\alpha=\omega r\cos(\pi-\alpha-\beta),$$

или

$$v=\omega r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Воспользовавшись теоремой синусов

$$\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{\sin\beta}{l},$$

можно найти

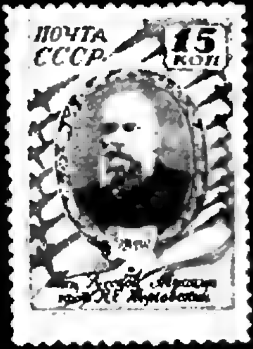
$$v=\omega r\left(\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\sin\alpha\right)^2}+\frac{l}{r}\sin\alpha\right)=\omega l\cdot\operatorname{tg}\alpha\times$$

$$\times\left(\sqrt{\left(\frac{r}{l}\right)^2-\sin^2\alpha}+\cos\alpha\right).$$

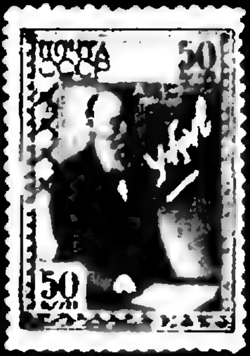
---

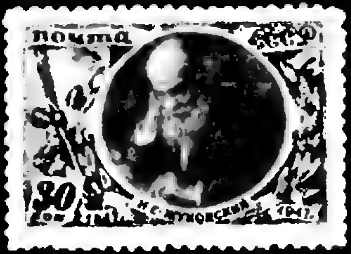
*) На рисунке к этой задаче в «Кванте» № 2 вектор скорости $v_{АЦ}$ должен быть направлен под углом $\frac{\alpha}{2}$ к стержню.

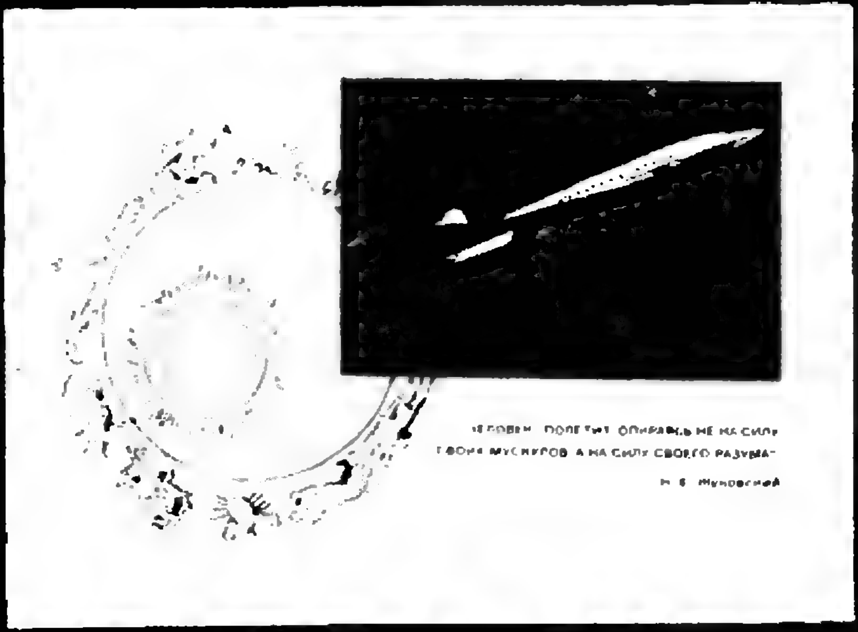
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

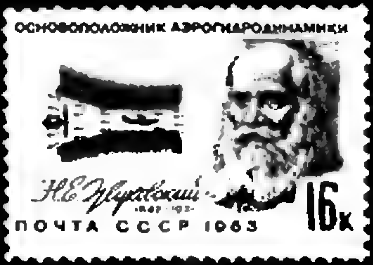

ПОЧТА СССР
15 коп

ПОЧТА СССР
30


ПОЧТА СССР
50
50


ПОЧТА СССР
30
Н. Е. ЖУКОВСКИЙ
1947


ЧЕЛОВЕК ПОЛЕТИТ, ОПИРАЯСЬ НЕ НА СИЛУ СВОИХ МУСКУЛОВ, А НА СИЛУ СВОЕГО РАЗУМА
Н. Е. Жуковский


ОСНОВОПОЛОЖНИК АЭРОГИДРОДИНАМИКИ
Н. Е. Жуковский
1847-1921
ПОЧТА СССР 1963
16к

Марки, посвященные Н. Е. Жуковскому

Отец русской авиации — так Владимир Ильич Ленин назвал великого русского ученого, основоположника современной гидро- и аэромеханики Николая Егоровича Жуковского.

Ряд советских марок посвящен этому ученому.

Первая серия из трех марок, посвященная Н. Е. Жуковскому, вышла в 1941 году к 20-летию со дня его смерти. На первой марке этой серии (художник П. Платонов) воспроизведен портрет ученого, а внизу изображен винт самолета, так как Жуковский посвятил ряд своих работ изучению тяги винта.

На второй марке (художник Р. Поркшьян) воспроизведен портрет Н. Е. Жуковского на фоне военной академии, носящей его имя. На третьей марке серии (художник П. Платонов) изображен ученый и его формула для определения величины подъемной силы, опубликованная в 1906 году в работе «О присоединенных вихрях».

В январе 1947 года к 100-летию со дня рождения Н. Е. Жуковского были выпущены две марки с его портретом (художник В. Завьялов).

В августе 1963 года выпускается серия марок, посвященная деятелям отечественной авиации. На одной из марок этой серии воспроизведен портрет Н. Е. Жуковского. По инициативе и под руководством Жуковского была сооружена одна из первых в мире аэродинамическая труба, и художник В. Пименов изобразил на марке рядом с портретом ученого аэродинамическую трубу в разрезе.

В своей речи «О воздухоплавании», произнесенной в 1898 году, то есть задолго до появления самолета, Жуковский говорил: «Человек не имеет крыльев и по отношению веса своего тела к весу мускулов в 72 раза слабее птицы..., но я думаю, что он полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума». Эти слова великого ученого приведены на почтовом блоке (художник А. Аксамит), на котором изображен первый в мире пассажирский сверхзвуковой самолет ТУ-144. Блок выпущен в декабре 1969 года в серии марок, посвященных развитию гражданской авиации.

Отдел ведет А. В. Алтыкис

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

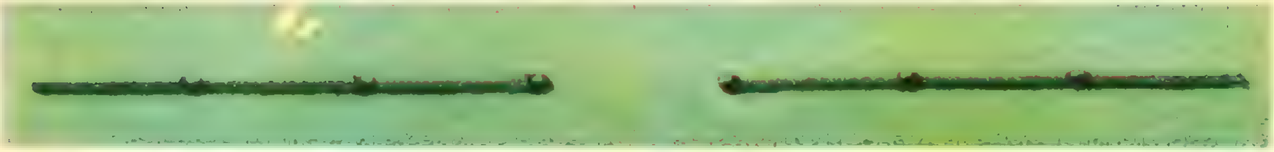


Рис. 1.

1. По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 метров, а ночью опускается на 4 метра. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 метров?

2. Из 15 монет, одинаковых с виду, одна фальшивая. Неизвестно, тяжелее или легче она остальных. Как это узнать, сделав не более двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

3. Числа *** 9 и 9 *** являются кубами целых чисел. Каких?

4. Шесть спичек лежат на столе так, как показано на рисунке 1. Требуется поменять их местами, придерживаясь следующих правил: спичку можно перемещать лишь в направлении ее головки на свободное место, либо просто передвигая, либо перепрыгивая не более чем через одну спичку.

5. Дан квадратный лист бумаги. Как рассечь его прямыми на четыре части (рис. 2), чтобы из них можно было сложить треугольную пирамиду, никакие ребра которой не равны (рис. 3)?

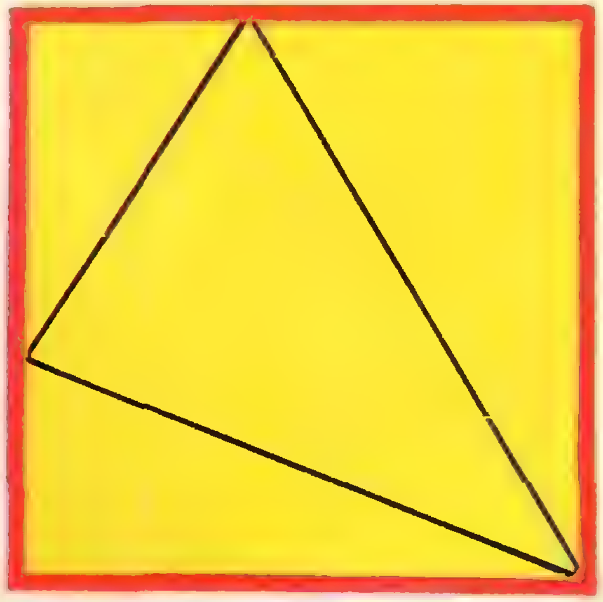


Рис. 2.

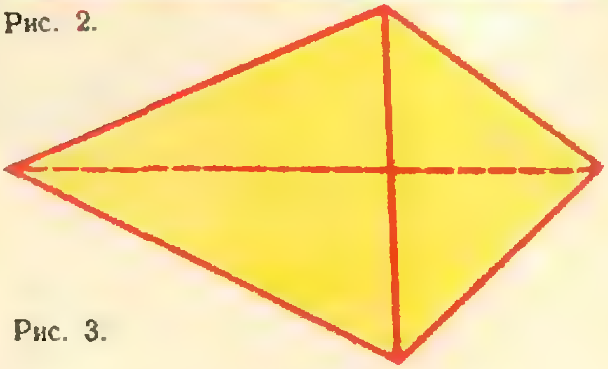


Рис. 3.

Главный редактор — академик **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель редактора — академик **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович; М. И. Башмаков; В. Г. Болтянский; И. Н. Бронштейн; Н. Б. Васильев; И. Ф. Гинзбург; В. Г. Зубов; П. Л. Капица; В. А. Кириллин; В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*); В. П. Лишевский; А. И. Маркушевич; М. Д. Миллионщиков; Н. А. Патрикеева; Н. Х. Розов; А. П. Савин; И. Ш. Слободецкий; М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*); Я. А. Смородинский; В. А. Фабрикант.

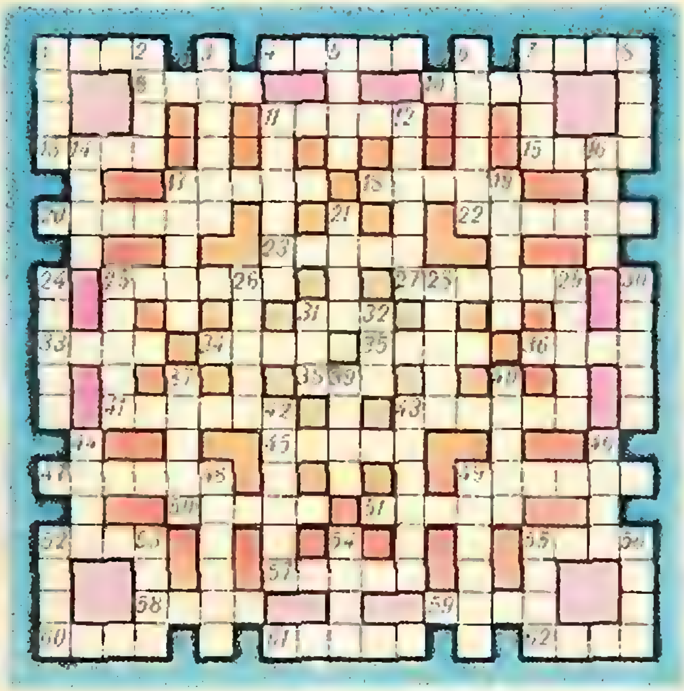
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Технический редактор Г. Н. Дьяченко
Корректор М. Л. Медведская
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 24/XI 1970 г.
Подписано в печать 28/I 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Усл.-печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 5,54. Тир. 283 700.
Т-02151
Цена 30 коп. Заказ 1993.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов, Московской обл.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/ - 92

Квант 3



Ответ на кроссворд, опубликованный в № 2

По горизонтали:
5. Слово. 8. Створ. 11. Качели. 12. Вериго. 13. Искра. 14. Люмен. 15. Гало. 19. Небо. 21. Даль. 22. Маятник. 23. Пара. 26. Поворот. 27. Граница. 28. Подстановка. 33. Масштаб. 35. Условие. 36. Спор. 38. Архимед. 39. Знак. 41. Блок. 44. Трап. 45. Бурав. 46. Ангар. 48. Стрела. 49. Рутина. 50. Изгиб. 51. Склад.

По вертикали:
1. Начала. 2. Если. 3. Крен. 4. Пример. 6. Лист. 7. Вариант. 9. Тьюринг. 10. Овен. 16. Адепт. 17. Олово. 18. Отображение. 19. Надир. 20. Банах. 24. Яркость. 25. Паскаль. 29. Смысл. 30. Исток. 31. Квант. 32. Сетка. 34. Бурбаки. 35. Учебник. 37. Подряд. 40. Арбитр. 42. Пуаз. 43. Фара. 45. Блик. 47. Руда.

КРОССВОРД

По горизонтали:

1. Характеристика переменного тока. 4. Локационная установка. 7. Единица радиоактивности. 9. Ледяная корка. 10. Французский математик. 11. Древнегреческий мудрец, открывший несколько геометрических теорем. 13. Целенаправленная деятельность. 15. Мера взаимодействия двух тел. 17. Ограничение степеней свободы. 18. Деятельная часть. 20. Тонкий слой. 22. Закрытое пространство. 23. Убеждение. 25. Геометрическое тело. 27. Произведение силы на проделанный путь. 31. Движение электронов. 33. Повторяющийся этап процесса. 34. Часть суток. 35. Минерал. 36. Стадия в развитии. 38. Бесконечная сумма. 41. Светило. 43. Допустимое отклонение. 45. Выдающийся французский математик XVIII — XIX столетий. 47. Немецкий математик, плодотворно работавший в области теории чисел. 49. Очертание. 50. Условия работы механизма. 51. Один из основателей теории логарифмов. 52. Развитие. 55. Замкнутая выпуклая линия. 57. Указание. 58. Отверстие для света. 59. Измерительный прибор. 60. Балка. 61. Квант света. 62. Движение газа в дымоходе.

По вертикали:

1. Событие, действительно происшедшее. 2. Электрод. 3. Остов. 5. Дробная часть. 6. Предмет науки гляциологии. 7. Направление движения. 8. Колющий предмет. 11. Точная наука. 12. Часть круга. 14. Переключатель. 15. Созвездие. 17. Звук, сопровождающий трение. 19. Вид тележки. 21. Предмет в пространстве. 24. Описание морских берегов и течений. 25. Демонстрация экспоната. 26. Система правил. 28. Французский физик и астроном XIX столетия. 29. Международный детский лагерь. 30. Часть реактивного двигателя. 31. Геометрическое тело. 32. Список условных обозначений. 37. Тройка координатных векторов. 39. Часть атома. 40. Усилитель звука. 42. Вспомогательная часть слова. 43. Изъян. 44. Физик, впервые применивший маятник для доказательства вращения Земли. 46. Отрезок линии. 48. Упругое вещество. 49. Один из основателей небесной механики. 52. Единица деления картушки компаса. 53. Канат. 54. Совокупность лучей видимого спектра. 55. Эксперимент. 56. Увеличительное стекло.

НОМЕР
4

В номере:

Экономика и линейные неравенства	*А. Б. Каток*	*1*
Закон Ома	*Я. А. Смородинский*	*8*
Логические задачи и алгебра высказываний	*Л. Л. Цинман*	*14*
Основы теории вихрей	*Н. Е. Жуковский*	*21*
Эффект Доплера	*Л. Г. Асламазов*	*30*

Задачник «Кванта»

Задачи		*33*
Решения задач М28—М30, Ф41—Ф47	*Н. Б. Васильев,* *И. Ш. Слободецкий*	*35*
Практикум абитуриента **Тригонометрические неравенства**	*В. Б. Демьянов*	*43*
Вступительные экзамены по математике в Московском институте электронного машиностроения	*В. А. Тонян*	*51*
Информация **Заочный математический турнир**	*В. М. Розентуллер*	*56*
Олимпиады, олимпиады		*57*
Рецензии. Библиография **По обе стороны зеркала**	*Ю. М. Брук*	*58*
Уголок коллекционера **СССР — родина космонавтики**	*А. В. Алтыкис*	*60*
Ответы, указания, решения		*62*
«Квант» для младших школьников	*А. П. Савин*	*3-я стр. обложки*
Кроссворд		*4-я стр. обложки*

Экономика И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

А. Б. Каток

В первой части статьи*) мы рассмотрели задачу «о самом дешевом рационе для цыплят». При этом мы ограничились весьма упрощенной ситуацией. Во-первых, мы обращали внимание лишь на четыре компонента рациона — калорийность, наличие белков, жиров и углеводов. На самом же деле необходимо учитывать и ряд других компонентов — наличие витаминов, различных минеральных солей и т. д. Во-вторых, мы предположили, что рацион может состоять только из двух продуктов. С практической точки зрения это предположение может привести к бессмысленным результатам, так как обеспечить достаточное количество, скажем, витамина A в рационе, состоящем из пшеницы и гороха, очень трудно, и цена самого дешевого допустимого рациона резко возрастет. Если же допустить, что рацион может содержать также какой-нибудь продукт, богатый витамином A, скажем рыбий жир, то можно получить допустимый рацион, лишь не намного более дорогой, чем рацион, состоящий из пшеницы и гороха. Сформулируем эту задачу в более общем виде.

Предположим, что в качестве корма можно использовать n видов продуктов, причем цена единицы i-го продукта равна ρ_i. Предположим также, что мы должны принимать во внимание m компонентов рациона, причем в единице i-го продукта содержится a_{ji} единиц j-го компонента, а минимальное допустимое количество j-го компонента в рационе равно c_j. Тогда цена рациона, состоящего из x_1 единиц первого продукта, x_2 единиц второго продукта и так далее, равна $\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n$.

Задача о самом дешевом рационе состоит теперь в нахождении среди всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0, \; \ldots, \; x_n\geqslant 0, \\ a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant c_m \end{cases}$$

таких, для которых функция

$$f(x)=\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n$$

достигает минимума.

Рассмотрим еще один класс экономических задач, приводящихся к похожей математической формулировке.

Задача о выборе технологии

Пусть мы имеем дело с предприятием или группой предприятий, выпускающих какую-либо однородную продукцию. При производстве этой продукции используются различные виды ресурсов: человеческий труд, электроэнергия, различные виды сырья, топлива, оборудования, земельные угодья и т. д. Каждый из этих ресурсов имеется в ограниченном количестве. Продукция может производиться разными способами, которые отличаются количеством и соотношением используемых в них ресурсов. Так, например, можно добывать уголь в шахтах и в открытых разработках, обрабатывать какую-либо деталь на машиностроительном заводе с помощью различных последовательностей технологических операций, откармливать скот на естественных пастбищах или специально сеять кормовые культуры, строить здания из кирпича, естественного камня, монолитного железобетона или сборных конструкций, изготовляемых на заводах, и т. д.

---

*) См. «Квант» № 3, 1971 г.

Наша задача состоит в том, чтобы определить, какое количество продукции нужно производить с помощью каждой технологии с тем, чтобы суммарный выпуск продукции был наибольшим.

Сформулируем теперь эту задачу на языке математики.

Пусть в наличии имеется p_j *единиц* j*-го ресурса* ($j=1, 2,\dots, n$), *а для производства единицы продукции по* i*-му способу* ($i=1, 2,\dots m$) *требуется* a_{ji} *единиц* j*-го ресурса. Если по* i*-му способу производится* x_i *единиц продукта, то всего используется* $a_{j1}x_1+\dots+a_{jm}x_m$ *единиц* j*-го ресурса, и эти величины не должны превосходить* p_j*. Общее производство равно, очевидно,* $x_1+\dots+x_m$.

Таким образом, среди наборов $(x_1,\dots, x_m)$*, удовлетворяющих системе линейных неравенств*

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \; \dots, \; x_m \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \leqslant p_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \leqslant p_n, \end{cases} \qquad (1)$$

нужно найти такие, для которых линейная функция $f(x)=x_1+\dots+x_n$ *достигает максимума.*

В первой части статьи мы показали, как задача о самом дешевом рационе в случае двух продуктов сводится к геометрической задаче построения опорной прямой к множеству допустимых точек, имеющей заданное направление. Конечно, такую же интерпретацию допускают все задачи линейного программирования, в которых число неизвестных в неравенствах равно двум. К ним относятся задачи «о велосипедах», «о карьерах», приведенные в первой части, задача о выборе технологии, когда имеются две возможные технологии.

Покажем, как получить аналогичную геометрическую интерпретацию для задач линейного программирования, содержащих три неизвестных.

Рассмотрим задачу о выборе технологии. Будем считать, что у нас есть выбор из трех различных технологий. Наша задача заключается в том, чтобы среди наборов (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющих системе линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \leqslant p_n, \end{cases} \qquad (2)$$

найти такие, для которых линейная функция $f(x)=x_1+x_2+x_3$ достигает максимума.

Будем считать, что все числа $p_1, \dots, p_n, a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, a_{13}, \dots, a_{n3}$ положительны.

Каждую тройку вещественных чисел (x_1, x_2, x_3) можно изобразить точкой трехмерного пространства. Точки (x_1, x_2, x_3), для которых $x_1=0$, лежат в плоскости осей Ox_2 и Ox_3. Эта плоскость делит все пространство на две части. Каждая из этих частей вместе с самой плоскостью называется полупространством. Одно из полупространств (на рисунке 1 то, которое лежит справа от плоскости x_2Ox_3) состоит из точек, для которых $x_1 \geqslant 0$, другое — из точек, для которых $x_1 \leqslant 0$. Точки, удовлетворяющие

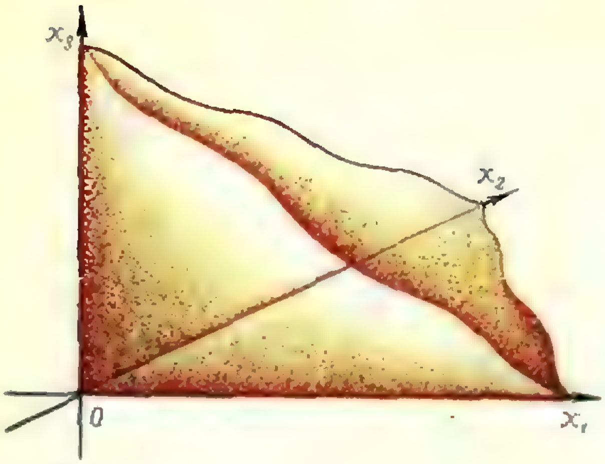


Рис. 1.

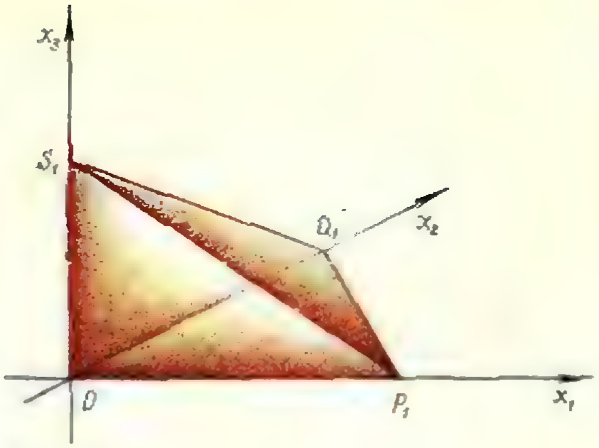


Рис. 2.

неравенству $x_2 \geqslant 0$, образуют полупространство, лежащее «сзади» плоскости x_1Ox_3, а точки, удовлетворяющие неравенству $x_3 \geqslant 0$, образуют полупространство, лежащее сверху от плоскости x_1Ox_2. Таким образом, точки (x_1, x_2, x_3), для которых одновременно выполнены все три неравенства $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, лежат в пересечении трех описанных полупространств, то есть в положительном октанте («1/8 части») пространства (см. рис. 1).

Точки (x_1, x_2, x_3), для которых

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = p_1,$$

образуют плоскость, проходящую через точки $P_1 = \left(\frac{p_1}{a_{11}}, 0, 0\right)$ на оси Ox_1, $Q_1 = \left(0, \frac{p_1}{a_{12}}, 0\right)$ на оси Ox_2 и $S_1 = \left(0, 0, \frac{p_1}{a_{13}}\right)$ на оси Ox_3. Точки, для которых

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \qquad (3)$$

лежат в одном из полупространств, на которые делит пространство эта плоскость. Так как $p_1 > 0$, то координаты точки $O = (0, 0, 0)$ удовлетворяют неравенству (3). Поэтому нужно выбрать полупространство L_1, которое содержит эту точку. Точки (x_1, x_2, x_3), координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \end{cases}$$

лежат в пересечении полупространства L_1 с положительным октантом. Это пересечение представляет собой неправильный тетраэдр $OP_1Q_1S_1$ (рис. 2).

Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant p_2$, лежат в полупространстве L_2, которое содержит точку O и ограничено плоскостью, проходящей через точки

$$P_2 = \left(\frac{p_2}{a_{21}}, 0, 0\right),$$

$$Q_2 = \left(0, \frac{p_2}{a_{22}}, 0\right),$$

$$S_2 = \left(0, 0, \frac{p_2}{a_{23}}\right).$$

Решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant p_2 \end{cases} \qquad (4)$$

служит пересечение тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ с полупространством L_2 или, что то же самое, пересечение тетраэдров $O_1P_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$. Возможны следующие случаи:

а) Все три точки $P_2Q_2S_2$ лежат вне тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ (это означает, что $\frac{p_1}{a_{11}} \leqslant \frac{p_2}{a_{21}}$; $\frac{p_1}{a_{12}} \leqslant \frac{p_2}{a_{22}}$, $\frac{p_1}{a_{13}} \leqslant \frac{p_2}{a_{23}}$) Тогда пересечение тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ совпадает с тетраэдром $OP_1Q_1S_1$ (рис. 3, *а*).

б) Некоторые из точек P_2, Q_2, S_2 лежат внутри, а некоторые вне

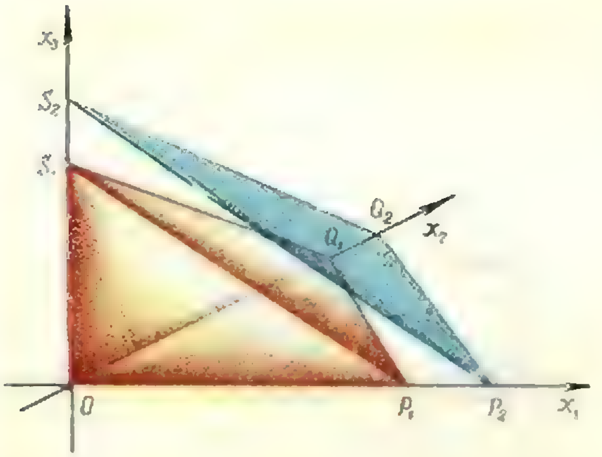


Рис. 3, *а*.

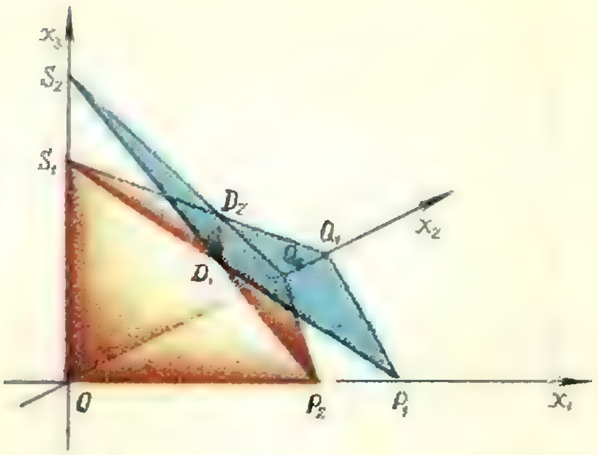


Рис. 3, *б*.

тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ (это означает, что среди чисел

$$\frac{p_1}{a_{11}}-\frac{p_2}{a_{21}},\quad \frac{p_1}{a_{12}}-\frac{p_2}{a_{22}},\quad \frac{p_1}{a_{13}}-\frac{p_2}{a_{23}}$$

имеется по крайней мере одно положительное и одно отрицательное). Тогда плоскость $P_2Q_2S_2$ «отрезает угол» у тетраэдра $OP_1Q_1S_1$; пересечением тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ будет многогранник с шестью вершинами (на рис. 3, *б* многогранник $OP_2Q_2D_1D_2S_1$).

в) Все три точки P_2, Q_2, S_2 лежат внутри тетраэдра $OP_1Q_1S_1$, то есть

$$\frac{p_1}{a_{11}}\geqslant\frac{p_2}{a_{21}},\quad \frac{p_1}{a_{12}}\geqslant\frac{p_2}{a_{22}},\quad \frac{p_1}{a_{13}}\geqslant\frac{p_2}{a_{32}}.$$

В этом случае пересечение тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ совпадает с $OP_2Q_2S_2$.

Присоединяя к системе (4) последующие неравенства системы (2), увидим, что каждое следующее неравенство или никак не меняет множества решений системы предыдущих неравенств (как в случае а)), или построенная плоскость «отрезает» часть многогранника, соответствующего решениям предыдущей системы (как в случаях б) и в)).

Так же как и на плоскости, множество точек в пространстве называется *выпуклым*, если вместе с каждыми своими двумя точками оно целиком содержит соединяющий их отрезок. Так как полупространство—выпуклое множество и общая часть выпуклых множеств, очевидно, тоже выпуклое множество, то множество точек, соответствующих решениям системы (2), представляет собой выпуклый многогранник A. Одной из вершин этого многогранника обязательно будет точка O, а ребрами, исходящими из этой вершины, будут некоторые отрезки осей координат. Заметим, что, в отличие от того, что мы имели при решении задачи «о корме для цыплят», множество допустимых точек в данном случае оказалось ограниченным.

Назовем плоскость *опорной* к выпуклому множеству в пространстве, если это множество целиком лежит в одном из полупространств, на которые эта плоскость делит пространство, и в то же время по крайней мере одна точка множества лежит на плоскости.

Рассмотрим семейство параллельных плоскостей

$$x_1+x_2+x_3=K. \qquad (5)$$

При $K<0$ эти плоскости не пересекают положительного октанта и, следовательно, многогранника A. Плоскость

$$x_1+x_2+x_3=0$$

является опорной к многограннику A и пересекается с ним в единственной точке (0, 0, 0). Весь многогранник A лежит в полупространстве $x_1+x_2+x_3\geqslant 0$. Точка (0, 0, 0) соответствует *минимуму* линейной функции

$f(x)=x_1+x_2+x_3$, заданной на многограннике A. При дальнейшем увеличении K плоскость $x_1+x_2+x_3=K$ будет пересекать многогранник A по многоугольнику.

Найдется такое значение (рис. 4) $K=K_0$, что плоскость $x_1+x_2+x_3=K_0$ вновь будет опорной к многограннику A, но многогранник будет лежать в полупространстве $x_1+x_2+x_3\leqslant K_0$.

Очевидно, линейная функция $f(x)=$ $=x_1+x_2+x_3$ достигает максимума на многограннике A во всех точках пересечения многогранника A с плоскостью $x_1+x_2+x_3=K_0$. Как видите, в семействе параллельных плоскостей, задаваемых уравнениями (5), существуют две опорные к многограннику A плоскости, одна из которых соответствует минимуму, а другая — искомому максимуму функции x_1+ $+x_2+x_3$ на A. Пересечение выпуклого многогранника с опорной плоскостью может состоять либо из единственной вершины многоугольника, либо из точек некоторого ребра многогранника, либо из точек некоторой грани многогранника. Каждый из этих трех случаев может осуществиться в нашей ситуации.

Грани многогранника A лежат в плоскостях

$$x_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (6)$$

$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+a_{j3}x_3=p_j$$

$$(j=1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ n),$$

причем, не обязательно во всех. Каждое ребро лежит в пересечении двух из этих плоскостей, а каждая вершина — в пересечении нескольких (трех или больше) плоскостей. Даже если в вершине пересекаются больше чем три плоскости, можно выбрать три из этих плоскостей, пересечение которых состоит только из этой вершины. Координаты точки пересечения трех плоскостей можно найти, решив систему уравнений, задающих эти плоскости.

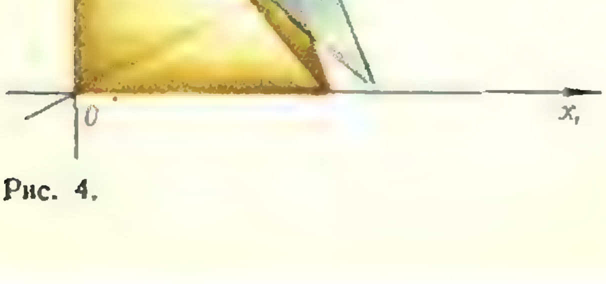


Рис. 4.

Итак, искать вершины многогранника A можно следующим образом. Составить всевозможные тройки уравнений из $(n+3)$ уравнений (6). (Число таких троек равно $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$). Каждую тройку можно рассматривать как систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Если решение $(x_1\ x_2\ x_3)$ этой системы существует и единственно, то надо проверить, выполняются ли для чисел x_1, x_2, x_3 остальные n неравенств системы (2). Если неравенства выполняются, то точка $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — вершина многогранника A. После этого для решения задачи линейного программирования достаточно сравнить значения функции $f(x)=x_1+x_2+x_3$ во всех полученных вершинах и выбрать те из них, в которых это значение наибольшее. Такая процедура связана с довольно большой вычислительной работой, особенно если n достаточно велико.

На самом деле решения большинства систем не будут вершинами многогранника A, и, кроме того, для решения задачи линейного программирования не обязательно знать все вершины многогранника. Поэтому таким непосредственным перебором при решении задач линейного программирования не пользуются.

Наиболее распространенный и весьма экономный способ решения задач линейного программирования придумали в 1947 году американские математики Дж. фон Нейман и Дж. Данциг, которые не знали тогда о работах Л. В. Канторовича и независимо от него пришли к методу линейного программирования. Они назвали свой способ *симплекс-методом*. Мы опишем сейчас геометрическую идею симплекс-метода в применении к нашей трехмерной задаче. На самом деле при использовании симплекс-метода задачу преобразуют, вводя некоторые дополнительные неизвестные, что позволяет с алгебраической точки зрения упростить процедуру решения. Однако для сохранения геометрической наглядности мы не будем этого делать.

Итак, начнем с вершины

$$O=(0,\ 0,\ 0),$$

в существовании которой мы уверены, и рассмотрим ребра многогранника A, выходящие из этой вершины. Пусть P — второй конец одного из таких ребер. Значение функции

$$f(x)=x_1+x_2+x_3$$

в точке P больше, чем в O. Рассмотрим теперь все ребра многогранника A, выходящие из точки P. При движении из точки P по некоторым из этих ребер значение функции $x_1+x_2+x_3$ может убывать или оставаться постоянным. Эти ребра мы сразу отбросим и выберем одно из ребер, при движении по которому значение функции x_1+x_2+ $+x_3$ возрастает. Пусть P' — второй конец этого ребра. Значение функции $x_1+x_2+x_3$ в вершине P' больше, чем в вершине P. Рассмотрим все ребра, выходящие из точки P' и выберем какое-нибудь ребро $P'P''$, при движении по которому функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает и т. д.

На каждом шаге мы будем получать вершину многогранника A, в которой значение функции x_1+x_2+ $+x_3$ больше, чем в предыдущих. В конце концов мы придем к такой вершине

$$M=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ x_3^0),$$

что при движении вдоль любого ребра, выходящего из этой вершины, значения функции $x_1+x_2+x_3$ не будут возрастать. Это значит, что плоскость

$$x_1+x_2+x_3=x_1^0+x_2^0+x_3^0,$$

опорная к многограннику A и M — одно из решений задачи линейного программирования. Для нахождения других решений нужно найти такие ребра, выходящие из M, при движении по которым значение функции $x_1+x_2+x_3$ остается постоянным.

Если таких ребер нет, то M — единственное решение задачи.

Если такое ребро одно, то решения задачи — все точки этого ребра. Если ребер два, то решениями служат все точки грани, в которой лежат эти ребра.

Чаще всего из каждой вершины многогранника A исходит три ребра. В этом случае на каждом шаге процесса приходится проверять всего два ребра (так как ребро, на котором лежит предыдущая вершина, можно сразу отбросить). Если вдоль обоих этих ребер функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает, то имеет смысл найти концы обоих ребер, сравнить значения функции в двух полученных вершинах и выбрать ту из них, в которой это значение больше. Если из вершины исходит большее число ребер, вдоль которых функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает, можно выбирать то, которое образует самый большой острый угол с плоскостями $x_1+x_2+x_3=K$, то есть ребро, вдоль которого функция $x_1+x_2+x_3$ «возрастает быстрее всего». Такой способ может оказаться более экономным с вычислительной точки зрения, так как не требует предварительного нахождения концов всех ребер, выходящих из данной вершины.

Все геометрические понятия, которые оказались полезными при рассмотрении задач линейного программирования с двумя и тремя переменными (прямая, плоскость, параллельность, выпуклое множество, опорная прямая, опорная плоскость и т. д.), можно сформулировать чисто алгебраически на языке уравнений и неравенств. При пользовании этим языком, в отличие от геометрического, как правило, не возникает существенных различий между случаями двух, трех и большего числа переменных, и соответствующие определения по аналогии переносятся на общий случай.

С другой стороны, ценность геометрического языка состоит в том, что интуиция может подсказывать некоторые построения и приемы решения задач, до которых трудно додуматься, если пользоваться только алгебраическим языком. Симплекс-метод представляет хороший пример такого приема. В силу этого оказывается полезным ввести геометрический язык и в случае произвольного числа переменных.

Упражнения

1. Докажите, что если плоскости

$$x_1+x_2+x_3=K$$

параллельны какой-нибудь грани многогранника A, то плоскость

$$x_1+x_2+x_3=K_0$$

совпадает с плоскостью этой грани.

2. Верно ли, что если плоскости

$$x_1+x_2+x_3=K$$

параллельны какому-нибудь ребру многогранника A, то плоскость

$$x_1+x_2+x_3=K_0$$

проходит через это ребро?

3. а) Пусть в задаче выбора технологии *при прежних ограничениях на ресурсы* ставится задача максимизировать не выпуск продукции, а прибыль, то есть разность между ценой произведенной продукции и затратами на использованные в производстве ресурсы, причем известно, что цена единицы произведенной продукции равна q рубля затраты при использовании единицы j-го ресурса равны q_j рублям ($j=1,..,m$).

б) Пусть в задаче выбора технологий требуется, чтобы выпуск продукции был не меньше чем S единиц и при этом чтобы затраты были минимальными.

Сформулируйте каждую из этих задач как задачу линейного программирования. Докажите, что существует ровно одно значение S, при котором решения задачи б) совпадают с решениями задачи а).

Литература

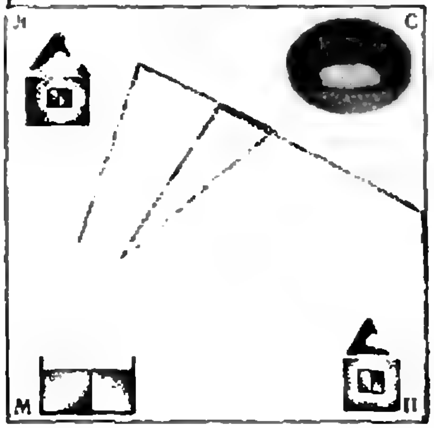
А. С. Солодовников, Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М., «Просвещение», 1966.

К ЧЕМУ ПРИВОДИТ НЕРЕШИТЕЛЬНОСТЬ?

Дом Пети, стадион, дом Люси и магазин расположены в вершинах квадрата со стороной 1 *км*.

Петя вышел из дому и направился на стадион — вечером там собиралась школьная футбольная команда. Но, пройдя половину пути до стадиона, Петя вспомнил, что он приглашен к однокласснице Люсе на день рождения. Петя решил на стадион не идти и повернул к дому Люси. Пройдя половину пути, Петя подумал, что идти без подарка неудобно и повернул к магазину. Однако, пройдя половину пути до магазина, Петя решил, что пропускать тренировку не стоит, и опять повернул к стадиону. Впрочем, пройдя половину пути до стадиона, Петя решил, что Люся очень обидится, если он не придет, опять повернул к дому Люси и так далее.

Найти тот треугольник, около которого в конце концов будет ходить нерешительный Петя (начало пути Пети изображено на рисунке).



Закон Ома

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ

Простой с первого взгляда

Обычно закон Ома формулируют так. Возьмем проводник с током (рис. 1). Пусть к его концам приложена разность потенциалов $V_A - V_B$, причем $V_A > V_B$. Тогда сила тока, текущего по проводнику, будет определяться формулой

$$I = \frac{V_A - V_B}{R},$$

где R — сопротивление проводника. Кроме того, добавляют, что если проводник с постоянным сечением S однороден по всей длине l, то $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}$, где σ называют удельной проводимостью, а $\frac{1}{\sigma} = \rho$ — удельным сопротивлением.

График зависимости тока от приложенной разности потенциалов выражается прямой (рис. 2).

Закон Ома выглядит очень простым и очевидным. Ведь ясно, что чем больше разность потенциалов, тем больше и ток. Но почему между этими двумя величинами существует простая пропорциональность, почему величина R сама не изменяется с ростом тока? Опыт показал, что закон Ома оказывается верным как для очень маленьких, так и для очень больших токов в металлах. К проволоке прикладывали такую большую разность потенциалов, что на длине в 1 *см* потенциал изменялся на миллион вольт. И все-таки ток можно было определять по закону Ома. Правда, на самом деле в таких опытах наблюдались очень небольшие отклонения от этого закона, но их вполне можно было объяснить тем, что проводник, несмотря на все предосторожности, нагревался, и его сопротивление менялось из-за изменения температуры. Этот на первый взгляд простой закон вызывает интересные вопросы.

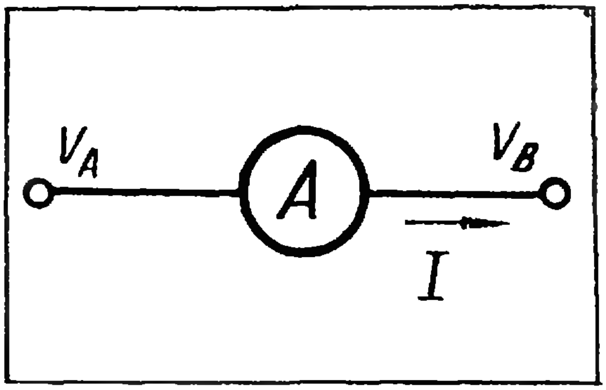


Рис. 1.

В какую сторону течет ток?

Почему ток течет в сторону падения потенциала, а не в сторону его повышения? Возьмем батарейку и замкнем ее на какое-нибудь сопротивление, например, включим лампочку. Согласно закона Ома по цепи потечет ток от положительной клеммы батарейки через лампочку к отрицательной клемме, уменьшая разность потенциалов между клеммами, которая конечно будет восстанавливаться батареей, но на это все время расходуется энергия (об этом будет еще разговор дальше).

Что было бы, если бы ток пошел в обратном направлении? Заряды клемм

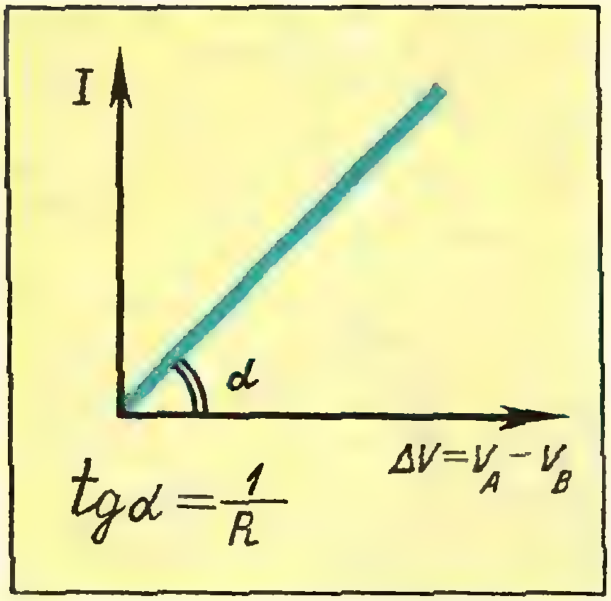


Рис. 2.

стали бы увеличиваться и возрастали бы беспрерывно без всякой затраты работы.

Представим себе, что по каким-то причинам в куске металла возникла разность потенциалов — в одной области возник положительный заряд, в другой — отрицательный. По закону Ома ток потечет из области с положительным зарядом в область с отрицательным зарядом. При этом абсолютные величины зарядов в обеих областях уменьшатся и разность потенциалов исчезнет. В металле наступит электрическое равновесие. Если бы ток шел в обратную сторону, положительный заряд все время увеличивался бы, а отрицательный — уменьшался, и никакого равновесия не наступило бы. Но мы хорошо знаем из опыта, что в природе любое отклонение от равновесия стремится рассосаться и все явления протекают так, что если мы не подводим энергию извне, то система стремится к состоянию, которое мы считаем равновесием.

Поэтому закон Ома — это закон, который показывает, как система стремится к равновесию.

Можно еще спросить, а как быстро установится равновесие? Ясно, что когда в цепь включена батарейка и сопротивления, то ток через сопротивления будет течь до тех пор, пока работает батарейка. Но как быстро после замыкания цепи ток перестанет меняться? Через сколько времени после размыкания цепи по ней перестанет течь ток? Рассмотрим совсем простую задачу.

Возьмем, например, два металлических шарика. Красный шарик заряжен положительно зарядом Q, а зеленый шарик заряжен таким же отрицательным зарядом (рис. 3). Соединим их (в момент времени $t=0$) проводником с сопротивлением R.

Известно, что потенциал шарика пропорционален заряду на нем. Если шарики одинаковые, можно считать, что

$$V=\frac{1}{C}Q.$$

Здесь C — емкость шарика.

Ток по проводнику при $t=0$ будет идти в направлении, показанном стрелкой. Величина этого тока

$$I=\frac{1}{C}\frac{Q-(-Q)}{R}=\frac{2Q}{CR}.$$

Теперь мы должны учесть, что после соединения шариков проволокой заряд красного шарика стал уменьшаться и за малое время Δt изменился на величину

$$\Delta Q=-I\,\Delta t=-\frac{2Q}{CR}\Delta t=$$
$$=-\frac{2\Delta t}{CR}Q.$$

Уменьшение заряда оказывается пропорционально самому заряду. Это означает, что зависимость заряда от

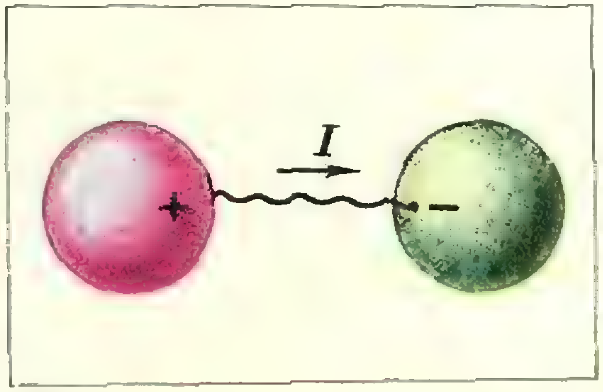


Рис. 3.

времени выражается экспоненциальной функцией *).

Зная свойства экспоненциальной функции, мы можем написать, что величина заряда изменяется так:

$$Q(t) = Qe^{-\frac{2t}{CR}} \;{}^{**)}.$$

Таким образом, уменьшение заряда будет происходить по экспоненциальному закону. Строго говоря, заряды исчезнут только при бесконечно большом времени, но практически они станут незаметными очень быстро.

Обычно временем установления равновесия принято называть время, за которое заряды шариков (а значит, и ток в цепи) уменьшается в e раз. Для нашего примера это время равно $\frac{CR}{2}$.

История открытия

Мы и сейчас относим закон Ома к числу важнейших законов физики. Когда Георг Симон Ом (1787—1854) обнародовал этот закон, ему просто не поверили. Главная работа Ома вышла в 1927 году в Берлине и называлась «Гальваническая цепь, математически разработанная доктором Г. С. Омом». Но первые его исследования начались раньше, результаты их были опубликованы в 1825 году. Чтобы понять, как трудно было добиться признания этих работ, надо знать, какими средствами располагал физик-экспериментатор 150 лет назад.

В 1820 году Ампер обнаружил, что электрический ток отклоняет магнитную стрелку компаса. Это позволило в принципе измерить «силу тока» и понять, что есть разница между силой тока и напряжением. К этому времени были известны два источника тока: электрическая батарея «вольтов столб» (его изобрел в 1799 году А. Вольта) и термоэлектрический элемент, изобретенный Зеебеком в 1821 году. Однако никто не предполагал, что можно установить математические законы действия батареи. Изменению действия батарей при разных соединениях элементов физики удивлялись, но никто не мог увидеть здесь ясных закономерностей. Кроме того, гальванические батареи в то время были плохие, напряжение на их концах изменялось во время опыта (батареи «садились»), что сильно запутывало результаты опытов. Ом отказался от этих батарей и провел свои первые опыты, используя в качестве источника тока термоэлектрический элемент, который давал значительно меньший ток, но зато был стабилен. Разность потенциалов такого элемента составляет около 0,0045 вольта. Чтобы измерить силу тока, получаемую от термоэлемента, Ом придумал новый метод. Проводник с током располагался вдоль по направлению свободно подвешенной магнитной стрелки (т. е. вдоль меридиана), и измерялся угол, на который надо было закрутить нитку, чтобы стрелка не отклонилась от этого направления. Угол закручивания нитки и характеризовал силу тока.

Первая формула, которую получил Ом, имела вид

$$X = \frac{a}{b+x},$$

---

*) Об эскпоненте рассказано в «Кванте» № 1 за этот год. Только там α выбрано равным единице.

**) Проверим последнюю формулу. Рассмотрим два момента времени t и $t+\Delta t$.

$$Q(t+\Delta t) = Qe^{-\frac{2}{CR}(t+\Delta t)}$$

$$Q(t) = Qe^{-\frac{2}{CR}t}$$

Разность этих двух функций можно вычислить (при малых Δt). Заметим, что речь идет об изменении функции e^x, причем x изменяется от $\left(-\frac{2}{CR}t\right)$ до $\left[-\frac{2}{CR}(t+\Delta t)\right]$, то есть на величину $\Delta x = -\frac{2}{CR}\Delta t$. Таким образом, $\Delta Q = -\frac{2}{CR}\Delta t \cdot Q$, так как скорость изменения экспоненциальной функции пропорциональна ей самой.

в ней X — величина, описывающая действие тока на магнитную стрелку, x — длина проволоки, а постоянные a и b зависят от того, какой был взят элемент и из чего сделаны соединительные провода.

Прежде всего Ом заметил, что величина X одинакова на всех участках провода. Теперь уже можно было попробовать найти закон, который определяет эту величину в зависимости от того, как устроена сама цепь.

Этот закон Ом нашел, подбирая наиболее простое выражение, которое описывало бы результаты его опытов. Основываясь на аналогии с течением тепла или воды, он дал теорию открытого им закона и ввел в физику ясные понятия: сопротивление, сила тока и электродвижущая сила, которую Ом называл «падением». Применив свою теорию теперь уже к гальваническим батареям, Ом нашел зависимость силы тока от числа батарей m и длины проволоки x:

$$X = \frac{am}{bm + x}.$$

Здесь в числителе стоит величина, пропорциональная суммарной электродвижущей силе элементов, соединенных последовательно, а в знаменателе — величина, пропорциональная сумме сопротивлений проволоки и элементов.

Закон Ома для замкнутой цепи

Выше мы рассказали о законе Ома для отдельного участка цепи. Но формула применима и ко всей цепи в целом.

Формула для замкнутой (не разветвленной) цепи записывается обычно так:

$$\Sigma I r_k = \varepsilon,$$

где ток I по всей цепи одинаков, r_k — сопротивление каждого из участков цепи, а ε называется электродвижущей силой. Рассмотрим самый простой случай — какой-нибудь источник тока (какой именно, неважно — мы его нарисуем просто в виде прямоугольника) и проволоки с сопротивлением R, соединяющей его выводы (рис. 4). Сам источник имеет некоторое сопротивление; обозначим его через r. (Это сопротивление называют внутренним). Тогда закон Ома запишется так:

$$IR + Ir = \varepsilon.$$

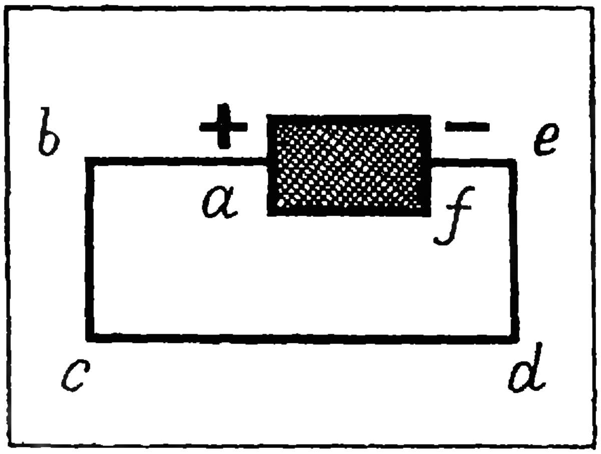


Рис 4

Нарисуем график изменения потенциала вдоль цепи. Будем считать, что расстояние от a до f (размер источника) очень мало по сравнению с длиной цепи. Это, конечно, несущественное упрощение. Тогда график изменения потенциала будет выглядеть так, как это показано на рисунке 5. Так как контур замкнут, то одна из точек (на рисунке точка c) отмечена дважды.

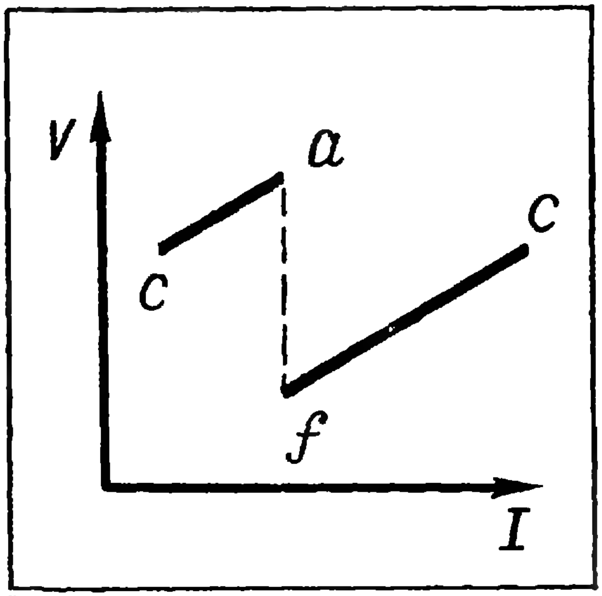


Рис 5

В том месте, где находится источник тока, происходит резкий скачок разности потенциалов, который и определяет электродвижущую силу в контуре. Если интересоваться только внешней цепью, то последнюю формулу можно переписать так:

$$IR = \varepsilon - Ir.$$

Мы видим, что разность потенциалов на выводах источника тока меньше электродвижущей силы на величину Ir.

Посмотрев теперь на формулу Ома

$$X = \frac{am}{bm + x},$$

мы видим, насколько хорошо Ом понял роль самих гальванических элементов в электрической цепи. Он не только установил, что э. д. с. батареи (составленной из последовательно соединенных элементов) пропорциональна числу элементов, но и ввел число элементов в знаменатель формулы. Это значит, что он хорошо понял роль внутреннего сопротивления батареи, которое (как это нам сейчас очевидно) также пропорционально числу последовательно соединенных элементов.

Локальный закон Ома

Напишем еще одну формулу для закона Ома. Для этого воспользуемся плотностью тока — отношением силы тока, текущего через очень маленькую площадку S (расположенную перпендикулярно направлению тока), к величине этой площадки

$$j = \frac{I}{S}.$$

Тогда из закона Ома следует, что

$$j = \frac{V_A - V_B}{RS} = \sigma \frac{V_A - V_B}{l}.$$

Если точки A и B расположены очень близко друг к другу, то величину

$$\frac{V_A - V_B}{l} = E$$

называют напряженностью электрического поля. Напряженность E есть вектор, направленный в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Так как j — тоже вектор и направлен он в ту же сторону, то мы можем написать закон Ома в векторной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

В таком виде закон Ома можно применять к любому телу в любой его точке. В это выражение не входят никакие геометрические размеры тела, а только проводимость σ, определяемая веществом в том месте, в котором мы измеряем плотность тока. В такой форме закон Ома носит локальный характер, т. е. в него входят величины, относящиеся только к одной избранной точке (а не ко всей цепи, как это было в формулах, которые мы писали выше).

Элементарная теория формулы Ома

Закон Ома мы сейчас умеем объяснять очень просто. Носителями тока в металлах служат электроны, которые движутся под действием электрического поля. В проводнике происходит беспорядочное тепловое движение. Под действием электрического поля на него накладывается более упорядоченное движение. (Обычно его скорости меньше тепловых.)

Электрическое поле действует на электроны с силой

$$\vec{F} = e\vec{E}.$$

Почему же электроны не движутся равноускоренно? Потому что они сталкиваются с атомами и теряют свою скорость. Подробно это объяснено в статье Д. А. Франк-Каменецкого (см. «Квант» № 9, 1970 г.).

Электрон набирает дополнительную скорость только за то небольшое время τ, которое он движется почти свободно в промежутке между двумя столкновениями; это время называют «временем свободного пробега». За время τ электрон наберет дополнительную скорость, равную произведению ускорения $\frac{e}{m}\vec{E}$ на τ:

$$\vec{u} = \frac{e}{m}\vec{E}\tau.$$

Если число электронов («свободных электронов», то есть таких, которые не «привязаны» к атомам) в единице объема обозначить через N, то через 1 $см^2$ будет протекать электрический ток, равный заряду электрона, умноженному на число электронов, проходящих через 1 $см^2$ в 1 секунду

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{m}N\tau\vec{E}.$$

В этой формуле вместо скорости u мы написали половину от нее. Это просто среднее арифметическое начального и конечного значения скоростей между двумя соударениями.

Отсюда можно написать выражение для удельной проводимости (как коэффициента пропорциональности между $\vec{j}$ и $\vec{E}$):

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2N\tau}{m}\ ^{*)}.$$

Джоулево тепло и работа источника тока

Таким образом, за простой формулой закона Ома скрывается много сложных явлений. При течении тока электроны все время получают энергию от электрического поля и все время теряют ее при столкновениях с атомами. В результате, как хорошо известно, выделяется тепло (так, например, нагревается электрическая плитка, проволока в которой обладает большим сопротивлением).

Количество тепла, которое выделяется на участке проводника с сопротивлением, определяется формулой Джоуля — Ленца

$$Q = \frac{1}{J}I^2R,$$

где J — механический эквивалент тепла:

$$J = 4{,}184\ \frac{дж}{кг\cdot кал}.$$

За счет каких же ресурсов выделяется тепло? Ответ: эту работу как раз и производит источник тока, поддерживая разность потенциалов на своих клеммах.

Возвращаясь к формуле Ома для замкнутой цепи, можно сказать, что энергия, расходуемая в форме тепла во всей цепи, включая внутреннюю часть самого источника тока, равна EI, то есть произведению э. д. с. на силу тока

$$I^2(R+r) = EI.$$

Работа, совершаемая источником тока, происходит либо за счет химической энергии (в батареях), либо за счет механической (в генераторах). Последняя формула выражает закон сохранения энергии для цепи, состоящей из источника тока, замкнутого каким-либо сопротивлением.

Формула закона Ома позволяет рассчитывать любые цепи постоянного тока, а в немного измененной форме ее можно обобщить и на токи переменные.

Упражнения

1. Найдите, по какому закону будут изменяться потенциалы двух шариков, подобных нарисованным на рисунке 3, если заряд одного $Q=0{,}01$ кулона, а другого 0,02 кулона. Произведение CR положите равным 10^{-12} *сек*.

2. Через сколько времени разность между зарядами шариков уменьшится в 20 раз?

---

*) Иногда эту же формулу пишут несколько иначе, заменяя τ по формуле

$$\tau = \frac{\text{свободный пробег}}{\text{средняя тепл. скорость}} = \frac{\lambda}{v_{ср}}.$$

Свободный пробег — это средний путь, пролетаемый электроном между двумя соударениями. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2N\lambda}{mv_{ср}}.$$

Эта формула носит название формулы Друде.

Логические задачи и алгебра высказываний

Л. Л. Цинман

Начнем с формулировок нескольких логических задач.

Задача 1. *После родительского собрания к учительнице подошел один из родителей.*

— Вот вы не назвали моего сына среди хороших учеников — сказал он.— А ведь мой Федя — отличник и к тому же лучший лыжник класса.

— Да, вы правы,— ответила учительница.— Но хорошим учеником мы считаем ученика, который хорошо учится, дисциплинирован, помогает в учебе отстающим и, кроме того, участвует в работе научного кружка или занимается спортом. А ваш Федя...

Что еще собиралась сказать учительница Фединому папе?

Задача 2. *Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?*

Задача 3. *Один логик попал в плен к дикарям и был заключен в темницу, имеющую два выхода. Вождь дикарей предложил пленнику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на свободу, а другой на верную смерть. Ты можешь избрать любой. Сделать выбор тебе поможет мой стражник. Он останется здесь, чтобы ответить на один твой вопрос — любой, какой ты пожелаешь ему задать. Но я предупреждаю тебя: если у этого стражника хорошее настроение, то он говорит правду, если же у него настроение плохое, то он лжет!»*

После минутного размышления сообразительный логик задал один вопрос, после чего безошибочно выбрал тот выход, который вел на свободу. Что это был за вопрос?

Логические задачи, подобные перечисленным, часто появляются в научно-популярных изданиях. Для их решения не требуется каких-либо специальных знаний из области логики, требуется лишь достаточно хорошо развитое логическое мышление. Но представьте себе человека, взявшегося за решение какой-либо числовой задачи (на движение, переливание) и не умеющего при этом свободно делать алгебраические преобразования и решать уравнения. Приблизительно в таком же положении вы оказываетесь при решении логических задач без использования вспомогательного аппарата, который носит название алгебры высказываний или алгебры логики (в отличие от алгебры чисел, изучаемой в школе).

Цель статьи — познакомить читателя с первоначальными сведениями из этой необычной алгебры и, используя полученные знания, решить сформулированные выше задачи. Заметим, однако, что алгебра высказываний используется не только для решения логических задач (это лишь одно из занимательных ее приложений), но она является также важной составной частью одного из современных разделов математики — математической логики.

В алгебре высказываний элементами являются высказывания, например: «Федя — отличник», «Федя — хороший ученик», «Дик лжет». При рассмотрении высказываний нас будет интересовать лишь один вопрос — является ли данное высказывание истинным или ложным. Так, первое из приведенных высказываний истинно, второе — ложно (см. условие задачи 1), третье высказывание тоже либо истинно, либо ложно, но для выяснения этого вопроса необходимо решить задачу 2. Для обозначения высказываний в алгебре логики мы будем использовать большие латинские буквы A, B, C,... Запись

$$\text{зн. } \{A\}=1$$

означает, что значение высказывания A есть истина, а запись

$$\text{зн. } \{A\}=0$$

означает, что значение высказывания A — ложь.

Таким образом, всякое высказывание может принимать одно из двух значений: 0 или 1.

В обыденной речи из простых высказываний с помощью различных союзов, частиц, связок мы образуем составные высказывания. Так из высказывания A и высказывания B можно составить такие высказывания: «*A и B*»; «*A или B*»; «*не A*» («*неверно, что A*»); «*если A, то B*»; «*либо A, либо B*» и другие.

Примеры

«(Клод лжет) *и* (Жак лжет)»;

«*неверно, что* (Федя — хороший ученик)»;

«*если* (Клод говорит правду), *то* (Жак лжет)».

Введем теперь в нашей алгебре операции над высказываниями, причем определим эти операции так, чтобы они соответствовали некоторым наиболее употребительным способам образования составных высказываний в обычном языке.

Логическое произведение высказываний (конъюнкция)

Логическое произведение высказывания A и высказывания B обозначается так: $A \wedge B$. Эта операция должна соответствовать составному высказыванию «*A и B*». Такое составное высказывание мы считаем истинным тогда и только тогда, когда оба данных высказывания истинны. Например, теорему

«в треугольнике: (средняя линия параллельна основанию) *и* (средняя линия равна половине основания)»

мы считаем доказанной лишь после того, как доказали оба свойства средней линии. Поэтому в качестве определения операции логического произведения естественно взять такую таблицу истинности:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логическая сумма высказываний (дизъюнкция)

Обозначение логической суммы: $A \vee B$. Эта операция должна соответствовать составному высказыванию «*A или B*». Последнее высказывание мы считаем истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний. Именно в таком смысле в задаче 1 учительница употребила союз *или* в определении хорошего ученика.

Таблица истинности для операции *или* выглядит так:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отрицание высказывания

Обозначение отрицания высказывания $A : \bar{A}$. Отрицание высказывания A соответствует высказыванию *«не A»* (*«неверно, что A»*). Поэтому оно определяется такой таблицей истинности:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

С помощью введенных операций в алгебре высказываний из отдельных высказываний A, B, C... можно строить сложные алгебраические выражения, например: $\bar{A}\vee B$; $\overline{A\wedge B}$; $(A\vee\bar{B})\wedge C$.

Как и в числовой алгебре, условимся, что операция умножения старше, чем операция сложения. Это позволяет не писать некоторые скобки. Теперь выражение

$$(A\wedge B)\vee((\bar{A}\vee B)\wedge C)$$

можно переписать в виде

$$A\wedge B\vee(\bar{A}\vee B)\wedge C.$$

Если знать значение каждого высказывания, входящего в алгебраическое выражение, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этого алгебраического выражения. Найдем, например, значения алгебраического выражения $\bar{A}\vee\bar{B}$ при всех возможных значениях его компонент A и B:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}\vee\bar{B}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Сначала по значениям в первых двух столбцах заполняются третий и четвертый столбцы, а потом, согласно определению сложения, заполняется последний столбец. Эта таблица называется таблицей истинности для выражения $\bar{A}\vee\bar{B}$.

Теперь построим таблицу истинности для $\overline{A\wedge B}$:

A	B	$A\wedge B$	$\overline{A\wedge B}$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Последние столбцы в приведенных таблицах оказались одинаковыми. Это означает, что при любых значениях высказываний A и B выражения $\bar{A}\vee\bar{B}$ и $\overline{A\wedge B}$ принимают одинаковые значения. Такие алгебраические выражения мы будем называть равносильными. Для записи равносильности употребляется знак тождества:

$$\overline{A\wedge B}\equiv\bar{A}\vee\bar{B}.$$

Эти два равносильных выражения имеют один и тот же содержательный смысл, но выраженный разными словами.

Действительно, если A и B — какие-то высказывания, то $\overline{A\wedge B}$ выражает сложное высказывание «неверно, что оба данных высказывания истинны», а $\bar{A}\vee\bar{B}$ выражает сложное высказывание «хотя бы одно из данных высказываний ложно».

Алгебраические выражения, у которых в таблице истинности последний столбец состоит сплошь из единиц (из нулей), будем называть тождественно истинными (тождественно ложными) и обозначать буквой *И* (буквой *Л*).

С помощью таблиц истинности всегда легко установить, равносильны или нет два данных алгебраических выражения.

Приведем простейшие равносильности, некоторыми из которых мы в дальнейшем будем пользоваться как правилами.

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$.
2. $A \vee B \equiv B \vee A$.
3. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$.
4. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$.
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
7. $A \wedge A \equiv A$.
8. $A \vee A \equiv A$.
9. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.
10. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.
11. $\bar{A} \equiv A$.
12. $A \wedge \bar{A} \equiv Л$.
13. $A \vee \bar{A} \equiv И$.
14. $A \wedge Л \equiv Л$.
15. $A \vee И \equiv И$.
16. $A \wedge И \equiv A$.
17. $A \vee Л \equiv A$.

Если представить себе содержательный смысл правил 1—17 так, как это мы сделали выше с правилом 9, то эти равносильности станут очевидными и легко запоминаемыми.

Некоторые из перечисленных правил, а именно 1—5, аналогичны известным свойствам операций сложения и умножения в числовой алгебре. Поэтому в алгебре высказываний мы можем производить алгебраические преобразования подобные тем, которые делаем в числовой алгебре. В частности, мы можем «перемножить» два алгебраических выражения по правилу умножения многочлена на многочлен.

Но в алгебре высказываний имеются и свои специфические правила, например 6.

Решение задачи 1

Введем обозначения для высказываний:

A: «Федя хорошо учится»;

B: «Федя дисциплинирован»;

C: «Федя помогает в учебе отстающим»;

D: «Федя участвует в работе научного кружка»;

E: «Федя занимается спортом».

Теперь высказывание «Федя — хороший ученик», согласно «определению» хорошего ученика, данному учительницей, можно записать так: *A и B и C и* (*D или E*).

На языке алгебры высказываний это сложное высказывание примет вид алгебраического выражения

$$A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E).$$

Учительница утверждает, что «*неверно, что* (Федя — хороший ученик)», то есть

$$\text{зн.}\ \{\overline{A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E)}\} = 1.$$

Преобразуем теперь алгебраическое выражение в левой части сначала по правилу 9 (правда, в данном случае отрицание стоит над логическим произведением четырех сомножителей, но нетрудно убедиться, что равносильность 9 остается справедливой и в этой более общей форме), а потом по правилу 10:

$$\begin{aligned} &\text{зн.}\ \{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee (\overline{D \vee E})\} = 1; \\ &\text{зн.}\ \{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \wedge \bar{E}\} = 1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Федин папа утверждает (и учительница согласилась с ним), что

$$\text{зн.}\ \{A\} = 1$$

(Федя — отличник!), а также

$$\text{зн.}\ \{E\} = 1$$

(Федя — лучший лыжник класса!). Тогда в (1) первое и два последних слагаемых ложны и их можно отбросить по правилам 17 и 14.

Получаем, что

$$\text{зн.}\ \{\bar{B} \vee \bar{C}\} = 1.$$

Значит, учительница хотела пожаловаться Фединому папе или на то, что Федя — недисциплинирован, или на то, что он не помогает в учебе отстающим (а может быть, Феде свойственны сразу оба эти недостатка).

Решение задачи 2

Обозначим показания свидетелей Клода, Жака и Дика соответственно буквами $К$, $Ж$, $Д$. Мы не знаем, какие из этих показаний истинны, а какие ложны. Но нам известно следующее:

1) либо Клод сказал правду, и тогда Жак солгал, либо Клод солгал, и тогда Жак сказал правду;

2) либо Жак сказал правду, тогда Дик солгал, либо Жак солгал, и тогда Дик сказал правду,

3) либо Дик сказал правду, и тогда Клод и Жак солгали, либо Дик солгал, и тогда неверно, что оба других свидетеля солгали (то есть хотя бы один из этих свидетелей сказал правду)

Выразим эти составные высказывания на языке алгебры высказываний.

1) $К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж$.

2) $Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д$.

3) $Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)$

Условие задачи будет выполнено, если одновременно истинны эти три алгебраические выражения, а, значит, истинна их конъюнкция

$$\text{зн. } \{(К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)]\} = 1. \quad (2)$$

Мы получили одно логическое уравнение с тремя неизвестными. Дальнейшее, как говорится, есть уже «дело техники». В левой части уравнения начнем производить умножение по правилу умножения многочлена на многочлен, отбрасывая те слагаемые, в которых какое-либо высказывание умножается на свое отрицание по правилам 12, 14, 17, и заменяя два одинаковых сомножителя одним таким сомножителем (по правилу 7)

$$(К \wedge \overline{Ж} \vee \overline{К} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (К \vee Ж)] \equiv (\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \vee К \wedge \overline{Ж} \wedge Д) \wedge (Д \wedge \overline{К} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge К \vee \overline{Д} \wedge Ж) \equiv \overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д}$$

После проведенных равносильных преобразований, уравнение (2) можно заменить совсем простым уравнением

$$\text{зн. } \{\overline{К} \wedge Ж \wedge \overline{Д}\} = 1$$

Отсюда

$\text{зн } \{\overline{К}\} = 1$, $\text{зн } \{Ж\} = 1$, $\text{зн. } \{\overline{Д}\} = 1$

Итак, лишь Жак говорил правду, а показания Клода и Дика лживы

Решение задачи 3

Пусть A означает высказывание «первый выход ведет на свободу», а B означает, «у тебя сейчас хорошее настроение». Ясно, что сами по себе A и B бесполезны как вопросы.

Поэтому поставим себе задачу построить из этих высказываний такой вопрос, на который стражник должен ответить «да», если A истинно, и «нет», если A ложно, независимо от своего настроения (то есть независимо от истинности B):

A	B	Желаемый ответ	Искомый вопрос
1	1	да	
1	0	да	
0	1	нет	
0	0	нет	

Заполним последний столбец этой таблицы. В верхней клетке необходимо поставить 1, так как у стражника хорошее настроение и мы хотим услышать от него ответ «да. В следующей клетке поставим 0, то есть мы хотим услышать «да» от стражника, даже если у него в этот момент плохое настроение. Аналогичным образом заполняем остальные клетки:

A	B	Желаемый ответ	Искомый вопрос
1	1	да	1
1	0	да	0
0	1	нет	0
0	0	нет	1

Таблица показывает, что искомое составное высказывание, которое мы хотим задать в виде вопроса, должно быть истинно в том случае, если (A истинно) *и* (B истинно), *или* в том случае, если (A ложно) и (B ложно).

Значит, оно имеет вид

$$A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

Итак, логик должен задать стражнику такой вопрос: «Верно ли, что первый выход ведет на свободу и у тебя сейчас хорошее настроение или пер вый выход ведет к смерти и у тебя сейчас плохое настроение?»

Можете проверить, что ответ «да» на этот вопрос последует в том и только в том случае, если первый выход ведет на свободу

Еще несколько операций

Читатель, по-видимому, почувствовал преимущество алгебраического метода в решении логических задач Но у него может возникнуть мнение, что возможности применения нашей алгебры весьма ограничены. Действительно, пока в алгебре высказываний введены операции, соответствующие образованию составных высказываний с использованием лишь частицы *не* и союзов *и*, *или*.

А как решать задачи, если в них высказывания составлены с помощью других союзов?

Оказывается, если из высказываний A, B, C,... каким-либо образом построено составное высказывание,то можно указать другое составное высказывание, имеющее тот же самый смысл, но которое построено из тех же исходных высказываний с использованием только частицы *не* и союзов *и*, *или* (более того, для этой цели достаточно иметь частицу *не* и только один из последних двух союзов). Впрочем, удобно ввести в нашу алгебру еще одну операцию: логическое следование (соответствующее образованию составного высказывания с помощью союза *если*..., *то*...). Тогда перефразировка высказываний к виду, удобному для записи в алгебре высказываний, станет несложной и довольно естественной

Примеры

(*либо* A, *либо* B) $\equiv$ [A *и* (*не* B)] *или* [(*не* A) *и* B)];

(*ни* A, *ни* B) $\equiv$ [(*не* A) *и* (*не* B)],

(*не только* A, *но и* B) $\equiv$ (A *и* B),

(A необходимо для B) $\equiv$ (*если* B, *то* A),

(A достаточно для B) $\equiv$ (*если* A, *то* B)

Логическое следование (импликация)

Обозначение логического следования: $A \to B$ (встречается также другое обозначение $A \supset B$).

Высказывание $A \to B$ будем считать истинным во всех случаях, кроме случая, когда A истинно, а B ложно

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Мы не будем обсуждать в этой статье, почему именно такая таблица истинности соответствует содержательному значению вводимой операции

Это не простой вопрос. Ограничимся только примерами. Так, высказывание «если 6 четно, то 7 четно», конечно, ложно ($1 \to 0 = 0$) С другой стороны, утверждение «если p делится на 6, то p делится на 2» естественно считать истинным для любого целого числа p Значит, следует признать истинным не только высказывание «если 18 делится на 6, то 18 делится на 2» ($1 \to 1 = 1$), но и высказывание «если 16 делится на 6, то 16 делится на 3» ($0 \to 0 = 1$)

Для вновь введенной алгебраической операции выпишем только одну равносильность, продолжающую таблицу на странице 17·

18. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$

Эта формула позволяет сразу избавиться от знака $\to$ и дальнейшие преобразования, как и раньше, производить по правилам 1—17.

Упражнения

1. В уставе одного клуба записаны следующие правила

1) финансовый комитет должен быть избран из состава общего комитета;

2) никто не может быть одновременно членом и общего, и библиотечного комитетов если он не входит при этом в финансовый комитет,

3) никто из членов библиотечного комитета не может быть в финансовом комитете

Упростите эти правила

2. Один студент пришел сдавать экзамен автоматическому экзаменатору. На экране автомата появилось пять вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ «да» или «нет».

После ответа на все вопросы (для этого надо нажать соответствующие кнопки) автомат, оценивая каждый правильный ответ в 1 балл, ставит общую оценку за экзамен. Студент внимательно прочел все вопросы и с огорчением вынужден был констатировать, что он не знает ответа ни на один из них.

Все его знания сводились к следующему:

1) первый и последний вопросы требуют противоположных ответов;

2) напротив, второй и четвертый вопросы должны иметь одинаковые ответы;

3) хотя бы один из первых двух вопросов требует ответа «да»;

4) если четвертый вопрос требует ответа «да», то пятый требует ответа «нет».

Кроме того, студенческий опыт подсказывал ему, что вопросов, требующих ответа «да», всегда ставится больше, чем вопросов, требующих ответа «нет».

Картина получалась невеселая. Но студент не отчаивался. Он плохо знал данный предмет, но зато хорошо умел решать логические задачи. Быстро произведя на листочке какие-то вычисления, он с радостью обнаружил, что 4 балла ему обеспечены, а если повезет, то он получит все 5 баллов. Какие вычисления произвел студент?

3. Писатели A, B, C, D пишут под псевдонимами X, Y, Z, W. Требуется узнать, какой именно псевдоним использует каждый из писателей, если известно следующее:

1) если D не X, то B есть X;
2) если B не X и не W, то A есть X;
3) если C не W, то B есть Z;
4) если D есть Y, то B не X;
5) если A не X, то C не Y.

Для более полного знакомства с алгеброй высказываний можно рекомендовать такую литературу:

Л. А. Калужнин, Что такое математическая логика. М., «Наука», 1964, гл. 1 и 2.

И. М. Яглом, Необыкновенная алгебра. Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1968.

Р. Р. Столл, Множества, логика, аксиоматические теории. М., «Просвещение», 1968, гл. II, §§ 2.1—2.4.

П. С. Новиков, Элементы математической логики. М., «Физматгиз», 1959 г.

А. Гжегорчик, Популярная логика. М., «Наука», 1965.

А. Б. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач. М., «Физматгиз», 1960.

Х. Фрейденталь, Язык логики. М., «Наука»., 1969.

КАК ПРОЩЕ ДЕЛИТЬ?

Как проще всего разделить меньшее число на большее, если большее число оканчивается цифрой 9?

Пусть требуется разделить число a на число b, причем $a < b$. Положим $b = 10c + 9$. Проверьте теперь, что

$$\frac{a}{10c+9} = 10^{-1}\frac{a-p_1}{c+1} + {}$$
$$+ 10^{-1}\frac{\frac{a-p_1}{c+1} + 10p_1}{10c+9},$$

где p_1 — остаток от деления a на $c+1$, так что $\frac{a-p_1}{c+1}$ — целое число.

Пусть $\frac{a}{b} = 0{,}\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots$ —десятичная запись частного. Тогда $\alpha_1 = \frac{a-p_1}{c+1}$ и

$$\frac{\alpha_1 + 10p_1}{10c+9} = 0,\ \alpha_2\,\alpha_3\ldots$$

Обозначив $\alpha_1 + 10\,p_1$ через a_1, запишем равенство

$$\frac{a_1}{10c+9} = 0,\ \alpha_2\,\alpha_3\ldots,$$

из которого аналогичным образом найдем α_2 и так далее

Примеры

1. Надо разделить 37 на 89. Поступаем так: 37 делим не на 89, а на 9, так как число единиц в делителе 9, а десятков 8, 8+1=9. Затем остаток приписываем перед частным и снова делим на 9 и так далее. Частные дают последовательные цифры десятичной записи дроби $\frac{37}{89}$.

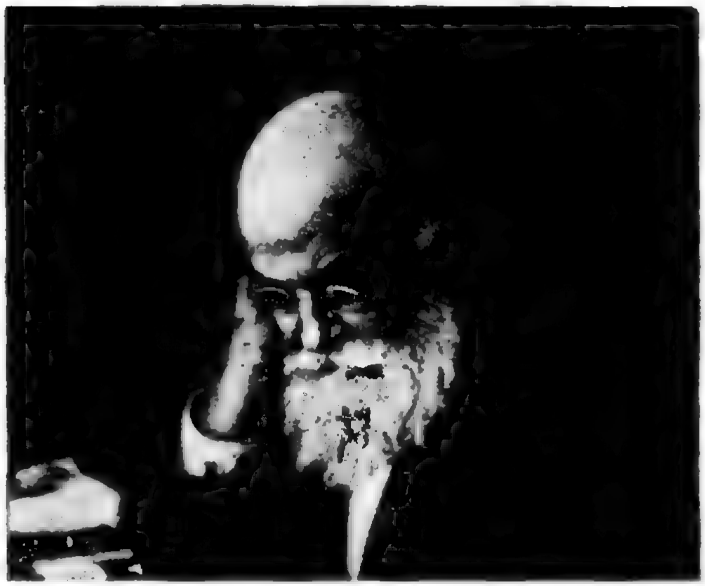
$$-\begin{array}{r|l} 37 & \underline{9} \\ \underline{36} & 4 \\ 1 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 14 & \underline{9} \\ \underline{9} & 1 \\ 5 & \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 51 & \underline{9} \\ \underline{45} & 5 \\ 6 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 65 & \underline{9} \\ \underline{63} & 7 \\ 2 & \end{array}$$

Итак, $\frac{37}{89} = 0{,}4157\ldots$

(Окончание см. на стр. 29.)

Н. Е. ЖУКОВСКИЙ



ОСНОВЫ

Автора этой статьи, безусловно, не нужно представлять читателю. Выдающийся русский ученый и инженер Н. Е. Жуковский был основателем теоретической, технической и экспериментальной аэромеханики. Н. Е. Жуковского называют отцом русской авиации. Но, наверное, не всем известно, что он был и выдающимся популяризатором науки, умевшим говорить просто о самых сложных вопросах механики.

В марте этого года исполнилось 60 лет со дня смерти ученого.

Мы предлагаем читателям «Кванта» познакомиться с лекцией Н. Е. Жуковского, посвященной понятию о вихрях — одному из основных понятий гидро- и аэромеханики. Текст лекции воспроизводится с незначительными редакционными изменениями и сокращениями по книге Дж. Дж. Томсона «Электричество и материя» (Госиздат, Москва — Ленинград, 1928 г.), где она была напечатана в виде приложения *). В конце статьи приводятся краткие сведения об ученых, упоминаемых в лекции.

Механика развивалась как трудами аналитиков, так и остроумными исследованиями геометров. При этом часто бывало, что сложные аналитические формулы освещались и представлялись в ясной наглядной форме благодаря удачным геометрическим представлениям. Такие интерпретации охватывали задачу во всей ее полноте и раскрывали многие свойства ее, не замеченные при аналитическом исследовании. Так было с решением задачи о движении твердого тела около его центра тяжести;

---

*) Впервые эта лекция была напечатана в 1892 г.; она включена в Собрание сочинений Н. Е. Жуковского (том VII, Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 132—149).

решение сперва было получено Эйлером аналитическим путем, но оставалось затерянным среди массы формул, и только благодаря простым и наглядным интерпретациям Пуансо предстало перед глазами ученых со всей ясностью.

Какая роль выпала на долю Пуансо при разъяснении вопроса о движении твердого тела, такая же принадлежит и Гельмгольцу в разъяснении вопроса о движении жидкости.

Почти все работы Гельмгольца по механике посвящены гидромеханике. Можно сказать, что современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу. А между тем наиболее замечательная работа ученого в этой области появилась в 1858 году*), спустя 43 года после того как формулы, заключающие в себе принцип сохранения вихрей, были найдены Коши. Но Коши рассматривал полученный им результат только с аналитической стороны и не предвидел той массы вопросов, которые могут быть решены при надлежащем геометрическом освещении выводов.

Я постараюсь теперь с возможною простотою объяснить вам установленное Гельмгольцем понятие о вихре.

Вообразим цилиндрический сосуд конечной высоты (рис. 1) с весьма большим основанием, наполненный жидкостью (или газом), и предположим, что эта жидкость движется так: центральный цилиндрический столбик ее некоторой толщины вращается, как твердое тело, около своей оси, а вся остальная масса жидкости крутится около этого столбика по кругам со скоростями, обратно пропорциональными расстоянию от оси столбика, причем эти скорости, увеличиваясь по мере приближения к центральному столбику, переходят на его поверхности в скорость столбика.

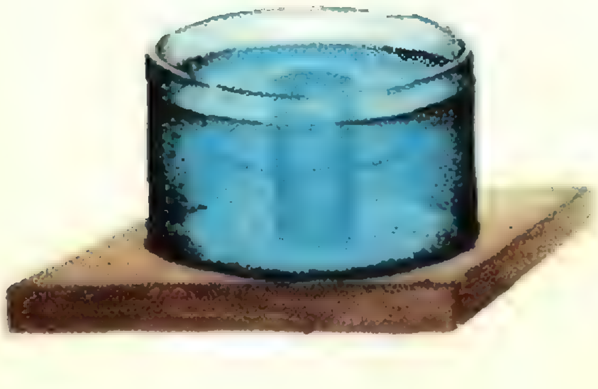


Рис 1

Такое движение жидкости и называется вихрем, а характеризующий его цилиндрический столбик — вихревым шнуром. Скажем, что напряжение вихря равно половине произведения скорости жидкости на поверхности вихревого шнура на периметр нормального сечения шнура.

Удвоенную величину этого произведения называют циркуляцией скорости.

Вообще циркуляция скорости по какому-нибудь замкнутому контуру внутри движущейся жидкости равна произведению длины контура на среднюю из всех скоростей точек контура по направлению касательной к контуру.

Так как в движении жидкости, изображенном на рисунке 1, скорости обратно пропорциональны радиусам, циркуляции скорости по всем горизонтальным окружностям, имеющим центр на оси столбика и охватывающим его, равны между собою и, следовательно, равны удвоенному напряжению вихря, а циркуляции скорости по контурам, состоящим из отрезков двух окружностей между отрезками двух радиусов, и лежащим вне шнура (контур *АВСД* на рисунке 2) равны нулю. Кроме этого, можно доказать, что циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, охватывающему шнур, равна удвоенному напряжению вихря, а циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, не охватывающему шнур, равна нулю.

---

*) Имеется в виду работа Гельмгольца об уравнениях гидродинамики, соответствующих вихревым движениям.

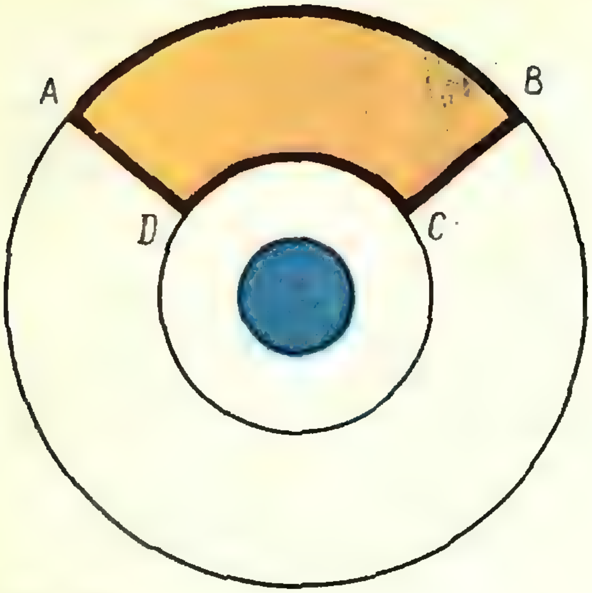


Рис. 2.

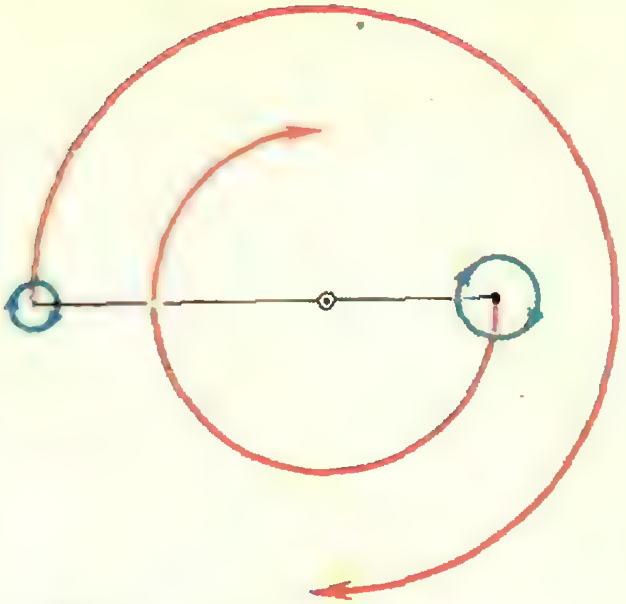


Рис 3

Это замечание позволяет нам разыскивать вихревой шнур в движущейся жидкости. Для этого надо провести замкнутый контур и определить для него циркуляцию. Если она не равна нулю, то сквозь контур проходит вихревой шнур. После этого надо уменьшать контур до тех пор, пока циркуляция не изменится. Уменьшая его таким образом, мы можем подойти к поверхности шнура.

Если в рассмотренном нами весьма широком сосуде имеется только один вихрь, обусловленный прямым вихревым шнуром, то шнур будет оставаться неподвижным. Но если бы в этом сосуде образовались два таких вихря, крутящихся около параллельных вихревых шнуров, то шнуры стали бы двигаться. На рисунке 3 изображены в плане два вихревых шнура с различными напряжениями, вращающиеся в одну сторону. Так как вихрь, соответствующий левому вихревому шнуру, вращает всю жидкую массу около оси шнура по часовой стрелке, правому шнуру сообщается скорость, направленная перпендикулярно радиусу вниз, а вихрь правого шнура по той же причине сообщает левому шнуру скорость, направленную вверх. Вследствие этого происходит то, что оба шнура вращаются по часовой стрелке около некоторой точки; эта точка получится, если в центрах двух шнуров мысленно сосредоточим массы, пропорциональные напряжению соответствующих вихрей, и отыщем центр тяжести этих двух масс.

Если бы вихри крутились в различные стороны, то вихревые шнуры (рис. 4) стали бы вращаться около центра, лежащего со стороны шнура большего напряжения, а вращение совершалось бы в сторону движения вихря большего напряжения. Если бы при этом оба напряжения были

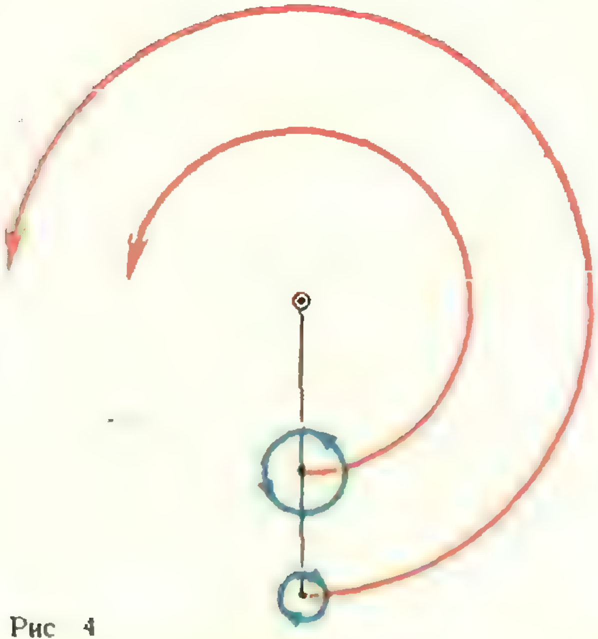


Рис 4

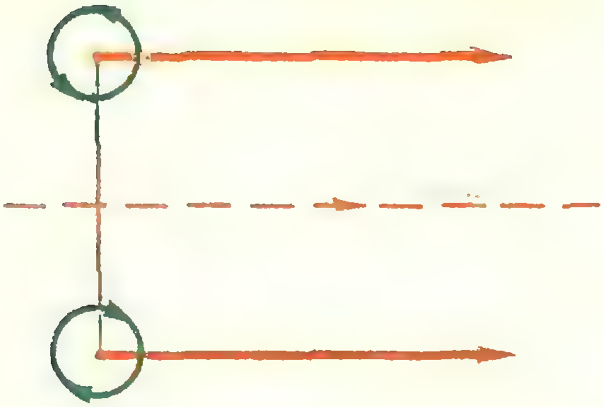


Рис. 5.

равны, то этот центр удалился бы в бесконечную даль, и оба шнура бежали бы вперед по направлению, перпендикулярному к прямой, соединяющей центры, как это видно из рисунка 5.

На рисунке 6 представлены траектории (пути) трех вихревых шнуров, из которых *1* и *2* вращаются против часовой стрелки, а *3* — по часовой стрелке.

Установленное нами понятие о прямом вихревом шнуре, заключенном в весьма широком цилиндрическом сосуде, распространяется на вихревые шнуры, зародившиеся в какой угодно массе жидкости. При этом вихревые шнуры могут разыскиваться с помощью составления циркуляций по замкнутым контурам, как это было пояснено для случая прямого шнура.

Если рассматривается идеальная жидкость без трения, находящаяся под действием сил, удовлетворяющих закону сохранения энергии, то для нее имеет место следующая замечательная теорема: циркуляция скорости, определенная для всякого замкнутого контура в жидкости, не изменяется с передвижением частичек жидкости, образующих контур.

Из этой теоремы следует, что частицы жидкости, образующие вихревой шнур, во все время движения будут образовывать вихревой шнур с тем же напряжением вихря. Никакого нового вихревого шнура в жидкости не может образоваться. Действительно, разыскивая вихревой шнур с помощью составления циркуляций по замкнутым контурам, мы будет находить по всем контурам, которые сначала не охватывали шнура, циркуляцию, равную нулю, а для всех контуров, охватывающих шнур, — прежнюю циркуляцию. Из этого мы должны заключить, что внутри выбранных нами контуров проходит вихревой шнур прежнего напряжения.

Из упомянутой теоремы следует также, что вихревой шнур во все

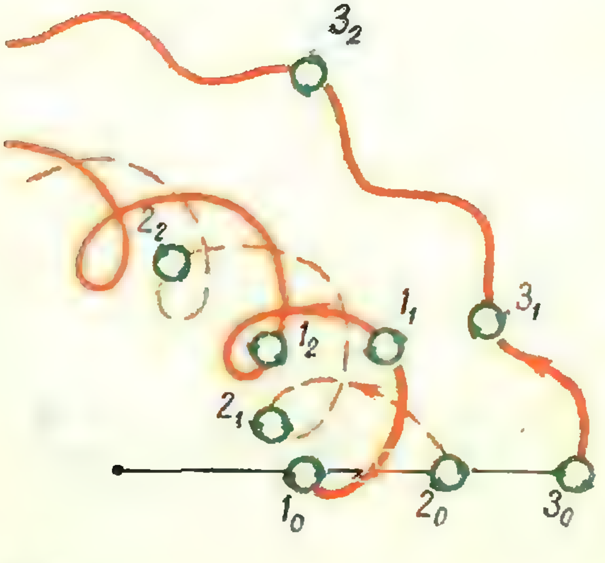


Рис. 6.

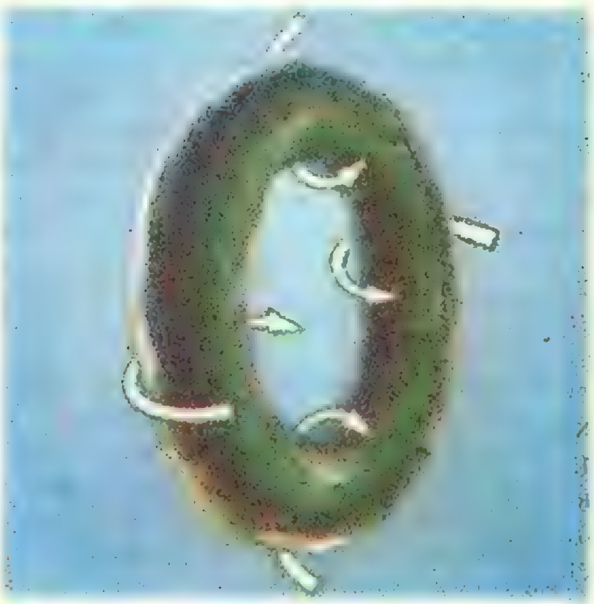


Рис. 7.

время движения либо будет лежать своими концами на границах жидкости (на стенках сосуда или на свободной поверхности), либо будет оставаться замкнутым.

В самом деле, для того чтобы сойти со стенок сосуда, основание вихря должно было бы уменьшиться в размерах до нуля; а так как циркуляция скорости по контуру основания должна оставаться неизменною, то схождение потребовало бы, чтобы скорость крутящейся жидкости у подошвы шнура возросла до бесконечности.

Гидродинамическое давление жидкости уменьшается при возрастании скорости. Поэтому при уменьшении основания вихря на стенке сосуда будет быстро уменьшаться давление в этом месте, и остальная масса жидкости будет надавливать на частицы конца вихревого шнура и препятствовать их схождению со стенки. Вихревой шнур, так сказать, присасывается своими концами к стенкам сосуда. Если конец шнура лежит на свободной поверхности, то подобное присасывание можно заметить по воронке, образующейся на свободной поверхности у «подошвы» шнура.

Если концы вихревого шнура не лежат на границах жидкости, то они должны быть между собою сомкнуты, и таким образом получается замкнутый вихревой шнур,— такой, в котором, так сказать, оба конца присасываются друг к другу.

Самый простой вид замкнутого вихревого шнура представляет вихревое кольцо, показанное на рисунке 7.

Все частицы жидкости, лежащие вне кольца, движутся при этом по замкнутым кривым, проходящим сквозь кольцо так, что циркуляция скорости по всем этим кривым одинакова и равна циркуляции скорости на контуре поперечного сечения кольца. Переходя же внутрь кольца, мы будем получать для траекторий его частичек различные циркуляции. Скорости точек жидкости самые большие на поверхности кольца. Они уменьшаются по мере удаления от этой поверхности внутрь кольца и равны нулю на некоторой осевой линии. Уменьшаются они также и по мере удаления от кольца в окружающую его массу жидкости. Для точек жидкости, значительно удаленных от кольца, скорости обратно пропорциональны кубам расстояния от кольца.

Мы видели, что зародившиеся в жидкой массе два прямых параллельных шнура, около которых жидкость крутится с равными напряжениями вихря в противоположные стороны, будут бежать по направлению, перпендикулярному к проведенной через них плоскости. По той же причине вихревое кольцо не будет оставаться неподвижным, а будет бежать по направлению, перпендикулярному к плоскости кольца, в ту сторону, в которую жидкость вытекает из кольца.

Мы видим на рисунке 7, что частицы жидкой массы, движущейся по верхним замкнутым траекториям, будут надавливать на нижний край кольца и двигать его вправо; точно так же частицы жидкой массы, движущиеся по нижним замкнутым траекториям, будут надавливать на верхний край кольца и тоже двигать его вправо. Все кольцо будет передвигаться равномерно в правую сторону, перенося за собою крутящуюся около него жидкость. Это движение будет тем быстрее, чем более напряжение вихря и чем менее размер кольца.

Мы сказали, что внутри идеальной жидкой массы зародившиеся вихревые шнуры должны всегда сохраняться, и новых шнуров образоваться не может. Между тем в природе мы часто видим зарождение и угасание вихрей. Это происходит оттого, что наши вода и воздух обладают некоторою степенью вязкости, вследствие которой вышеприведенные теоретические результаты несколько видоизменяются. С одной стороны, вихри могут зарождаться (преимущественно

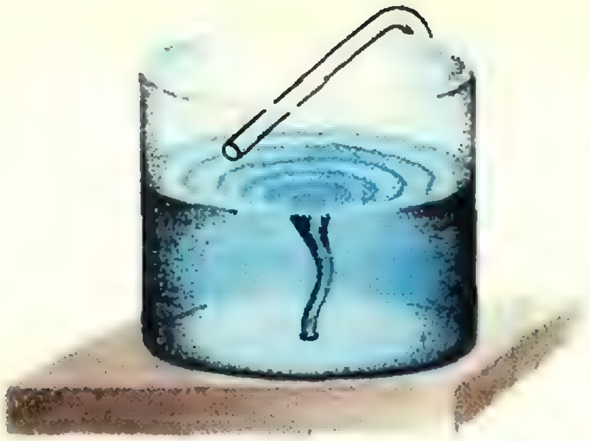


Рис 8

в тех местах, в которых происходит скольжение друг по другу двух слоев жидкости с различными скоростями), с другой стороны, зародившиеся вихри не сохраняются, а постепенно исчезают.

Образование прямых вихрей Гельмгольц демонстрировал одним прекрасным опытом, описанным в его речи о вихревых бурях. Мы здесь повторим этот опыт.

В дне цилиндрического сосуда (рис. 8) сделано небольшое отверстие, заткнутое пробкой. Сосуд наполнен водою. Посредством струй воздуха, направляемых трубкою на один край свободной поверхности воды, приводим жидкость в медленное вращательное движение. Жидкость начинает истекать из отверстия, подходя от краев сосуда к его оси. Так как циркуляции скорости по окружностям, проведенным из точки на оси цилиндра через одни и те же частицы жидкости, не должны изменяться со временем, то с уменьшением радиусов этих окружностей будет возрастать скорость частиц жидкости. Вращение жидкости по мере приближения к оси будет становиться все быстрее и быстрее, и мы заметим резко образовавшийся вихрь, над которым появится воронка, все более и более углубляющаяся.

Я покажу еще образование вихря посредством быстро вращающегося диска.

На рисунке 9 представлен прибор проф. Ф. Н. Шведова. Через дно стеклянного цилиндрического сосуда продета в сальнике вертикальная ось, оканчивающаяся небольшим диском. Эта ось посредством бесконечного ремня может быть приведена в быстрое вращение. В сосуд наливаются вода и масло, которое всплывает поверх воды. Вращая диск, мы заметим, что вода постепенно приходит во вращение и образует над диском вихревой шнур, который замечается по воронке на поверхности раздела воды и масла. Эта воронка заполняется маслом, которое в виде нисходящего смерча спускается к диску. В тот момент, когда масло приходит в соприкосновение с диском, вся его масса разбрасывается по воде.

Еще более интересен способ образования прямых вихрей в воздухе. Воздух, находящийся над поверхностью воды, приводят во вращение с помощью особой быстро вращающейся крылатки, помещенной на некоторой высоте над водою (рис. 10). Воздушный вихрь захватывает по своей оси воду и поднимает ее в виде восходящего смерча до самой крылатки.

Вихревые кольца в воздухе демонстрируются с помощью прибора Тэта. Он состоит из ящика (рис. 11), задняя сторона которого затянута кожею, а в передней сделано отверстие с острыми краями. Форму от-

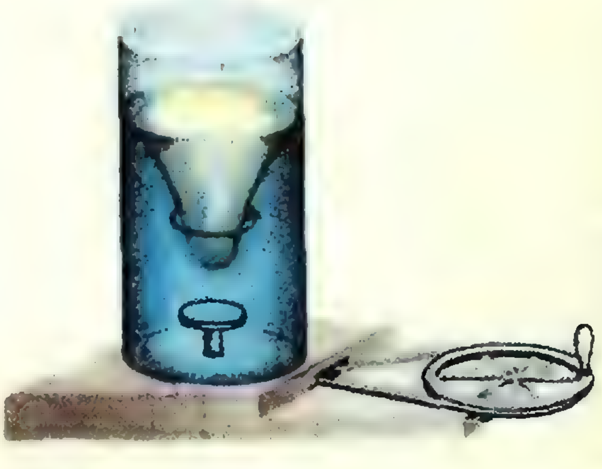


Рис. 9.

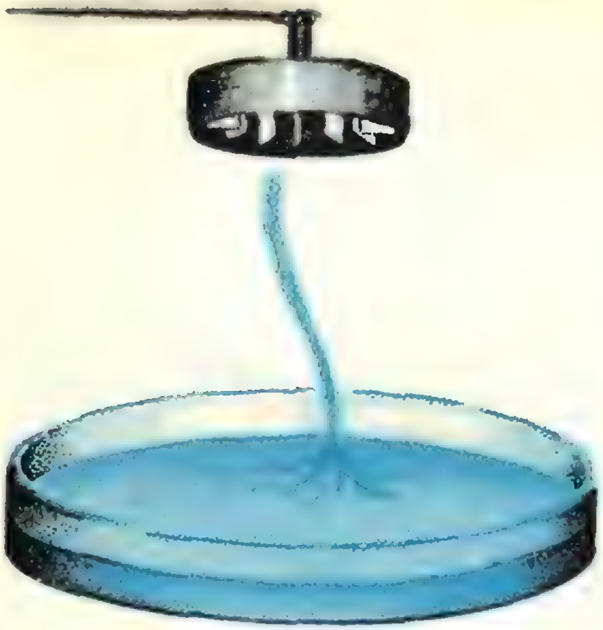


Рис 10

верстия можно по желанию (пользуясь вставными пластинками) делать круглою, эллиптическою, четырехугольною и т. д.

В ящик ставят два сосуда: в один наливают соляную кислоту, а в другой нашатырный спирт. Вследствие этого в нем образуется густой туман от частичек хлористого аммония (нашатыря). Ударяя рукою или деревянным молотком по натянутой коже, мы быстро выталкиваем из ящика массу воздуха вместе с нашатырным туманом. Эта масса, скользя посреди окружающего неподвижного воздуха, увлекает его в вихревое движение, а сама завертывается в вихревое кольцо, которое будет хорошо заметно по наполняющему его туману. При этом понятно, что воздух около кольца будет вращаться так, что наблюдатель, глядящий на отверстие прибора, видит массу воздуха, выбегающую к нему из середины кольца. Из этого следует, что образовавшееся кольцо должно двигаться от отверстия прибора.

Мы показали на рисунках, каково будет взаимодействие нескольких прямолинейных вихрей. Следя за кольцами, выбегающими из прибора Тэта, вы можете усмотреть случаи взаимодействия вихревых колец. Вы видите, что кольца, подбегающие друг к другу боком, взаимно отталкиваются и проходят одно сквозь другое. Этот интересный случай подробно исследован теоретически Гельмгольцем. Он показал, что заднее кольцо должно уменьшаться в размерах и увеличивать свою скорость, а переднее кольцо должно увеличиться в размерах и уменьшать свою скорость. Это будет продолжаться до тех пор, пока заднее кольцо не пройдет сквозь переднее. После этого переднее кольцо делается задним, и явление повторяется. К сожалению, такую игру двух колец приходится наблюдать редко, только при особенно удачном их образовании.

То обстоятельство, что кольцо несет быстро крутящийся около него воздух, мы можем сейчас же обнаружить, направляя его на зажженную свечу. Вы видите, что свеча, стоящая на большом расстоянии от прибора, потухает всякий раз, как пламя ее задевается кольцом. Я помню, что во времена моей юности я задумался над объяснением причины, вследствие которой, стреляя пистоном из пистолета, можно тушить свечу на большом расстоянии. Теперь для меня ясно, отчего это происходит: из дула пистолета выбегает вихревое кольцо, которое может перемещаться довольно далеко не меняясь.

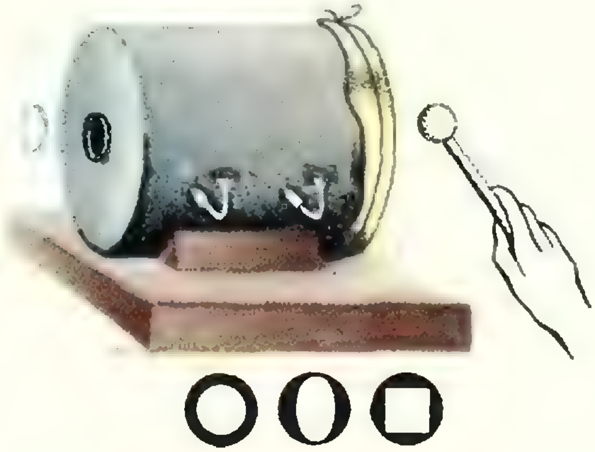


Рис 11

До сих пор кольца выпускались нами из круглого отверстия. Попробуем теперь образовать их из отверстия эллиптического и квадратного. Мы видим, что при этом кольца не сохраняют формы отверстия, но колеблются, стремясь перейти в круглое кольцо, которое является, таким образом, единственной устойчивой формой замкнутого вихревого шнура.

Рассмотрим теперь влияние на вихревые кольца посторонних предметов. Подводя к движущемуся кольцу твердые тела сбоку, мы видим, что они отталкивают кольцо. Но если кольцо бежит на параллельную его плоскости неподвижную плоскость, то оно, подходя к ней, все более и более увеличивается в размерах, так сказать, растекается по плоскости. Если мы дадим кольцу набежать на нож, плоскость которого проходит через ось кольца, то последнее разрежется ножом на два полукольца, концы которых будут скользить по поверхности ножа; но, пройдя эту поверхность, концы опять сомкнутся, и кольцо восстановится.

Кроме дымных колец в воздухе, можно еще наблюдать воздушные кольца в воде. Это интересное явление, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, весьма просто объясняется тем, что вследствие центробежной силы значительно понижается давление на оси вихревого кольца. Если при образовании вихревого кольца мы введем в воду несколько пузырьков воздуха, они сейчас же заберутся в то место жидкости, где давление самое малое, то есть на ось кольца, и будут там удерживаться все время, пока кольцо движется вдоль имеющейся массы воды, несмотря на то, что воздух в 800 раз легче воды.

Я покажу здесь прибор для образования воздушных колец в воде, который представляет видоизменение прибора профессора Осборна Рейнольдса. Здесь имеется (рис. 12) большая стеклянная ванна, наполненная водою. В нее погружена изогнутая под прямым углом широкая стеклянная трубка. На верхний конец трубки, выходящий из воды, надевают рукав из резинового шарика, посредством которого можно вгонять в трубку воздух и выталкивать из нее воду. Быстро сдавливая шарик, выталкиваем из горизонтального колена трубки столбик воды и делаем это так, чтобы воздух почти достиг нижнего конца трубки, но не вышел из нее в большом количестве. Столбик воды, выбежав в спокойную окружающую жидкость, завертывается в вихревое кольцо. При этом вместе с водою будет вытолкнуто несколько пузырьков воздуха. Они, разбившись на мелкие пузырьки, расположатся по оси кольца. Вследствие этих пузырьков вихревое кольцо будет хорошо заметно: оно будет образовано как бы из блестящих зерен бисера. Пробегая вдоль всей ванны, кольца ударяются в противоположную стенку ее и здесь, расширяясь, пропадают.

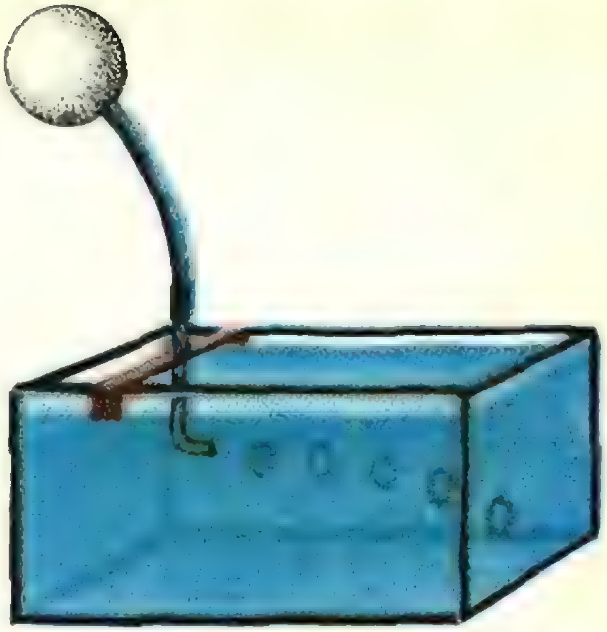


Рис. 12.

Мы можем с помощью нашего прибора отчетливо демонстрировать отражение колец от свободной поверхности воды. Для этого стоит только повернуть трубку, чтобы она направилась своим нижним концом немного вверх. Кольцо, подбежав к свободной поверхности жидкости, от нее отражается, причем угол падения равен углу отражения.

Так как действительные жидкости обладают вязкостью и трутся о стенки тех сосудов, в которых они движутся, они при своем движении постоянно заполняются вихревыми шнурами. Гельмгольц показал, что жидкую массу во всяком воображаемом движении можно рассматривать как непрерывно заполненную вихревыми шнурами, и дал средства исследовать движения этих шнуров.

Краткие сведения об ученых, упоминаемых в лекции Н. Е. Жуковского.

Эйлер — крупнейший математик XVIII века, петербургский академик, один из создателей аналитической механики. Лаплас называл Эйлера отцом современного математического анализа.

Пуансо — французский ученый, математик и механик. Получил в 1834 году изящное геометрическое решение некоторых основных проблем динамики вращения.

Гельмгольц — выдающийся немецкий физик и математик XIX столетия. Прославился, в частности, своими работами по акустике (резонаторы Гельмгольца) и по термодинамике. Он же является основателем теории вихрей.

Коши — французский ученый конца XVIII — первой половины XIX века, который по праву считался одним из создателей современной математики. Оставил свыше 800 мемуаров по самым разным разделам математики.

Шведов В. Ф. — профессор Одесского университета, известный специалист по гидродинамике вязкой жидкости (вторая половина XIX века).

Тэт — профессор физики в Эдинбурге (Англия, вторая половина XIX века).

Рейнольдс — профессор Оуэновского колледжа в Манчестере (Англия, вторая половина XIX века). Прославился работами по гидродинамике.

(Окончание. Начало см. на стр. 20.)

2. 28 надо разделить на 59. $5+1=6$.

$$-\begin{array}{r|l} 28 & 6 \\ \cline{2-2} 24 & 4 \\ \hline 4 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 44 & 6 \\ \cline{2-2} 42 & 7 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 27 & 6 \\ \cline{2-2} 24 & 4 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 34 & 6 \\ \cline{2-2} 30 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Итак, $\frac{28}{59}=0{,}4745\ldots$

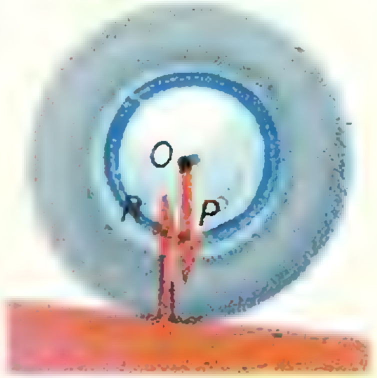
Данный способ деления проще общепринятого и его легче выполнять. Он был предложен немецким математиком Г. Шпитцером в 1847 году. Но вскоре о нем позабыли.

Г. Д. Новинский

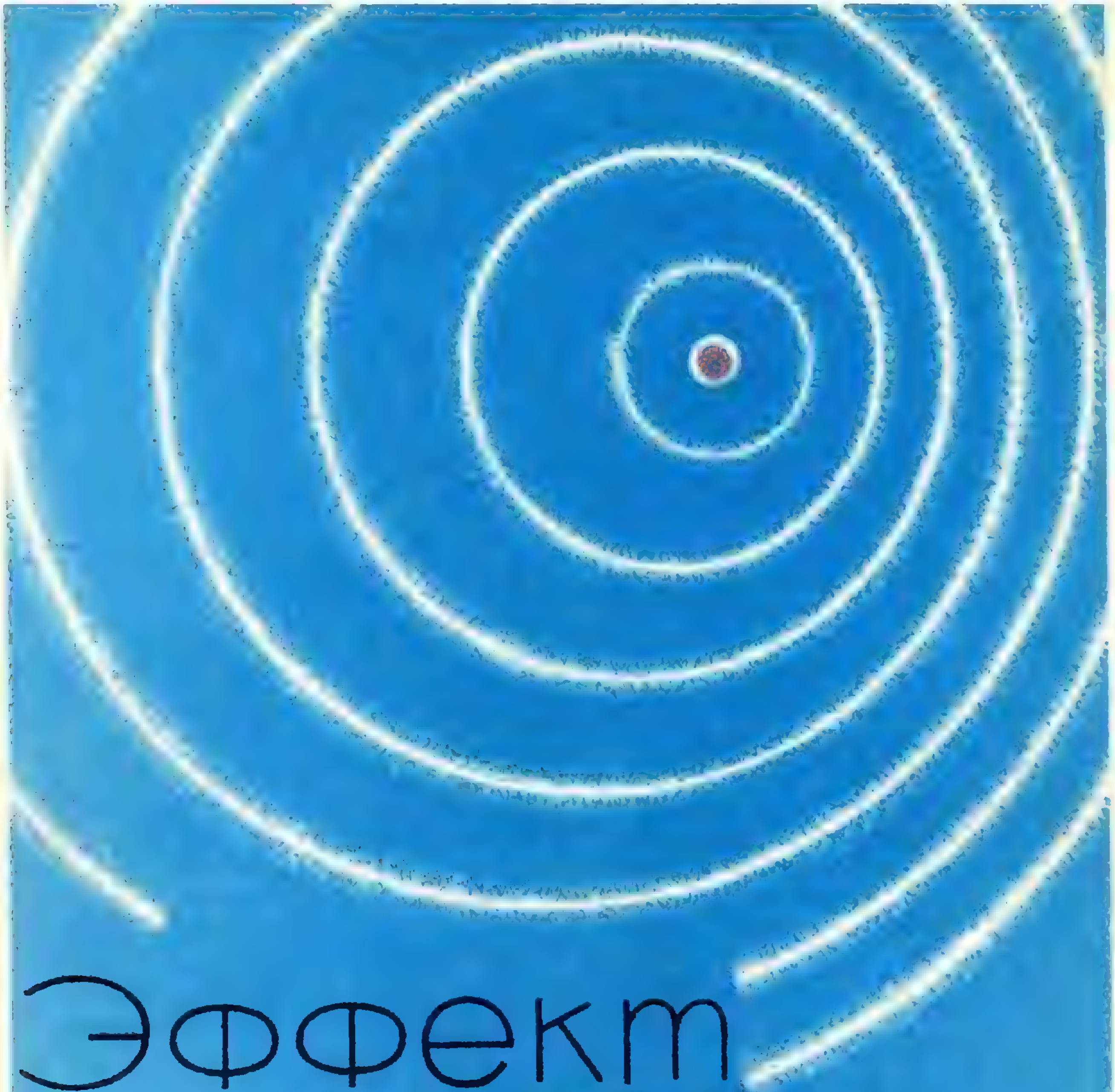
ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

1. Колесо катится вниз по чуть-чуть наклонной плоскости. Так как движение колеса сопровождается энергетическими потерями в точке контакта с плоскостью, то даже при отсутствии сопротивления воздуха колесо, начиная с некоторого момента, будет катиться равномерно. Отсюда следует, что сила **R**, с которой плоскость действует на колесо, должна быть направлена вверх и равняться силе тяжести **P**. Но тогда сила **R** будет создавать вращающий момент относительно центра *O*, и следовательно, колесо будет вращаться не равномерно, а ускоренно.

Разберитесь с противоречием.



(*Продолжение см. на стр. 34.*)



Эффект
ДОПЛЕРА

Л. Г. Асламазов

В известном анекдоте о знаменитом физике Роберте Вуде рассказывается, что когда автомобиль Вуда проехал перекресток на красный свет и его остановили, Вуд объяснил полиции свою ошибку эффектом Доплера: для движущегося наблюдателя частота света источника меняется и сигнал светофора показался ему зеленым. Говорят, что полицейский оказался не профаном. Он знал, что заметное изменение частоты могло произойти только при очень большой скорости автомобиля, близкой к скорости света. Поэтому полицейский не стал спорить со знаменитым физиком и просто оштрафовал его за превышение скорости. И хотя эта поучительная история может навсегда отбить охоту объяснять что-либо в нашей жизни эффектом Доплера, тем не менее с этим эффектом, по-видимому, встречался каждый. Когда нас обгоняет гудящий поезд или над нами пролетает самолет, то мы слышим внезапное изменение тона звука. Это — тоже эффект Доплера.

Почему же происходит изменение частоты звука движущегося источника? Попробуем разобраться. Нарисуем картину волн, испускаемых движущимся источником. Скорость распространения звука в среде не зависит от скорости источника, и картина волн будет представлять собой множество окружностей, центры которых смещаются в направлении движения источника (рисунок в начале статьи). Пусть теперь наблюдатель стоит, например, за источником, так что источник удаляется от него со скоростью v. Предположим, что вначале расстояние между источником и наблюдателем было равно u, (u — скорость распространения звука). Тогда через 1 секунду расстояние между ними будет $u+v$ и на этом расстоянии уместятся все ω максимумов, созданных источником за единицу времени (ω — частота звука). До наблюдателя за 1 секунду дойдут только те максимумы, которые были вначале на расстоянии u от него. Поэтому и частота звука ω_1, воспринимаемого наблюдателем, будет меньшей, причем

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{u}{u+v}, \text{ откуда } \omega_1 = \omega\frac{1}{1+\frac{v}{u}}$$

Если источник приближается к приемнику, то аналогично получаем

$$\omega_1 = \omega\frac{1}{1-\frac{v}{u}}$$

Если движется не источник, а приемник звука, качественно происходит такое же изменение частоты, но в количественном отношении результат будет несколько иной. Если приемник движется к источнику со скоростью v, то за 1 секунду он пройдет не мимо ω, а мимо большего числа максимумов ω_2, причем $\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{u+v}{u}$, откуда $\omega_2 = \omega\left(1+\frac{v}{u}\right)$.

Если приемник удаляется от источника, то он отметит меньшую частоту

$$\omega_2 = \omega\left(1-\frac{v}{u}\right).$$

Это изменение частоты при движении источника или приемника и называется эффектом Доплера. Считая в обоих случаях v положительным, когда расстояние увеличивается, мы можем написать

$$\omega_1 = \frac{1\omega}{1+\frac{v}{u}}, \quad \omega_2 = \omega\left(1-\frac{v}{u}\right).$$

Если скорость источника мала по сравнению со скоростью звука, то, пользуясь формулами приближенных вычислений, можно $\frac{1}{1+\frac{v}{u}}$ приблизительно заменить на $1-\frac{v}{u}$ *), и тогда $\omega_1\approx\omega_2$. Однако в современной

---

*) Проверьте это, например, для $\frac{u}{v} = 0{,}01$, $0{,}05$; $0{,}1$, $0{,}2$

технике нередко скорость источника или приемника совсем не мала по сравнению со скоростью звука (например, скорость самолетов), и тогда эффект Доплера в обоих случаях существенно разный.

Теперь, когда мы разобрались в эффекте Доплера для звуковых волн, казалось бы нет ничего проще, чем написать аналогичные формулы для света,— достаточно вместо скорости звука *u* поставить всюду скорость света *c*, и ответ готов. Однако тут мы сталкиваемся с удивительным обстоятельством: такие формулы не могут быть правильными, так как они противоречат принципу относительности Галилея.

Согласно этому принципу нельзя отличить равномерное прямолинейное движение от состояния покоя, иными словами, любые физические явления должны протекать одинаково и любые физические опыты должны дать одинаковый результат во всех системах координат, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями (то есть в инерциальных системах). Мы же можем рассмотреть, например, случай движущегося источника и неподвижного наблюдателя в системе отсчета, движущейся вместе с источником, и тогда по нашим формулам изменение частоты света в обеих системах было бы разным.

При распространении звука это обстоятельство не должно нас смущать. Ведь здесь, кроме источника и приемника, играет роль среда, в которой распространяется звук. Движение источника к приемнику и приемника к источнику дает разные результаты именно потому, что в первом случае источник движется в среде, а приемник покоится относительно среды, во втором случае источник покоится относительно среды, а приемник движется в ней. Это, конечно, разные опыты, и поэтому, естественно, они дают разные результаты. Равенство $\omega_1 \approx \omega_2$ лишь приближенное *). Но свет-то распространяется в вакууме, и поэтому там такого быть не может. И, насколько бы он вам ни показался парадоксальным вначале, выход из этого положения один: надо предположить, что собственная частота источника ω различна в тех случаях, когда он движется и когда он покоится, из-за релятивистского (так его называют в теории относительности) сокращения времени.

Теория относительности Эйнштейна, учитывающая это сокращение времени, дает правильные формулы для эффекта Доплера. Эти формулы сейчас уже подтверждены многочисленными экспериментами, и эффект Доплера служит мощным орудием исследования окружающего нас мира. И как это ни поразительно, именно то его проявление, в применении к которому он был высказан впервые более ста лет тому назад профессором венского университета Христианом Доплером (он утверждал, что свет, испускаемый звездой, удаляющейся от нас, должен смещаться к красному концу спектра), явилось важным доказательством одного из самых интересных результатов современной физики —вывода о том, что наша Вселенная непрерывно расширяется.

---

*) Точнее сказать так: $\omega_1 = \omega_2$ с точностью до членов первого порядка (то есть членов $\frac{v}{c}$ в первой степени)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

М76. В компании из n человек каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. Докажите, что в этой компании каждый знаком с одинаковым числом людей.

М77. Длины двух сторон треугольника 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

Н. Б. Васильев

М78. Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно представить в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где x и y — целые неотрицательные числа, и что такое представление единственно.

М79. Две точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

И. Ф. Шарыгин

М80. В таблице $m \times n$ расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

А. С. Шварц

Ф88. Сосуд, частично заполненный ртутью, движется с горизонтальным ускорением, вследствие чего поверхность ртути наклонена к горизонту под некоторым постоянным углом.

Сверху сосуд закрыт крышкой.

Как изменится этот угол, если сосуд доверху заполнить водой?

Ф89. Напряженность электрического поля в электромагнитной волне частоты $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ *сек*$^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$, меняется со временем по закону $E = a\,(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$, где a — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W = 13{,}5$ *эв*.

Атом поглощает монохроматический свет частоты f порциями (квантами) энергии, равными $\hbar f$, где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* — постоянная Планка.

А. Д. Гладун,
Л. Г. Асламазов

Ф90. Идеальный газ массы m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молекулярный вес газа μ.

Ф91. Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для это-

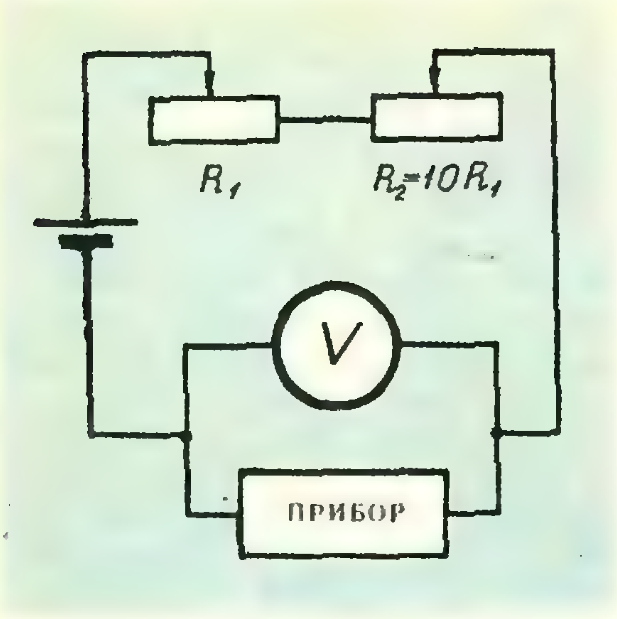


Рис. 1.

го используются два реостата, соединенных так, как показано на рисунке 1. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее? Во сколько раз точность установки напряжения будет больше, чем в том случае, когда используется лишь один реостат? Как включить реостаты, если для питания приборов нужно устанавливать поточнее не напряжение, а ток?

Ф92. Обруч массы m стоит на доске массы M (рис. 2). Коэффициент трения между доской и обручем k. Доска лежит на гладком столе. С каким ускорением будет двигаться доска, если обруч тянуть с силой F?

С. Н. Доможаков

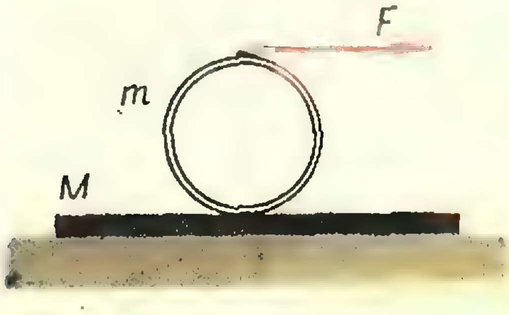


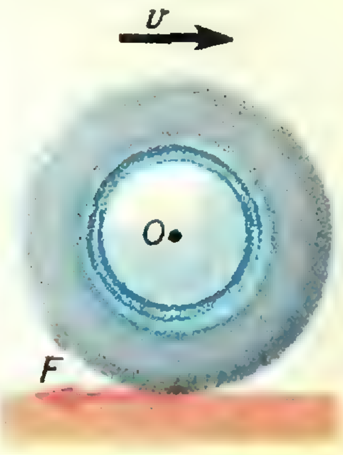
Рис. 2

ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

(Продолжение. Начало см на стр. 29.)

2. По горизонтальной плоскости катится колесо. Так как сила трения F направлена влево, то скорость колеса будет уменьшаться. Но момент этой силы относительно центра O направлен по часовой стрелке, и следовательно, скорость вращения колеса должна увеличиться.

Как будет меняться скорость колеса?



3. Когда шофер нажимает тормозную педаль, колодки тормозов прижимаются к колесам и замедляют их вращение. Но силы взаимодействия колес и тормозных колодок являются внутренними и, следовательно, не могут уменьшить скорость автомобиля. Почему же автомобиль останавливается?

4. Как известно, силой, движущей поезд, является сила трения паровозных колес о рельсы, а сила трения между рельсами и колесами вагонов является тормозящей. Но колеса паровоза и вагонов сделаны из одного и того же материала, а вес вагонов гораздо больше веса паровоза.

Почему же паровоз в состоянии двигать состав?

(Окончание см. на стр. 42.)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М28—М30

М28

(Продолжение решения, см «Квант» № 3, стр. 33). Напомним, что через $f_1(n)$ мы обозначили наименьшее целое число, большее или равное $\log_2 n$ (оно равно наименьшему числу проверок, за которое можно выбрать **один** радиоактивный шар из n), через $f_2(n)$ — наименьшее число проверок, за которое можно выбрать **два** радиоактивных шара из n.

На рисунке 1 приведен способ, позволяющий выделить 2 шара из 7 за 5 проверок.

Утверждение задачи М28а) состоит в том, что $f_2(19) \leqslant 8$ (верное решение этой задачи прислал нам восьмиклассник *В. Кривицкий* из д. Клетное Минской обл.); М28 б) эквивалентно тому, что $f_2(11) \geqslant 7$. Ниже мы очень коротко докажем, что $f_2(6) \geqslant 5$;

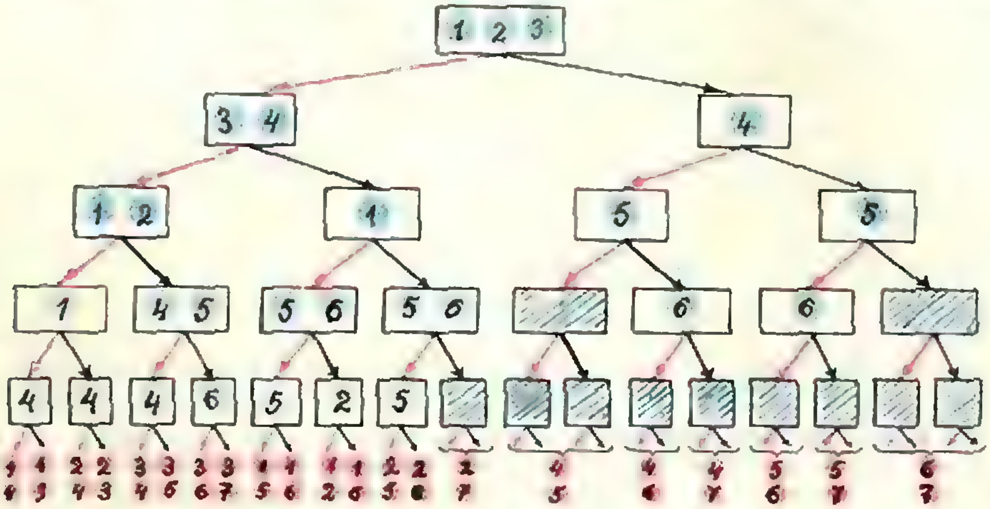


Рис 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\frac{n(n-1)}{2}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300
$f_1(n)$	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9
$f_2(n)$	2	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9

$f_2(8) \geqslant 6$; $f_2(11) \geqslant 7$; $f_2(10) \leqslant 6$; $f_2(15) \leqslant 7$; $f_2(21) \leqslant 8$. Читатели, которые хотят убедиться в том, что все числа в нижней строке таблицы на стр. 35 верны, должны будут доказать, кроме того, что $f_2(16) \geqslant 8$; $f_2(22) \leqslant 8$; $f_2(23) \geqslant 9$; $f_2(25) \leqslant 9$ (действительно, ясно, что функция f_2 неубывающая, то есть если $m > n$, то $f_2(m) \geqslant f_2(n)$, поэтому достаточно правильно указать те значения n, для которых $f_2(n+1)$ строго больше $f_2(n)$.

Прежде чем доказывать обещанные неравенства, заметим, что определение точного значения $f_2(n)$ для любого n в этой задаче, как и во многих других похожих задачах, не слишком интересно. Дело в том, что соответствующий способ выделения шаров, по-видимому, очень сложен. С другой стороны, легко указать совсем простые алгоритмы выделения шаров, требующие лишь ненамного большего, чем $f_2(n)$, числа проверок. Например, если сначала выбрать один радиоактивный шар, затем выбросить его и из оставшихся выбрать другой, то на это уйдет не более $f_1(n)+f_1(n-1)$ проверок, и, как нетрудно показать, разность $f_1(n)+f_1(n-1)-f_1(C_n^2)$ всегда не больше 2, следовательно, разность $f_1(n)+f_1(n-1)-f_2(n)$ тоже не больше 2. В практических задачах, подобных этой, если само число проверок k не слишком мало, одна или две лишние проверки скорее всего не будут играть особой роли, лишь бы способ проверки был попроще (скажем, для $n=15$ мы уже не можем уместить на журнальной странице диаграмму, подобную рисунку 1, и разобраться в описании способа проверки становится нелегко).

Ниже мы используем такие обозначения: знак «—» обозначает, что в проверяемой кучке нет радиоактивных шаров, а знак «+» — что они есть.

За 4 проверки нельзя выделить 2 шара из 6

Пусть первой проверяется кучка из $6-q$ шаров, где $q=2$, 3, 4 или 5. Тогда исходу «—» соответствует C_q^2 вариантов (оба радиоактивных шара среди q остальных), исходу «+» — $(C_6^2-C_q^2)$ вариантов. Одно из этих чисел больше $2^3=8$.

За 5 проверок нельзя выделить 2 шара из 8

Если

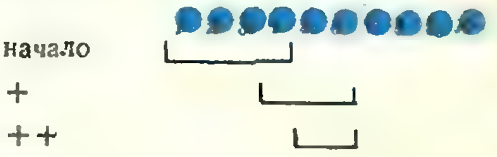
$$C_q^2 < 2^4 = 16 \text{ и } C_8^2 - C_q^2 < 16,$$

то q может быть равно только 6. Если исход «—», то при этом осталось выделить 2 шара из 6, что невозможно за 4 проверки.

За 6 проверок нельзя выделить 2 шара из 11

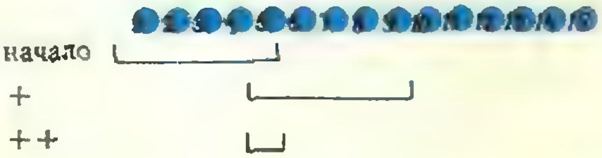
Если $C_q^2 < 2^5 = 32$ и $C_{11}^2 - C_q^2 < 32$, то $q=8$, но $f_2(8) \geqslant 6$.

За 6 проверок можно выделить 2 шара из 10



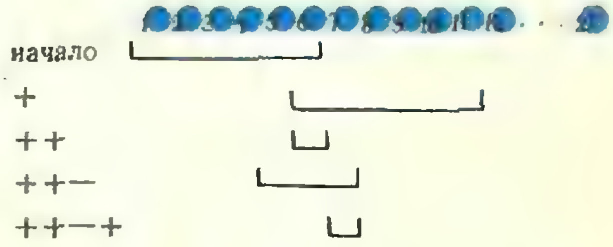
Первая проверка — кучка из 4 шаров $\{1-4\}$. «—» за 5 проверок 2 шара из 6 $\{5-10\}$. «+» проверяем $\{4-6\}$. «+—» за 4 проверки 2 шара из 7 $\{1-3, 7-10\}$, если известно, что $\{1-3\}$ дают «+» (см. левую половину рис. 1). «++» проверяем $\{5, 6\}$. «++—» за 3 проверки 1 шар из $\{1-3, 7-10\}$. «+++» за 1 проверку 1 шар из $\{5, 6\}$ и за 2 — 1 из $\{1-4\}$.

За 7 проверок можно выделить 2 шара из 15



Первая проверка $\{1-5\}$. «+» проверяем $\{5-9\}$. «+—» за 5 проверок 2 шара из 10 $\{1-4, 10-15\}$, среди которых $\{1-4\}$ дают «+» (см. 10 шаров, «+»). «++» проверяем $\{5\}$. «+++» за 4 проверки 1 из $\{1-4, 6-15\}$. «++—» за 2 проверки 1 из $\{1-4\}$ и за 2 проверки 1 из $\{6-9\}$.

За 8 проверок можно выделить 2 шара из 21



Первая проверка $\{1-6\}$. Кроме обозначенных на рисунке и очевидных проверок, укажем такие «+—» за 6 проверок 2 из 15 $\{1-5, 12-21\}$, среди которых $\{1-5\}$ дают «+» (см. 15 шаров, «+»). «++———» за 2 проверки 1 из $\{1-4\}$ и за 2 проверки 1 из $\{8-11\}$.

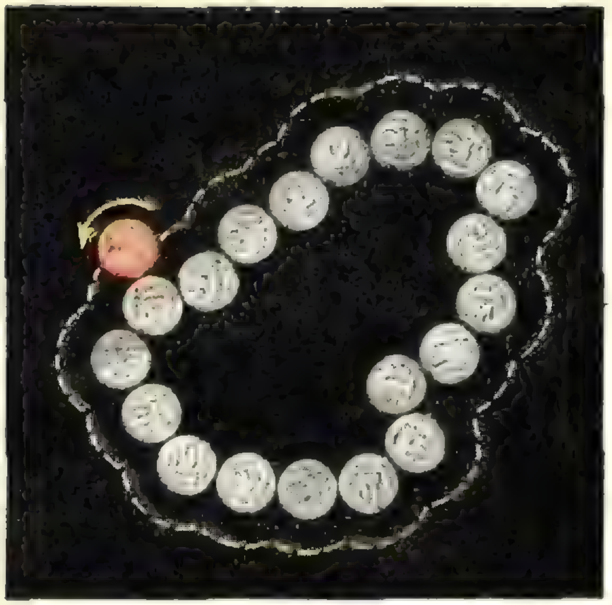


Рис. 2.

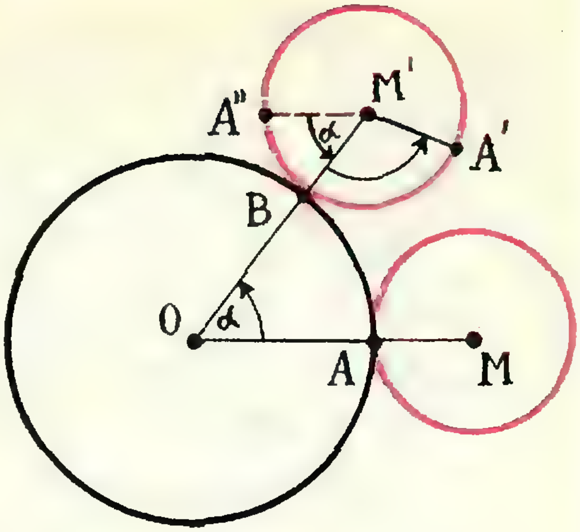


Рис. 3.

М29

n одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (см. рис. 2). Сколько оборотов сделает монета такого же размера за то время, пока она один раз обкатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке?

Как изменится ответ, если монета M будет иметь радиус, в k раз отличающийся от радиуса каждой из монет в цепочке?

Примем радиус монет, составляющих цепочку, за единицу. Из рисунка 3 видно, что за то время, пока монета радиуса k прокатится по дуге α неподвижной окружности радиуса 1, она повернется на угол $\alpha\,(1+{}^1/k)$: на этом рисунке радиусы MA и $M'A''$ параллельны, $\angle A''M'B=\angle AOB=\alpha$ и, поскольку дуги $\overset{\frown}{A'B}$ и $\overset{\frown}{AB}$ равны по длине, $\angle BMA'=\alpha/k$, следовательно, весь угол $\angle A''MA'$, на который повернулась монета M, равен $\alpha+\alpha/k$ (в частности, при $k=1$ этот угол равен 2α).

Теперь найдем сумму дуг, состоящих из таких точек неподвижных монет, которых монета M касалась при качении по цепочке. Пусть O_1, $O_2,\ldots$ $\ldots, O_n$ — центры монет цепочки. Сумма дуг, лежащих внутри многоугольника $O_1O_2\ldots O_n$, равна сумме его внутренних углов, то есть $\pi\,(n-2)$. Сумма дуг, лежащих вне многоугольника, следовательно, равна $2\pi n-\pi\,(n-2)=$ $=\pi\,(n+2)$. Из нее нужно вычесть еще

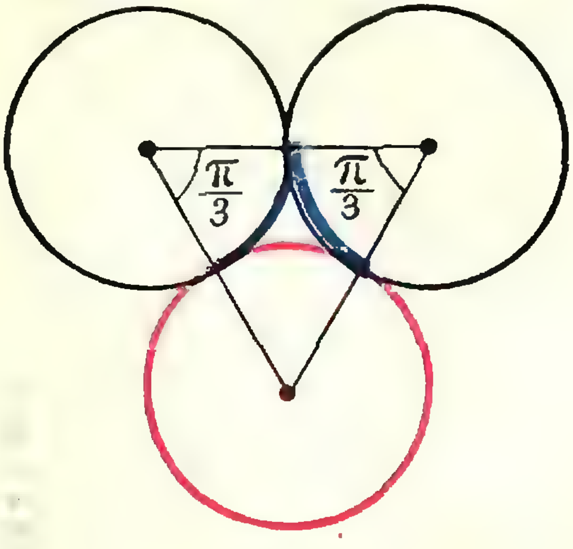


Рис. 4, *а*.

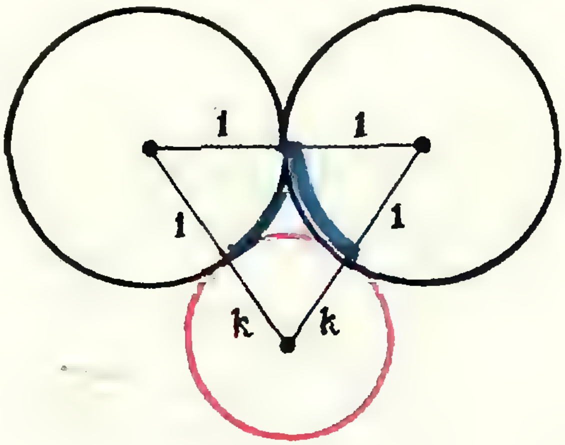


Рис. 4, *б*.

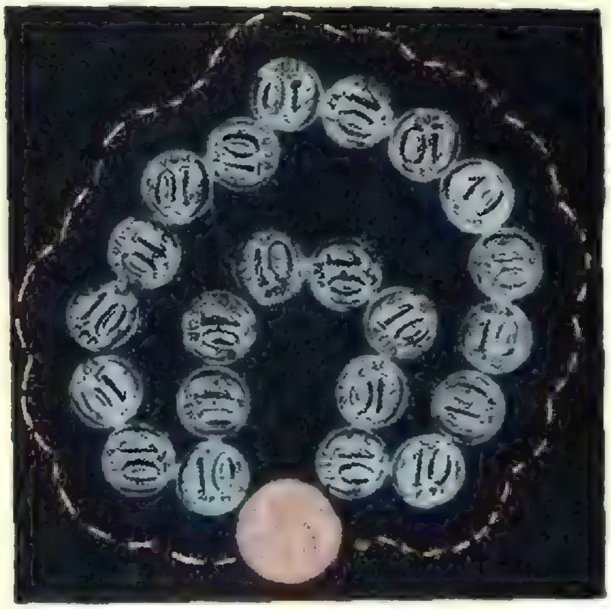


Рис. 5.

сумму дуг, лежащих в углублениях между двумя соседними монетами, в которые M не попадает. В каждом из n углублений сумма двух таких дуг равна $2\pi/3$ при $k=1$ (рис. 4a) и $2\arccos\frac{1}{k+1}$ в общем случае (рис. 4, $б$). Итак, сумма дуг, по которым прокатится монета M, равна $\pi(n+2)-2\pi n/3$ (в общем случае $\pi(n+2)-2n\arccos\frac{1}{k+1}$). Чтобы узнать искомое число оборотов, нужно умножить эту величину на 2 (в общем случае, на $1+1/k$) и разделить на 2π.

Ответ. $\left(\frac{n}{3}+2\right)$ оборота при $k=1$;

$$\frac{k+1}{2k}\left(n-\frac{2}{\pi}n\arccos\frac{1}{k+1}+2\right)$$

оборота в общем случае ($n\geqslant 3$).

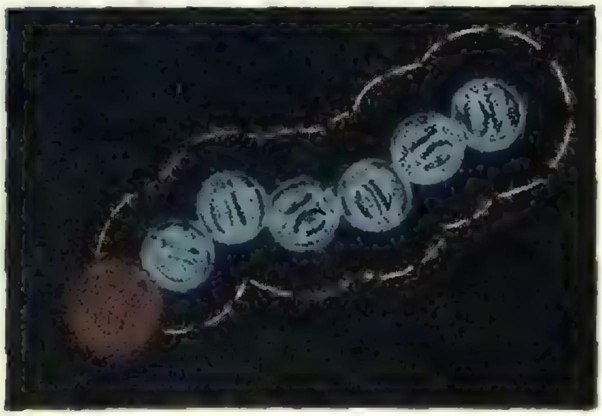


Рис. 6.

В этом решении мы использовали (подсчитывая «потери» в углублениях между монетами) то, что монета M прокатывается *по всем n монетам подряд, без исключения*. Как правильно заметил читатель А. *Вировлянский* из Горького, приславший нам решение, это условие необходимо для того, чтобы задача имела определенный ответ. Для цепочек с «узкими просветами» (см. рис. 5), разумеется, нельзя только по числу n узнать, на сколько повернется монета M. Достаточным, но не необходимым условием, чтобы задача была разрешимой, является следующее: *многоугольник $O_1, O_2 \ldots O_n$ выпуклый*.

Подумайте, как получить ответ, если вместо замкнутой цепочки имеется просто одна монета, две касающиеся друг друга монеты и вообще незамкнутая цепочка из n монет $O_1,\ldots,O_n$, в которой O_k касается O_{k+1}, расположенных так, что M может прокатиться туда и обратно по всем монетам в таком порядке:

$O_1, O_2,\ldots,O_{n-1}, O_n, O_{n-1},\ldots,O_1$ (рис. 6)

(Указание. Достаточно в написанных выше формулах заменить n на $2n-2$.)

М30

Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

Нам понадобится следующая очевидная лемма.

Если два круга диаметров d_1 и d_2 пересекаются (имеют общую точку), то их можно заключить в один круг диаметра не больше d_1+d_2 (рис. 7, a, $б$).

Построим круг с центром в каждой из данных N точек, имеющий радиус a (a несколько больше $^1/_2$; точнее значение a выберем ниже). Если среди этих кругов окажутся пересекающиеся, то, пользуясь леммой, заменим какие-либо два пересекающихся круга (все равно какие) одним покрывающим их кругом. Если среди полученных кругов еще есть пересекающиеся, снова воспользуемся леммой, и т. д. Пусть вообще есть какая-то система кругов, которые: 1) покрывают все данные точки вместе с кругами радиуса a с центрами в этих точках и 2) имеют сумму диаметров не больше $N\cdot 2a$. Тогда если среди них есть пересекающиеся, то мы мо-

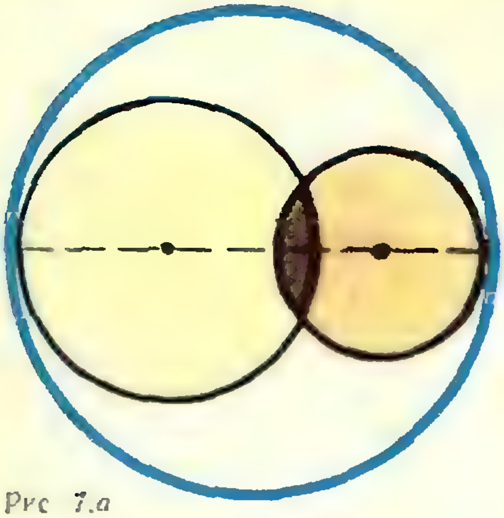


Рис. 7,а

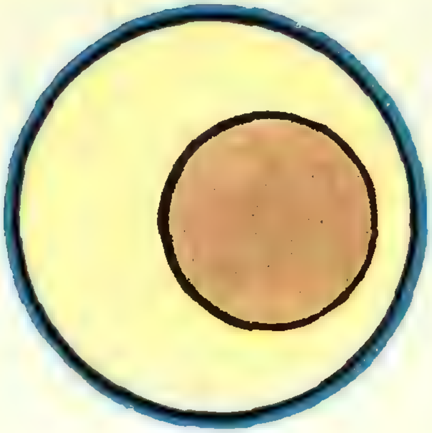


Рис. 7,б

жем воспользоваться леммой и построить новую систему из меньшего количества кругов, удовлетворяющую тем же условиям 1), 2), и так до тех пор, пока мы не получим такой системы из k кругов, никакие два из которых не пересекаются.

Уменьшим теперь радиус каждого из этих k кругов на величину b, оставив их центры на месте (b больше $^1/_2$ и меньше a; точное значение b указано ниже). Тогда полученные k кругов:

1) содержат все данные точки,

2) имеют сумму диаметров не больше $N \cdot 2a - k \cdot 2b \leqslant 2Na - 2b$,

3) отстоят друг от друга не меньше чем на $2b$.

Ясно, что если выбрать a и b так, чтобы выполнялись неравенства $b < a$; $2Na - 2b < N$, $2b > 1$, то все требования задачи будут удовлетворены. Достаточно было, например, взять с самого начала $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$ и $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4N}$.

Разумеется, такие a и b понадобились только потому, что в условии требуется удовлетворить строгим неравенствам: сумма диаметров меньше N, расстояния между кругами больше 1. Если бы мы взяли просто $a = b = {}^1/_2$, то было бы доказано, что наши N точек можно покрыть (при некотором k) k кругами так, чтобы расстояние между кругами было не меньше 1, а сумма их диаметров — не больше $N - k$. Заметим, что поскольку это утверждение доказывается для любой единицы измерения, то (выбрав эту единицу несколько меньше) из него можно легко получить и утверждение, сформулированное в задаче.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф41—Ф47 *)

Ф41

Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что освещенная полусфера Луны равномерно рассеивает свет в пространство.

Радиус Луны принять равным 2000 *км*, а расстояние от Луны до Земли 400 000 *км*.

Так как расстояния от Солнца до Земли и Луны велики по сравнению с диаметром Солнца, то при расчетах мы можем считать, что Солнце — это точечный источник света, равномерно излучающий световую энергию во все пространство. Примем, что сила света этого источника, то есть энергия, излучаемая Солнцем в единичный телесный угол за 1 секунду, равна I. Тогда освещенность поверхности Земли в яркий солнечный день будет равна $E_c = \frac{I}{L^2}$, где L — расстояние от Солнца до Земли.

Луна освещает Землю отраженным солнечным светом. Так как расстояние от Солнца до Луны можно принять равным расстоянию от Солнца до Земли, то освещенность поверхности Луны в полнолуние тоже равна $\frac{I}{L^2}$. На всю поверхность Луны попадает световая энергия

---

*) Решение задачи Ф43 будет опубликовано в «Кванте» № 5

$$W = \frac{I}{L^2}\pi r^2.$$

Так как эта энергия рассеивается затем равномерно по всем направлениям по «полусфере», то в единичный телесный угол излучается энергия

$$I_л = \frac{I\pi r^2}{L^2 \cdot 2\pi}$$

(полный телесный угол равен 4 π, половина — 2π). Теперь легко найти освещенность поверхности Земли в полнолуние. Считая Луну точечным источником с силой света $I_л$, получим

$$E_л = \frac{Ir^2}{2L^2l^2},$$

где l — расстояние от Луны до Земли.

Отношение освещенностей Земли в полнолуние и в солнечный день равно

$$\frac{E_л}{E_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{1}{80\,000}.$$

Ф42

Канат перекинут через блок, причем часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найти скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола равна h (рис. 8).

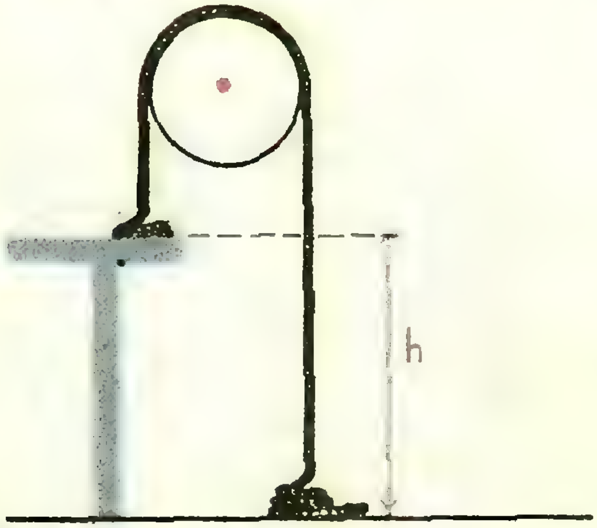


Рис. 8.

Проще всего решить задачу, воспользовавшись вторым законом Ньютона.

За время Δt в движение вовлекается кусок каната длиной $\Delta l = v\Delta t$. Если массу единицы длины каната обозначить μ, то масса куска каната Δl равна $\Delta m = \mu\Delta l = \mu v\Delta t$. Массе Δm каната за время Δt сообщается импульс (количество движения), равный $\Delta mv = \mu v^2\Delta t$. Ясно, что это изменение импульса появляется благодаря разности сил тяжести, действующих на левую и правую части каната. Эта разность равна mgh.

В соответствии со вторым законом Ньютона мы можем записать

$$\mu v^2\Delta t = \mu gh\Delta t.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{gh}.$$

Правильное решение прислали *Н. Ежов* из Одессы и *А. Викторов* из Тулы.

Ф44

Два дельфина плывут навстречу друг другу. Один из них издает звук частоты ω. Какой частоты звук слышит другой дельфин, если скорости дельфинов относительно воды одинаковы и равны v? Скорость звука в воде u.

Воспользовавшись результатом, полученным в статье «Эффект Доплера», найдем, что второй дельфин будет слышать звук с частотой

$$\omega_2 = \omega\frac{u+v}{u-v}.$$

Действительно, так как первый дельфин движется, то частота звуковых волн, которые принимал бы неподвижный приемник впереди него, равна

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1-\frac{v}{u}} = \frac{\omega u}{u-v}.$$

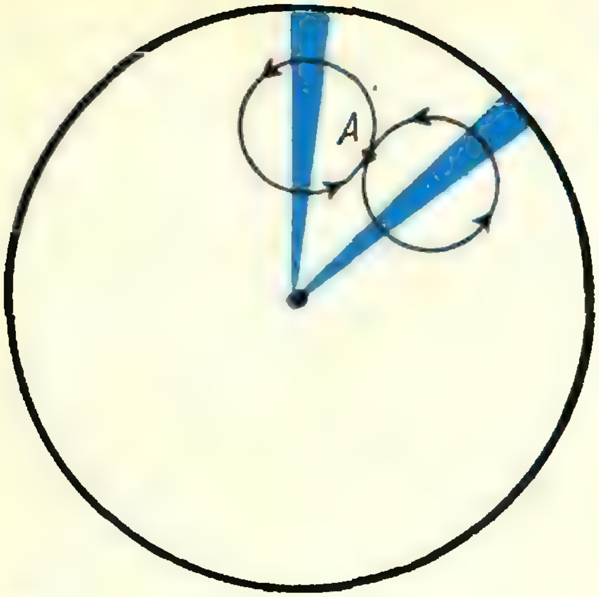


Рис. 9.

Благодаря движению второго дельфина он слышит звук с частотой

$$\omega_2 = \omega_1\left(1 + \frac{v}{u}\right) = \omega_1\,\frac{u+v}{u} = \omega\,\frac{u+v}{u-v}.$$

Ф45

Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Выделим в изоляторе узкий конический «проводник». Ясно, что для любой точки A (рис. 9) мы всегда сможем найти другой конический «проводник», такой, что идущий по нему ток создаст в точке A поле, напряженность которого равна напряженности поля тока выделенного нами «проводника» и имеет противоположное направление. Это означает, что магнитное поле токов разряда между сферами равно нулю.

Ф46

На мячик с высоты 1 *м* падает кубик, подскакивающий затем почти на 1 *м*. На какую высоту подскакивает мячик?

На какую высоту подпрыгнет мячик, если на него с высоты 1 *м* упадет точно такой же мячик?

В тот момент, когда кубик отрывается от мяча, скорость кубика равна скорости верхней точки мяча. Обозначим эту скорость v. Далее кубик движется свободно. Поэтому, записав для него закон сохранения энергии

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh$$

(h — высота подъема), найдем, что

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Скорость нижней точки мяча в тот момент, когда кубик отрывается от него, равна нулю, а значит скорость центра мяча равна $\frac{v}{2}$. Записав для мяча закон сохранения энергии

$$\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = mgh_1,$$

где h_1 — высота подъема кубика, найдем

$$h_1 = \frac{h}{4} \approx 25 \textit{ см}.$$

Разберитесь сами как будет происходить столкновение мячиков.

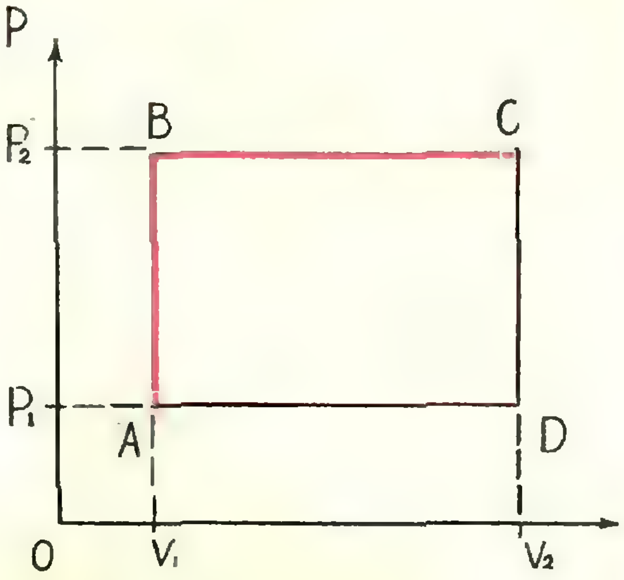


Рис. 10.

Ф47

Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 1), газу сообщается количество тепла Q. Какое количество тепла сообщается газу при процессе ADC?

Тепло, которое сообщается газу, идет на увеличение его внутренней энергии W и на работу, совершаемую при расширении газа. Так как начальное и конечное состояния, а значит, и температуры газа одинаковы при обоих процессах, то одинаковы и изменения внутренней энергии газа. Что же касается работы, совершаемой при расширении газа, то в первом случае она равна $P_2(V_2-V_1)$, а во втором: $P_1(V_2-V_1)$.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$Q=W+P_2(V_2-V_1)$$

и

$$Q_1=W+P_1(V_2-V_1),$$

где Q_1 — количество тепла, сообщаемое газу при процессе

$$A\to D\to C.$$

Из этих уравнений нетрудно найти, что

$$Q_1=Q-P_2(V_2-V_1)+P_1(V_2-V_1)=Q-(P_2-P_1)(V_2-V_1).$$

Величина $(P_2-P_1)(V_2-V_1)$ численно равна площади прямоугольника $ABCD$. Поэтому наш результат довольно естествен.

Разность $Q-Q_1$ должна, очевидно, быть равна разности работ, совершаемых при расширении газа, а работа при расширении газа численно равна площади фигуры, образуемой графиком зависимости P от V и осью абсцисс V.

Правильное решение прислал *А. Рогозин* из Ижевска

И. Ш. Слободецкий

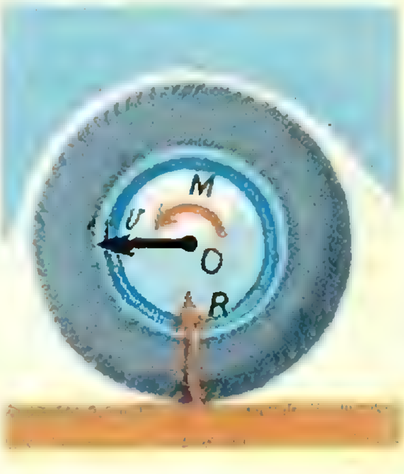
ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

(Окончание. Начало см. на стр. 29 и 34.)

5. Автомобиль, у которого все колеса ведущие, равномерно движется по прямолинейной горизонтальной дороге. Будем считать, что все колеса автомобиля находятся в одинаковых условиях, т. е. на каждое из них приходится одинаковая нагрузка и к каждому подводится одинаковая мощность. Тогда если $\mathbf{F}$ — горизонтальная сила, действующая со стороны дороги на каждое колесо, то $4\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, где m — масса автомобиля и $\mathbf{a}$ — его ускорение (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Но так как автомобиль движется равномерно, то $\mathbf{a}=0$ и, следовательно, $\mathbf{F}=0$. Однако, с другой стороны, сила $4\mathbf{F}$ — сила тяги, и поэтому $4Fv=N$, где v — скорость автомобиля, а N — его мощность. Следовательно, $F=\frac{N}{4v}$, т. е. $F\neq0$.

Кроме того, если $F=0$, то сила R, действующая на колесо со стороны дороги, вертикальна и не создает момента относительно центра колеса. Но так как к колесу приложен вращающий момент M со стороны двигателя, то оно должно вращаться ускоренно, а это противоречит тому, что автомобиль движется равномерно.

Что же верно?



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

В. Б. Демьянов

Тригонометрическими неравенствами мы будем называть неравенства, содержащие неизвестное x, которое входит в состав аргументов тригонометрических функций. Решить тригонометрическое неравенство — это значит, как и всегда, найти все значения неизвестного, удовлетворяющие этому неравенству.

Для решения простейших тригонометрических неравенств не требуется никаких специальных знаний, выходящих за пределы школьной программы. Именно, в разбираемых ниже примерах, кроме свойств тригонометрических функций, используются лишь понятие абсолютной величины числа (пример 4), правила решения квадратных неравенств (примеры 5—8) и свойства логарифмической функции (примеры 9, 10). Этих сведений достаточно и для того, чтобы справиться с примерами, приведенными в конце статьи для самостоятельного решения.

С самого начала, однако, необходимо отметить одно принципиальное обстоятельство. В тригонометрических неравенствах аргументы тригонометрических функций рассматриваются не как углы или дуги, а как вещественные числа. Поскольку опыт показывает, что в этом вопросе у многих выпускников средней школы нет полной ясности, остановимся на нем несколько подробнее. Абитуриенту же настоятельно рекомендуется тщательно продумать то, что по этому поводу говорится ниже.

Обычно тригонометрические функции вводятся сначала как функции угла (точнее, даже только острого угла). Затем понятие аргумента тригонометрической функции расширяется — начинают рассматривать функции дуги. При этом оказывается, что удобно не ограничиваться дугами, заключенными в пределах одного оборота, то есть имеющими значения от 0° до 360°, а рассматривать дуги, величина которых выражается любым числом градусов (как положительным, так и отрицательным). При таком понимании аргумента тригонометрические функции оказываются периодическими. Следующий шаг состоит в том, что от градусного измерения дуг переходят к радианному. И наконец, приходят к понятию тригонометрической функции вещественного числа. Именно, под значением тригонометрической функции числа понимают значение данной функции для той дуги, величина которой в радианах выражается этим числом.

В физике тригонометрические функции числового аргумента естественным образом появляются при описании различных периодических процессов, то есть таких процессов, характер которых через определенные промежутки времени полностью повторяется. Именно поэтому в математике и целесообразно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Фактически мы так и поступаем уже тогда, когда строим графики тригонометрических функций. В самом деле, по оси абсцисс мы при этом откладываем значения вещественных чисел.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные тригонометрические неравенства, причем начнем с самого простого примера.

Пример 1. Решить неравенство
$$\operatorname{tg} x < 1.$$

Решение. Сначала покажем, как не следует «решать» это неравенство, то есть разберем часто встречающиеся неправильные ответы на вопрос.

Иногда абитуриент, замечая, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и что вблизи значения $x = \frac{\pi}{4}$ функция $\operatorname{tg} x$ с увеличением x возрастает, записывает ответ в форме: $x < \frac{\pi}{4}$. Уже по внешнему виду» ответа можно сказать, что он неверен, так как в нем никак не отражена периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$. Легко указать и конкретные значения x, удовлетворяющие условию $x < \frac{\pi}{4}$, но не удовлетворяющие заданному неравенству. Например, при $x = -\frac{2\pi}{3}$ имеем: $-\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{4}$, но $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 1$; при $x = -\frac{\pi}{2}$ левая часть неравенства не имеет смысла, следовательно, это значение неравенству тоже не удовлетворяет, хотя снова $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Бывает и так, что абитуриент пытается учесть периодичность, но проявляет при этом беспомощность. Именно, часто «ответ» дается в виде:
$$x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Этот «ответ» еще хуже, так как он вообще лишен смысла. Легко убедиться, что чисел x, удовлетворяющих условию $x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ просто нет.

Чтобы получить правильный ответ, полезно рассмотреть график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1), так как рассуждения при этом получат геометрическую наглядность.

Неравенству $\operatorname{tg} x < 1$ удовлетворяют те и только те значения x, для которых соответствующие точки графика лежат ниже пунктирной горизонтальной прямой $y = 1$. Далее, из рисунка 1 ясно, что если мы найдем все решения, принадлежащие какому-нибудь определенному интервалу длины π, то все остальные решения будут отличаться от найденных сдвигом вправо или влево на π, 2π, 3π и т. д. Причина этого в том, что число π является периодом функции $y = \operatorname{tg} x$.

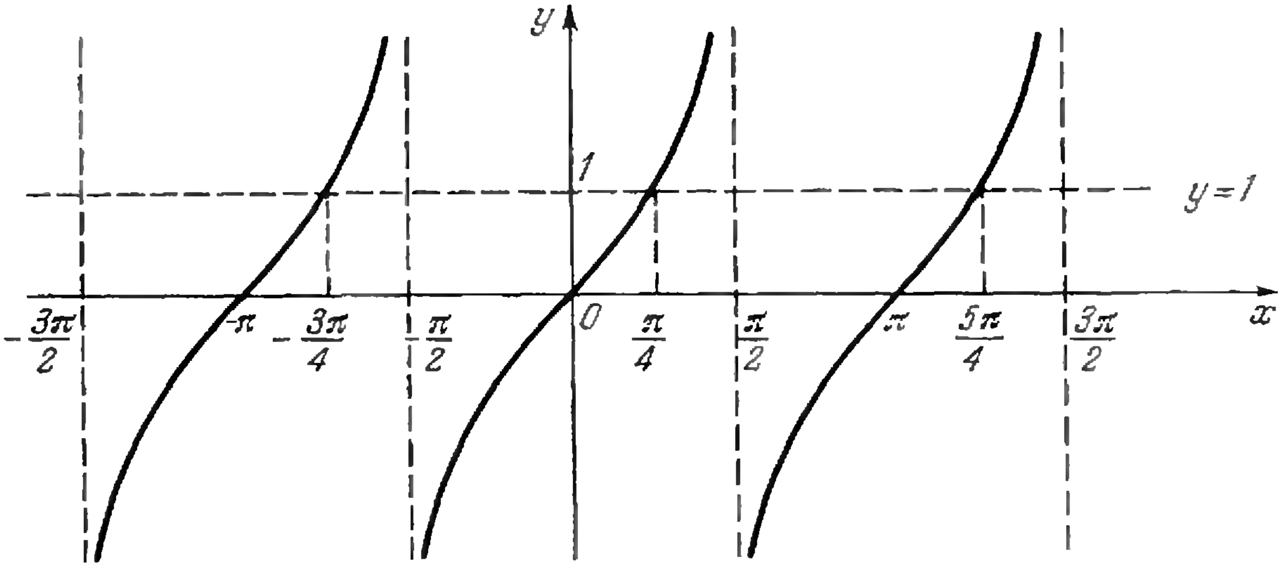


Рис. 1.

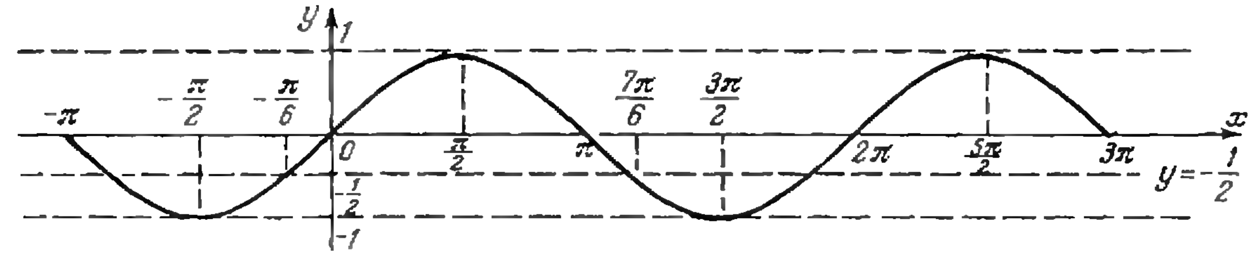


Рис. 2.

Для того чтобы ответ записывался как можно короче, желательно исходный интервал длины π выбрать так, чтобы принадлежащие ему решения заполняли в свою очередь какой-то один сплошной интервал. Из рисунка опять-таки видно, что так будет обстоять дело, если в качестве исходного интервала взять, например, интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. На этом интервале ниже прямой $y = 1$ лежат те точки графика, которые соответствуют значениям x, удовлетворяющим неравенствам $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Поэтому окончательный ответ имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ответ, таким образом, представляет собой совокупность интервалов, каждый из которых получается при некотором фиксированном значении k.

Аналогично обстоит дело и в ответах на все дальнейшие примеры.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sin x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ (рис. 2). Неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ удовлетворяют те значения x, для которых соответствующие точки графика лежат не ниже пунктирной прямой $y = -\frac{1}{2}$ (если точка графика лежит на самой этой прямой, то значение x удовлетворяет заданному неравенству, так как оно «не строгое», в нем допускается равенство левой и правой частей). Функция $y = \sin x$ имеет период 2π. Поэтому рассмотрим сначала какой-нибудь интервал длины 2π, например интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$. Из рисунка 2 видно, что неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ в этом интервале удовлетворяют следующие значения x: $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

Учитывая периодичность, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos(3x + 2) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $t = 3x + 2$. Тогда относительно t мы получим неравенство $\cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как оно совершенно аналогично неравенствам из примеров 1 и 2 (для его решения можно рассмотреть график функции $y = \cos t$), мы сразу выпишем ответ для t:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или, возвращаясь к неизвестному x,

$$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<3x+2<\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad)$$

Выражая отсюда x, получаем ответ для заданного неравенства:

$$-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}<x<-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad).$$

Пример 4. Решить неравенство

$$|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем, что заданному неравенству будут удовлетворять те и только те значения x, которые удовлетворяют *хотя бы одному* из неравенств

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решая каждое из них методом, рассмотренным в примерах 1 и 2, получаем для неравенства $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad),$$

а для неравенства $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad).$$

Поэтому ответ для заданного неравенства $|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать в виде двух «серий»

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x_1<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad),$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x_2<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad)$$

Заметим, что так как $-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\pi$ и $-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\pi$, вторую серию можно записать иначе

$$\frac{\pi}{3}+(2m-1)\pi<x_2<\frac{2\pi}{3}+(2m-1)\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad).$$

Теперь обе серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{2\pi}{3}+n\pi$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\quad),$$

причем для четных n получаются интервалы первой серии, а для нечетных n — интервалы второй серии.

Пример 5. Решить неравенство

$$\cos^2 x<\frac{3}{4}$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y=\cos x$. Неравенство примет вид $y^2<\frac{3}{4}$. Отсюда $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ или

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом, заданное неравенство свелось *к системе неравенств*

$$\begin{cases}\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Подчеркнем отличие теперешней ситуации от той, которая имела место в примере 4. Там для выполнения заданного неравенства нужно было, чтобы выполнялось *хотя бы одно* из двух неравенств

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ или }\ \sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Здесь же заданному неравенству будут удовлетворять те значения x, которые

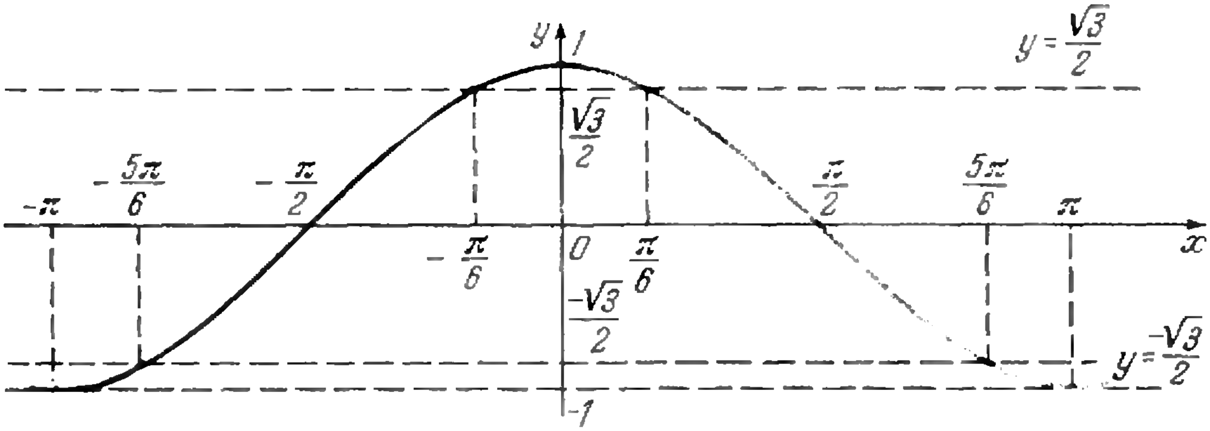


Рис 3

удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как функция $y = \cos x$ имеет период 2π, рассмотрим сначала значения x, лежащие на интервале от $-\pi$ до π. Построим для этого интервала график функции $y = \cos x$ (рис 3). Системе

$$\begin{cases} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

удовлетворяют те значения x, для которых соответствующие точки графика попадают внутрь горизонтальной полосы, ограниченной сверху пунктирной прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а снизу пунктирной прямой $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют следующие значения x: во-первых, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, во-вторых, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$. Учитывая периодичность, мы можем теперь записать ответ в виде двух серий:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x_1 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$$

$$(m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Как и в примере 4, эти две серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Заметим, что неравенство $\cos^2 x < \frac{3}{4}$ можно решить проще, если сначала преобразовать его к виду

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} < \frac{3}{4},$$

откуда $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Полагая $2x = t$, получаем, что

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Однако, первый способ решения, основанный на сведении к квадратному неравенству, обладает большей общностью, в чем мы убедимся ниже (примеры 6, 7, 8).

Пример 6. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leqslant 0.$$

Решение. Полагая $y = \operatorname{tg} x$, мы, как и в предыдущем примере, приходим к квадратному неравенству: $y^2-(1+\sqrt{3})\,y+\sqrt{3}\leqslant 0$. Решая его, получаем, что $1\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. Таким образом, вопрос снова свелся к решению системы неравенств

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\leqslant\sqrt{3},\\ \operatorname{tg}x\geqslant 1.\end{cases}$$

Период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π. Рассуждая так же, как в примере 5, находим сначала для интервала от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ следующие значения x: $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$. Учитывая периодичность, получаем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Все разобранные до сих пор примеры были подобраны так, чтобы в ответах фигурировали «круглые» значения аргументов типа $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Однако в принципе это совсем не обязательно, так как ответ может быть записан всегда с помощью символов обратных тригонометрических функций. Для иллюстрации этого рассмотрим пример, отличающийся от примера 6 лишь значениями числовых коэффициентов.

Пример 7. Решить неравенство
$$\operatorname{tg}^2x-5\operatorname{tg}x+6\leqslant 0.$$

Решение. Рассуждая дословно так же, как в примере 6, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\leqslant 3,\\ \operatorname{tg}x\geqslant 2.\end{cases}$$

Ответ теперь запишется в виде

$$k\pi+\operatorname{arctg}2\leqslant x\leqslant k\pi+\operatorname{arctg}3$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Пример 8. Решить неравенство
$$12\sin^2x-19\sin x+5<0.$$

Решение. Полагая $y=\sin x$, получаем квадратное неравенство $12y^2-19y+5<0$, откуда $\frac{1}{3}<y<\frac{5}{4}$.

Таким образом, неизвестное x должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases}\sin x<\frac{5}{4},\\ \sin x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Отличие от примеров 5, 6, 7 состоит в том, что первому неравенству системы, то есть неравенству $\sin x<\frac{5}{4}$ удовлетворяют все вещественные значения x. Поэтому фактически нужно решить лишь второе неравенство $\sin x>\frac{1}{3}$. Нетрудно убедиться, что ему удовлетворяют следующие значения x:

$$2k\pi+\arcsin\frac{1}{3}<x<(2k+1)\,\pi-$$
$$-\arcsin\frac{1}{3}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Это и есть окончательный ответ для заданного неравенства. Очень грубой ошибкой будет, если в связи с неравенством $\sin x<\frac{5}{4}$ в «ответе» появится «выражение» $\arcsin\frac{5}{4}$. Так как $\frac{5}{4}>1$, то символ $\arcsin\frac{5}{4}$ не имеет никакого смысла.

Пример 9. Решить неравенство
$$\log_2\sin x<-1.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y=\sin x$. Неравенство тогда примет вид $\log_2 y<-1$. Так как $-1=\log_2\frac{1}{2}$ и при основании, большем 1, большему числу соответствует больший логарифм, мы получаем, что $y<\frac{1}{2}$. Однако нужно еще учесть (при решении подобных неравенств об этом часто забывают!), что для отрицательных значений аргумента логарифмическая

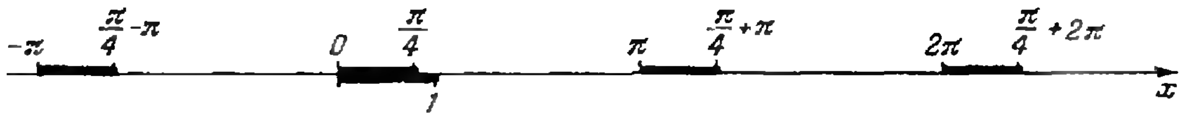


Рис. 4.

функция вообще не определена. Поэтому в окончательной форме решение неравенства $\log_2 y < -1$ запишется так: $0 < y < \frac{1}{2}$. Мы приходим, таким образом, к системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делали в примере 5, получаем следующий ответ, содержащий две серии:

$$\begin{cases} 2k\pi < x_1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < \pi + 2m\pi \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

В отличие от примеров 4 и 5, здесь уже нельзя дать простой формулы, объединяющей эти две серии в одну.

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_x \operatorname{tg} x > 0.$$

Решение. Этот пример сложнее предыдущих, так как неизвестное x выступает здесь одновременно в двух различных ролях и в качестве основания логарифмов, и в качестве аргумента тригонометрической функции. Благодаря этому здесь особенно рельефно проявляется тот факт, что x мы должны понимать как число.

Заметим прежде всего, что поскольку x является основанием логарифмов, обязательно $x > 0$ и $x \neq 1$. Так как свойства логарифмов существенно зависят от того, больше или меньше 1 их основание, рассмотрим эти случаи отдельно.

Пусть сначала $0 < x < 1$. Так как при основании, меньшем 1, положительный логарифм имеют числа, заключенные между 0 и 1, мы приходим к системе неравенств $0 < \operatorname{tg} x < 1$. Решая ее, получаем

$$k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но мы еще связаны условием $0 < x < 1$. Из рисунка 4 видно, что неравенствам $0 < x < 1, 0 < \operatorname{tg} x < 1$ одновременно удовлетворяют лишь следующие значения x: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Пусть теперь $x > 1$. Учитывая, что при основании, большем 1, положительный логарифм имеют числа, большие 1, мы получаем, что $\operatorname{tg} x > 1$, откуда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Учтем теперь условие $x > 1$. Из рисунка 5 мы видим, что обоим неравенствам $x > 1$ и $\operatorname{tg} x > 1$ одновременно

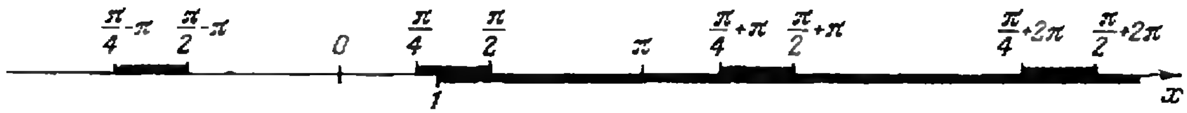


Рис. 5.

удовлетворяют следующие значения x: во-первых, $1 < x < \frac{\pi}{2}$, во-вторых

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

где k — целое положительное число, то есть $k = 1, 2, 3, \ldots$

Собирая все значения x, найденные при рассмотрении обоих случаев, получаем следующий окончательный ответ:

$$0 < x_1 < \frac{\pi}{4},$$

$$1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x_3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В заключение приводим ряд примеров для самостоятельного решения.

Решите неравенства:

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.
2. $\sin 2x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. $\sin \frac{x}{5} \geqslant -\frac{1}{2}$.
4. $\mathrm{tg}\,(3x - 1) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $|\mathrm{tg}\, x| \geqslant \sqrt{3}$.
6. $|\cos x| < \frac{1}{2}$.
7. $\sin^2 x < \frac{1}{4}$.
8. $\mathrm{tg}^2 x \geqslant \frac{1}{3}$.
9. $2 \sin^2 x \leqslant \sin x$.
10. $2 \cos^2 x + \cos x < 1$.
11. $\log_3 (\mathrm{tg}\, x) \geqslant \frac{1}{2}$.
12. $\log_{\frac{1}{2}} (\cos x) \leqslant 1$.

БУРЯ ПРОТИВ БУРЬ

Немногим более ста лет тому назад произошла буря, благодаря которой была создана вся метеорологическая служба мира.

14 ноября 1854 года сильнейшая буря нанесла непоправимый ущерб судам французов и их союзников, участвовавших в осаде Севастополя. Известие об этом вызвало во Франции большое уныние.

Узнав о буре в Балаклавской бухте, директор Парижской астрономической обсерватории Леверье попросил ученых, занятых в то время метеорологическими наблюдениями, дать ему материалы за два предыдущих дня. Как и предполагал Леверье, балаклавскую бурю можно было бы предсказать, располагая данными наблюдений на большой территории. Точные расчеты и безупречная логика ученого убедили правительство Франции ассигновать средства на создание государственной службы погоды.

С 1857 года к этой системе стали примыкать другие государства. В России синоптические карты появились в 1872 году.

Любопытно, что отдельные метеорологические наблюдения и их записи (конечно, примитивные) относятся к значительно более раннему периоду. До нас дошли «Дневальные записи» Приказа Тайных Дел с 1657 по 1673 год, но с большими перерывами. Вот образцы этих записей:

«1657 г., 30 генваря, пяток. День до обеда холоден и ведрен, а после обеда оттепелен, а в ночи было ветрено.

4 февраля, среда. День был тепел и ведрен, и за полчаса до ночи пошел снег и шел до пятого часа ночи, а в ночи было тепло же.

Майя 31, неделя. Гром гремел, и молния блистала, и шел дождь велик, и после того и до вечера было ведрено и ветрено, а в ночи было тепло».

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В МИЭМ

В. А. ТОНЯН

В Московском институте электронного машиностроения на экзамене по математике к поступающим предъявляются повышенные требования. Первый экзамен для всех абитуриентов — письменная математика.

Мы уже обсуждали на страницах «Кванта» (№ 5, 1970) некоторые вопросы, касающиеся письменного экзамена по математике 1969 года. Здесь я хочу рассказать об экзаменах 1970 года.

Ниже приводится разбор одного варианта с указанием наиболее типичных ошибок, допущенных поступающими. Обсуждаются также вопросы устного экзамена.

В конце приводятся задачи письменных экзаменов, предлагавшиеся в 1970 году.

Вариант

1. Даны два треугольника, площадь каждого из которых 50 *см*². Основание первого из них на 10 *см* больше основания второго. В каких пределах может изменяться основание первого треугольника, чтобы разность высот треугольников была не меньше 5/6 *см*?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}=5.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}}\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6)<0.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{3+2(2\sin x-\cos 2x)}+\sqrt{3-2(2\sin x+\cos 2x)}=2.$$

5. В пирамиду, основанием которой служит ромб с острым углом α, вписан шар радиуса R. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

Разбор задач варианта

1. Обозначим основание первого треугольника через x, тогда основание второго будет $x-10$, и потому

$$x>10. \qquad (1)$$

Высота первого треугольника будет $\frac{50}{x/2}=\frac{100}{x}$, а второго $\frac{100}{x-10}$. Согласно условию задачи, учитывая, что $\frac{100}{x-10}>\frac{100}{x}$, напишем $\frac{100}{x-10}-\frac{100}{x}\geqslant\frac{5}{6}$, а вспомнив условие (1), преобразуем его так:

$$x^2-10x-1200\leqslant 0, \qquad (2)$$

или

$$(x+30)(x-40) \leqslant 0,$$

откуда

$$-30 \leqslant x \leqslant 40.$$

Если учесть теперь ограничение (1), то получаем ответ: $10 < x \leqslant 40$.

Некоторые абитуриенты, решавшие эту задачу, не задумывались о том, что обозначено буквой x и приводили в качестве ответа решение неравенства (2).

2. Введем новые неизвестные. Положим

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}},$$

$$v = \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}.$$

Тогда данное уравнение перепишется в виде

$$u - v = 5. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0 \qquad (2)$$

и

$$uv = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+65^2}+x}{x}} \times$$

$$\times \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x^2+66^2}+x)}\sqrt{\sqrt{x^2+66^3}-x} =$$

$$= \sqrt{x^2+66^2-x^2} = 66.$$

Последнее уравнение вместе с (1) и (2) дает смешанную систему

$$\begin{cases} uv = 66, \\ u - v = 5, \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \end{cases}$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} u(-v) = -66, \\ u + (-v) = 5, \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0. \end{cases}$$

Вспомнив формулы Виета, замечаем что u совпадает с положительным корнем уравнения $x^2 - 5x - 66 = 0$. Таким образом,

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} = 11,$$

откуда

$$\sqrt{x^2+66^2} + x = 121x,$$

а, следовательно,

$$\sqrt{x^2+66^2} = 120x.$$

Отсюда видно, что $x \geqslant 0$. Возводя в квадрат, получаем уравнение

$$x^2 + 66^2 = 120^2 x^2, \qquad (3)$$

откуда находим:

$$x = \frac{6}{\sqrt{119}}.$$

Мы нашли этот корень, выполняя эквивалентные (при оговариваемых ограничениях) преобразования, а потому проверка не обязательна. С этой задачей справились многие поступавшие, однако много было и таких работ, в которых ответ содержал посторонние корни, например отрицательный корень уравнения (3).

Еще раз напомним: если при решении уравнения выполняются неэквивалентные преобразования, то проверка найденных корней является составной частью решения задачи, и без этой проверки решение не может быть признано правильным.

3. Допустимыми значениями являются только те значения x, для которых $-x^2+5x-6>0$, то есть $2<x<3$, тогда $4<x^2<9$ и $8<x^3<27$, так что $14<x^3+x^2+x<39$ и $0<x^3+x^2+x-14<25$. Теперь для основания первого логарифма находим

$$0 < \frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14} < 1.$$

Следовательно,

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6) > 1,$$

откуда получаем ответ: $2<x<2{,}5$ или $2{,}5<x<3$.

4. Преобразуем выражение, стоящее под первым радикалом:

$$3+2\quad(2\sin x - \cos 2x) = 3+4\sin x + 4\sin^2 x - 2 = (2\sin x+1)^2,$$

аналогично

$$3-2(2\sin x+\cos 2x) = (2\sin x-1)^2.$$

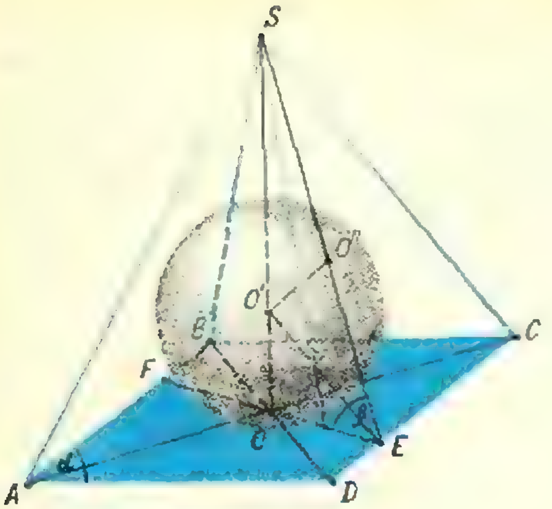


Рис. 1.

Теперь данное уравнение может быть переписано в виде

$$|2\sin x+1|+|2\sin x-1|=2.$$

Легко убедиться, что последнее уравнение удовлетворяется, притом тождественно, только при $|\sin x|\leqslant\leqslant\frac{1}{2}$, откуда находим ответ:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi n$$

$$(n=0,\ \pm1,\ .\ .\ .\ ).$$

5. Центр O' вписанного шара (рис. 1) является точкой, равноудаленной от всех граней пирамиды, и потому он лежит на пересечении биссектриальных плоскостей всех двугранных углов пирамиды. Так как диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов, то плоскости, проходящие через высоту и диагонали, биссектриальные для двугранных углов при боковых ребрах (проверьте это самостоятельно). По условию грани равнонаклонены к основанию, и потому точка пересечения диагоналей ромба O является основанием высоты SO. Таким образом, центр шара O' лежит на высоте пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из точки O' на боковую грань пирамиды, лежит в плоскости, проходящей через высоту SO и высоту основания FE (FE проходит через точку O),— это легко выводится из теоремы о трех перпендикулярах. Теперь из прямоугольного треугольника SOE ($O'O=O'O''=R$, $\measuredangle SEO=\alpha$) находим

$$SO=OE\operatorname{tg}\beta=R\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Высота пирамиды найдена, осталось определить площадь основания.

Из прямоугольного треугольника $OO'E$ $\left(OO'=R,\quad \measuredangle O'EO=\frac{\beta}{2}\right)$ находим

$$OE=OO'\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Далее замечаем, что

$$CD=\frac{FE}{\sin\alpha},$$

и потому

$$S_{\text{ромба}}=\frac{FE^2}{\sin\alpha}=\frac{4OE^2}{\sin\alpha}=\frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

Для объема пирамиды получаем окончательно ответ:

$$V=\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{3}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

Немного об устном экзамене

Устные экзамены в МИЭМ'е сдаются по билетам. В каждом билете указаны два теоретических вопроса, которые находятся в строгом соответствии с «Программой приемных экзаменов». Каждый экзаменующийся берет билет и готовится примерно 45 минут к ответу. После того как он ответил на вопросы билета, ему предлагаются дополнительные вопросы из не вошедших в билет разделов теории и задачи для проверки его умения применять теорию к решению задач. Эти задачи, как правило, не требуют вычислений. Вот примеры таких вопросов и задач с некоторыми замечаниями.

1. *Если сложить две периодические десятичные дроби, то будет ли их сумма снова периодической десятичной дробью?*

Обычно следует правильный ответ: «Да, будет, так как периодическая десятичная дробь — это рациональное число, а сумма двух рациональных чисел снова рациональна».

Это, в общем, верно; стоит лишь оговорить, что может получиться не только периодическая, но и конечная десятичная дробь, например: $0,(3)+0,(6)=1$, так как $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

Более трудным оказывается следующий вопрос.

2. *Если первая дробь имеет p цифр в периоде, а вторая q цифр, то какой период может быть у их суммы?*

Обычно без дополнительной помощи абитуриент затрудняется дать правильный ответ. Между тем на вопрос «Каков период функции $f(x)+g(x)$, если период $f(x)$ равен 2π, а период $g(x)$ равен 3π?» абитуриенты, как правило, дают правильный ответ: «6π». Между тем оба вопроса по сути дела относятся к одному и тому же разделу арифметики: наименьшее общее кратное (НОК) и наибольший общий делитель (НОД). Правильный ответ на исходный вопрос таков: период суммы не превосходит НОК чисел p и q.

Предлагаем читателям самим разобрать несколько примеров, когда период суммы в точности равен НОК и когда он меньше этого общего кратного.

Более трудным является вопрос о периоде произведения двух периодических десятичных дробей, из которых первая имеет p цифр в периоде, а вторая — q цифр.

Приведем лишь ответ: период произведения не превосходит $m(10^n-1)$, где m — НОК чисел p и q, n — их НОД. Рассмотрите пример: $0,(1)\times0,(1)=0,(012345679)$; здесь $p=q=1$, период произведения состоит из 9 цифр.

3. *Дано:* $\operatorname{tg}\alpha=a$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. *Найти* $\sin\alpha$.

Мне не раз приходилось видеть такое «решение» этого примера. Поступающий пишет:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

откуда

$$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

и только после замечания, что если последнее равенство верно, то $\sin\alpha$ в IV четверти имеет положительный знак, абитуриент начинает искать ошибку в решении.

4. *Определить знак разности*

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{2\sqrt{2}}-1.$$

В связи с этой задачей возникает вопрос: что такое $2^{\sqrt{3}}$? Многие абитуриенты, подробно рассказывающие о свойствах показательной функции, на этот вопрос отвечать не умеют.

5. *Решить уравнение* $x^4-10x^2+169=0$.

Обычно путь решения бывает таким.

Обозначим x^2 через y, тогда получим уравнение $y^2-10y+169=0$, корни которого комплексные. Для определения x, продолжает рассуждать экзаменующийся, нам надо извлечь корень из комплексного числа, а это действие не предусмотрено школьной программой. На этом основании некоторые абитуриенты приходят к выводу, что на вступительных экзаменах предлагаются задачи, решить которые не может тот, кто знает только школьный курс математики. А верно ли такое умозаключение? Можно ли вообще сделать такой вывод, заметив лишь, что какую-то задачу можно решить, применяя методы, которые не изучаются в средней школе? Не свидетельствует ли

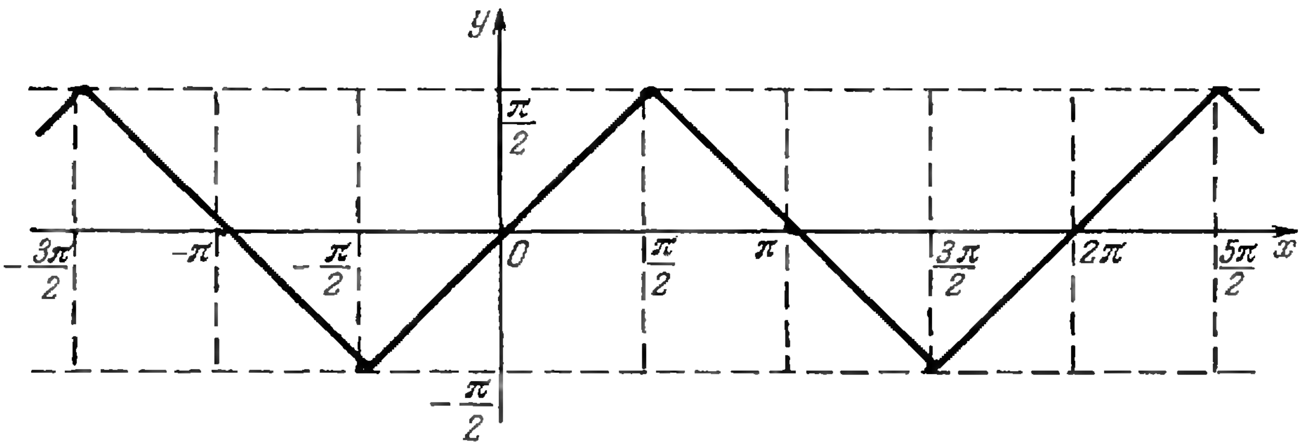


Рис. 2.

такое умозаключение о незнании его автора того, что не всякое обратнсе утверждение справедливо?

Вернемся, однако, к нашему биквадратному уравнению.

$$x^4+2\cdot 13\cdot x^2+169-36x^2=0,$$

откуда

$$(x^2+13)^2-36x^2=0,$$

а это приводит к двум квадратным уравнениям с действительными коэффициентами:

$$x^2-6x+13=0,\quad x^2+6x+13=0.$$

Попробуйте доказать, что всякое биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$, где $p^2-4q<0$ указанным выше методом может быть приведено к двум квадратным уравнениям с действительными коэффициентами.

6. *Начертить график функции* $y=\arcsin(\sin x)$.

Функция определена на интервале $-\infty<x<\infty$. В силу периодичности функции $z=\sin x$ функция $y=\arcsin z$ также является периодической с периодом 2π, и достаточно ее изучить, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, 3\pi/2\right]$.

На отрезке $\left[-\pi/2,\quad \pi/2\right]$ $\sin y=\sin x$ и $y=x$; если же

$$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

и из равенства $\sin(\pi-x)=\sin x$ следует, что $y=\pi-x$. Окончательно график изображен на рисунке 2.

Решите самостоятельно задачи из других вариантов письменных работ за 1970 год.

1. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 *км*, одновременно вышли навстречу друг другу 2 пешехода. Они должны были встретиться через 3,5 часа, однако второй остановился на 0,5 часа отдохнуть, и когда они встретились, то оказалось, что первый прошел на 2 *км* больше второго. Найти скорости пешеходов.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{2\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos^2 x}}=2\operatorname{ctg}2x.$$

4. Решить неравенство

$$\left|3\log_5\frac{1}{x^2}\right|\Big/\log_5|x+2|\leqslant 6.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют каждая длину b. Боковые грани пирамиды, проходящие через эти стороны, перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен также α. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решите уравнения

6. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3.$

7. $3\sin x+5\cos x=\sqrt{17+8\cos 2x+15\sin 2x}.$

ЗАОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

В. М. Розентуллер

В 1966 году на страницах ленинградской детской газеты «Ленинские искры» был впервые объявлен заочный математический турнир для учащихся 3—8 классов. Он стал традиционным и теперь проводится ежегодно.

Открывая турнир, оргкомитет рассчитывал только на учащихся Ленинграда и Ленинградской области, но совсем неожиданно в редакцию стали приходить письма с решениями задач из Горького, Волгограда, Донецка, Москвы, Пскова и Псковской области, Ейска и других районов и городов нашей Родины.

Добрым словом, советом, прекрасными задачами помогали турниру многочисленные друзья. Среди них профессор Ленинградского государственного педагогического института (ЛГПИ) им. Герцена И. Я. Депман, вице-президент АПН СССР А. И. Маркушевич, профессор Ленинградского государственного университета (ЛГУ), член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев, академик М. А. Лаврентьев, академик Ю. В. Линник, польский ученый Вацлав Серпинский, доценты, аспиранты и студенты ЛГУ и ЛГПИ им. Герцена.

Официально турнир называется заочным, но заочные в нем лишь первые два тура. Третий тур очный: 27 марта в Ленинграде собираются те, кто прошел горнило первых двух туров.

За пять лет число участников турнира выросло с трехсот до трех с лишним тысяч. На третий тур в 1966 году были приглашены 40 человек, а в 1970 — 212. Многие участники турнира поступают в ЗМШ при ЛГУ, будучи учениками 7 и 8 классов. Некоторые «перепрыгивают» через класс и хорошо учатся. Лучшие участники турнира поступают в специализированные физико-математические школы при ЛГУ.

Приятно отметить, что с 1967 года победители нашего турнира стали побеждать и на Всесоюзной математической олимпиаде.

Игорь Френкель в 1967 году завоевал вторую премию по 8 классам, а в 1968 году — вторую премию по 9 классам.

Андрей Бабичев в 1968 году получил вторую премию по 8 классам и в 1970 году — вторую премию по 10 классам.

В том же 1970 году Владимир Шварц получил вторую и Александр Меркурьев — третью премию по 8 классам, а Владимир Володарский получил третью премию по 10 классам.

Алексей Александров завоевал первую премию по 9 классам в 1970 году и был включен в состав советской команды на XII Международную математическую олимпиаду, проведенную в июне 1970 года в Будапеште. Алексей набрал 35 очков и получил диплом второй степени.

Во время турнира мы проводили встречи его участников с победителями всесоюзных и международных математических олимпиад, преподавателями 45-й физико-математической школы-интерната при ЛГУ, молодыми учеными во главе с преподавателем ЛГУ М. И. Башмаковым.

На одной из таких встреч семиклассникам была предложена задача: «Как выгоднее: проехать пароходом по реке туда и обратно или то же расстояние по озеру туда и обратно?»

Семиклассники решали ее с помощью уравнений. Но один ученик 5 класса тоже стал ее решать.

— Озером выгоднее,— сказал он.

— Верно. Но как ты решил?— спрашивали его.

— А я рассуждал так. Если бы скорость парохода равнялась скорости течения реки, пароход никогда бы не вернулся обратно. А озером он всегда прибудет обратно. Значит, озером выгоднее.

Конечно, это рассуждение не является решением, надо еще доказать, что либо всегда выгоднее плыть по реке, либо всегда выгоднее озером. Тем не менее оно является хорошим наводящим соображением, позволяющим проверить ответ.

Приведем несколько задач из числа предлагавшихся на третьем (очном) туре ЗМТ в 1970 году.

1. Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

2. Четырех подруг спросили, на каком проспекте в Ленинграде и в каком доме живет Аня.

Каждая из них сделала два высказывания:

Первая: а) Аня живет на Невском проспекте; б) номер дома 84.

Вторая: а) Аня живет не на Невском и не Чкаловском проспектах; б) номер дома делится на 2, на 3, на 4 и на 6.

Третья: а) Аня живет на Чкаловском проспекте; б) номер дома 96.

Четвертая: а) Аня живет на Московском проспекте; б) номер дома оканчивается на 6.

Одно из высказываний каждой подруги верное, а другое — ложное. Где живет Аня?

Примечание. Указанные проспекты расположены в различных районах Ленинграда, не пересекаются и не имеют общих домов.

3. Ни одно из 40 данных целых чисел не делится на 5. Доказать, что сумма сороковых степеней этих же чисел делится на 5.

4. В выпуклом четырехугольнике, никакие противоположные стороны которого не параллельны и никакие смежные стороны не перпендикулярны, проведены диагонали. Пусть площади образовавшихся треугольников выражаются целыми числами. Может ли произведение указанных четырех целых чисел выражаться числом, оканчивающимся на 1970? на 1971?

5. a, b и c — целые числа, и $a+b+c$ делится на 6. Доказать, что a^6+b^3+c также делится на 6.

ОЛИМПИАДЫ, ОЛИМПИАДЫ

В дни весенних школьных каникул в большинстве областей, краев и республик нашей страны проводились физические и математические олимпиады. Одновременно там проходили собеседования с желающими приехать в летнюю школу в новосибирском Академгородке и принимались экзамены в московский и другие специализированные физико-математические школы-интернаты (подробнее о них смотрите в «Кванте» № 1, стр. 58—59 и в «Кванте» № 4, стр. 51 за 1970 г.) По три победителя от каждой из этих олимпиад совместно с лауреатами первой и второй премии прошлогоднего заключительного тура соберутся в середине апреля на заключительный тур Всесоюзной олимпиады в Риге (по математике) и в Новосибирске (по физике).

Мы познакомим читателей нашего журнала с итогами Всесоюзной олимпиады через несколько месяцев.

Приведем несколько задач из тех, что были на олимпиадах.

1. Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек. Один из них выбрасывает какую-нибудь кучку, а оставшуюся разбивают на две. Второй снова выбрасывает одну из кучек, а другую делит на две и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер, если вначале в одной кучке было 20 спичек, а в другой —25? (7—10 классы).

2. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках? (7—10 классы).

3. Десять злоумышленников-муравьев решили утащить со стола нитку. Как им поступить, если сила, с которой каждый из муравьев может тянуть нитку, немного меньше 1/10 силы трения, действующей на нитку при ее движении вдоль стола? (7 класс).

4. Космонавт массой 100 *кг* находится вне космического корабля, масса которого равна 5000 *кг*, на фале длиной 64 *м*. Рассчитать натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры масс.

Считать, что корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры масс.

Считать, что корабль движется по круговой орбите с радиусом 6400 *км* (10 класс).

ПО ОБЕ СТОРОНЫ ЗЕРКАЛА

Ю. М. Брук

И ВСЕ ЭТО ДЕЛАЮТ ЗЕРКАЛА
И. Глюк

> **«Первое, что он увидел утром, проснувшись, — это был Тигра, который сидел перед зеркалом, уставившись на свое отражение.**
> **— Доброе утро! — сказал Пух.**
> **— Доброе утро! — сказал Тигра. — Смотри-ка, тут есть кто-то, точь-в-точь как Я. А я думал, я только один такой».**
>
> А. А. Милн. «Винни Пух и все — все — все»

«Жил-был тролль, злющий-презлющий; то был сам дьявол. Раз он был в особенно хорошем расположении духа: он смастерил такое зеркало, в котором все доброе и прекрасное уменьшалось донельзя, все же негодное и безобразное, напротив, так и бросалось в глаза и казалось еще хуже». Так начинается сказка о Снежной королеве.

С этой сказкой знаменитого датского сказочника Ганса Христиана Андерсена мы познакомились, когда были совсем маленькими. А с зеркалом, наверное, еще раньше. Зеркало, без сомнения, — самый распространенный физический прибор. Оно есть в каждом доме. Не будет преувеличением сказать, что каждый день вольно или невольно мы не один раз смотрим на свое изображение. Люди научились делать зеркала несколько тысяч лет назад. А вот о том, что делают зеркала, рассказывается в книжке Ирвина Глюка, которая так и называется: «И все это делают зеркала». Книжка выпущена издательством «Мир» в 1970 году. Каждый прочитавший ее получит большое удовольствие, по-новому взглянет на известные вещи и наверняка узнает что-то новое для себя.

Фотография и астрономия, медицина и навигация, космическая техника и прецизионные (высокоточные) измерения физических величин требует самых различных по назначению и конструкции зеркал. Первые созданные людьми зеркала были металлическими — ведь добывать блестящие металлы человек научился раньше, чем изготовлять стекла. Впрочем, и стеклянные зеркала имеют весьма почтенный возраст — их делали уже за полтора тысячелетия до нашей эры. Массовое производство стеклянных зеркал началось значительно позже, в эпоху итальянского Возрождения. В Венеции зеркала изготовляли, нанося на стекло амальгаму — пастообразную смесь олова и ртути. Венецианская технология дожила до наших дней.

В книге И. Глюка подробно рассказывается, какое большое научное значение приобрело изготовление зеркал после изобретения телескопа и микроскопа в начале XVII века. Правда, первые оптические инструменты обходились без зеркал. Но немногим позже был изобретён отражательный телескоп, известный теперь под названием рефлектора Ньютона. Напомним, что имеется по крайней мере две причины, по которым телескопы-рефлекторы предпочтительнее телескопов-рефракторов. Одна из них в том, что линзы разлагают белый свет, у изображения появляется цветная окантовка, и оно размывается. Вторая причина в том, что линзы, особенно большого диаметра, шлифовать трудно. Не совсем точны утверждения автора книги, что идея телескопа-рефлектора появилась у Ньютона и что в 1672 году Ньютон пришел к заключению о невозможности изготовить телескоп-рефрактор, удовлетворяющий наблюдателей далеких звезд. Действительным изобретателем зеркального телескопа в истории физики считается Джемс Грегори. Он предложил устройство такого телескопа еще в 1663 году, но не смог сам построить этот инструмент. Построен же рефлектор был впервые Исааком Ньютоном.

Большой пятиметровый рефлектор обсерватории Маунт Паломар в Калифорнии строился более 20 лет. С его помощью сделано много уникальных фотографий далеких галактик и туманностей.

Автор книги разбирает достоинства и недостатки различных инструментов (рефракторов и рефлекторов).

В книге рассказано, насколько совершенным может быть зеркало рефлектора, как можно было бы сделать любительский телескоп-рефлектор и что можно наблюдать с его помощью. Узнает читатель из книги и о радиотелескопах. Их размеры еще больше. Так чаша радиотелескопа обсерватории Джодрелл-Бэнк в Англии имеет в диаметре 75 метров. Радиотелескопы нужны не только для наблюдения за далекими космическими объектами, но и для слежения за искусственными летательными аппаратами и связи с ними.

Широко используются зеркала в самых разных физических измерениях. Усовершенствование техники изготовления зеркал (об этом тоже подробно написано в книге) позволило проделать уникальные по важности и точности опыты.

Майкельсон с помощью зеркал измерил скорость света *). Автор описывает и другие опыты по измерению скорости света. Зеркала давно используются для измерения расстояний, для измерения высоты светила над горизонтом (морской секстант — один из первых зеркальных измерительных инструментов — изобретен Джоном Гадлеем в 1731 году). С помощью светового зайчика, отраженного от маленького зеркала гальванометра, можно измерять слабые токи. Применяются зеркала в сейсмографах; зеркала регистрируют поворот на малый угол в опытах по исследованию гравитационной постоянной. Оптические микрометры и интерферометры, офтальмоскоп (прибор, применяемый врачами-окулистами) — все это И. Глюк относит к «деловой» стороне зеркал. К этой же стороне нужно, конечно, отнести использование зеркал для концентрации солнечной энергии и для преобразования солнечного света в электроэнергию. Автор отмечает, что хотя действующих солнечных двигателей уже довольно много, они не в состоянии конкурировать с дизелями и двигателями внутреннего сгорания. Однако, если солнечные двигатели пока невыгодны, солнечные батареи на космических кораблях успешно работают.

«Новая специальность зеркал» — так И. Глюк называет применение зеркал в лазерной технике. Попутно в книге описывается принцип работы и устройство лазеров, перспективы их применения.

Довольно много места занимают в книге забавы и фокусы с зеркалами. Это одно из самых старых, но не стареющих применений зеркал. «Зеркальная магния», «Многократные отражения», «Калейдоскоп», «Солнечная жаровня», «Изображение, парящее в воздухе» — таковы названия некоторых маленьких разделов книги. Мы не будем их здесь подробно описывать — читатель сам легко разберется в физической сущности этих простых, но часто неожиданных и удивительных опытов. В книге вместе с чисто развлекательными опытами описываются и такие, которые позволяют хорошо разобраться в физических принципах фотографирования. Например, читатель узнает, какие фототрюки можно делать, сочетая фотоаппарат и различные зеркала, как можно вместо линзы при фотографировании использовать вогнутое зеркало.

Интересно ли увидеть человеческий глаз? Снаружи мы вроде бы хорошо его видим, глядя в обычное зеркало или в глаза товарищу. Но с помощью зеркала можно разглядеть и внутреннее устройство глаза. Как это сделать, вы тоже прочтете на страницах книги. Интересное, но, к сожалению, несколько схематичное описание стереоскопического эффекта завершало главу, посвященную забавам с зеркалами.

Глава «Странная оптика зеркал» посвящена законам геометрической оптики и правилам построения изображений в зеркалах. По существу в этой главе на нескольких страницах изложены все основные правила и приемы решения элементарных задач с зеркалами. Особое внимание уделяется действительному и мнимому изображению.

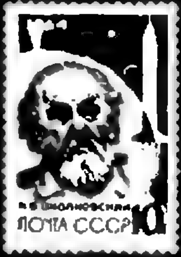
И, наконец, заключительная глава книги посвящена опытам с зеркалами, которые автор предлагает поставить самостоятельно. Почти все опыты можно проделать с минимальным оборудованием, многие просто в домашних условиях. Эта последняя глава книги удачно сочетается с книжкой «Опыты со зрением» Дж. Грегга, также изданной издательством «Мир» в 1970 году.

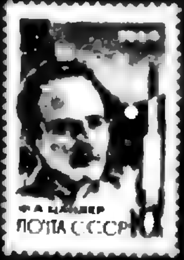
Книжка И. Глюка написана довольно живо, хотя, пожалуй, несколько неравномерно. Отдельные вопросы изложены очень сжато, в других случаях одни и те же факты повторяются на разных страницах. Некоторые неточности автора оговариваются переводчиком в примечаниях, число их, к счастью, невелико. В целом же книжка читается с большим интересом и, безусловно, принадлежит к числу тех, прочитать которые очень полезно и школьнику, и учителю.

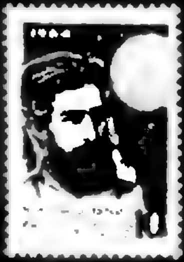
---

*) Дата измерения скорости света Майкельсоном (1884 г.) названа неточно. Первый опыт был поставлен в 1882 году, а более точные и надежные результаты были получены в знаменитом опыте 1887 года, проделанном совместно с Морли (Б. Джефф, Майкельсон и скорость света, 1963 г.).

ПОЧТА СССР
ЭКИПАЖ КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ
КОМАРОВ В.М. ФЕОКТИСТОВ К.П. ЕГОРОВ Б.Б.
«ВОСХОД»


1964
К.Э. ЦИОЛКОВСКИЙ
ПОЧТА СССР 10


1964
Ф.А. ЦАНДЕР
ПОЧТА СССР 10



СССР — РОДИНА КОСМОНАВТИКИ

Успехи в освоении космоса стали возможными благодаря работам русских ученых К. Э. Циолковского, Н. И. Кибальчича, Ф. А. Цандера, С. П. Королева и др.

Выдающимся ученым — отцом космонавтики по праву считается К. Э. Циолковский (1857—1935). С 1886 г. он систематически занимался теорией движения реактивных аппаратов. Циолковский создал схему многоступенчатых ракетоносителей для вывода на орбиту многотонного корабля, предназначенного для межпланетных полетов человека, теоретически обосновал принципы полета ракеты и создания ракетного двигателя на жидком топливе.

Первая марка с портретом К. Э. Циолковского вышла в 1951 году в серии «Великие русские ученые» (художник В. Завьялов), а в дальнейшем марки с его портретом выходили неоднократно как у нас в Союзе, так и за рубежом.

Так, портрет Циолковского мы видим в серии марок, выпущенных в 1964 году (они выпущены в двух разновидностях: с зубцами и без зубцов) и посвященных основоположникам ракетной теории и техники — К. Э. Циолковскому, Н. И. Кибальчичу и Ф. А. Цандеру. Схема космической ракеты Циолковского изображена на марках Венгерской и Польской народных республик, выпущенных в 1964 и 1963 годах. Как видно на фото, на марке ПНР справа от ракеты Циолковского дана формула движения ракеты, выведенная им в 1903 г.

Осуществить вековую мечту человечества и первыми создать искусственные спутники Земли и космические корабли для полета человека удалось советским

10 ПОЧТА СССР 1969
10 ПОЧТА СССР 1969
10 ПОЧТА СССР 1969

ученым, инженерам и рабочим под руководством выдающегося ученого и конструктора С. П. Королева (1906—1966). Его скульптурный портрет на фоне первого искусственного спутника Земли и обелиска в ознаменование побед советского народа в освоении космоса изображен на марке, выпущенной ко дню космонавтики в 1969 г.

4 октября 1957 г. человечество узнало о запуске в Советском Союзе первого искусственного спутника Земли. Это событие ознаменовало начало новой космической эры. Став первой космической державой, Советский Союз выпустил первую марку (5 ноября 1957 г.), посвященную началу исследования космического пространства, на которой изображен спутник на орбите вокруг земного шара.

12 апреля 1961 года в 9 часов 07 минут в Советском Союзе на околоземную орбиту выведен первый в мире космический корабль-спутник «Восток» с человеком на борту — гражданином СССР Юрием Алексеевичем Гагариным. В 10 часов 55 минут корабль-спутник, пробыв в космосе 108 минут, приземлился в заданном районе. Уже на следующий день появилась первая марка, посвященная этому событию. На ней изображен портрет Ю. А. Гагарина и надпись «Человек Страны Советов в космосе 12-IV-1961».

В дальнейшем многие страны выпустили марки, посвященные первому полету человека в космос. После первого полета запуски космических кораблей с космонавтами на борту стали следовать один за другим, и все эти запуски отмечались выпуском марок в различных странах мира. На фотографии вы видите некоторые марки, посвященные запускам в Советском Союзе пилотируемых кораблей.

12 октября 1964 г. стартовал трехместный космический корабль «Восход». На марке вы видите экипаж этого корабля в составе командира В. М. Комарова, научного сотрудника, кандидата технических наук К. П. Феоктистова и врача Б. Б. Егорова. 18 марта 1965 г. на орбиту вокруг Земли выведен корабль «Восход-2» с космонавтами П. И. Беляевым и А. А. Леоновым. На втором витке А. А. Леонов впервые в мире совершил выход из корабля в космическое пространство. Пробыв в космосе 20 минут (из них 10 минут вне корабля), он благополучно возвратился в корабль. За это время он пролетел расстояние от Черноморского побережья до острова Сахалина со скоростью 28 000 километров в час. На одной из марок вы видите изображение А. А. Леонова, летящего в космосе рядом с кораблем «Восход-2»

11, 12 и 13 октября 1969 г. на околоземную орбиту для совместного полета были выведены три космических корабля: «Союз-6», «Союз-7» и «Союз-8». Портреты членов экипажа этих кораблей воспроизведены на сцепке из трех марок. Это Г. С. Шонин, и В. Н. Кубасов (корабль «Союз-6»), А. В. Филипченко, В. Н. Волков и В. В. Горбатко (корабль «Союз-7»), В. А. Шаталов и А. С. Елисеев (корабль «Союз-8»). Оба члена экипажа корабля «Союз-8» поднялись в космос второй раз.

1 июня 1970 года на орбиту Земли выведен космический корабль «Союз-9». Экипаж этого корабля А. Г. Николаева (второй раз в космосе) и В. И. Севастьянова вы видите на марке, выпущенной в честь этого полета. Пробыв в космосе 424 часа (рекорд продолжительности космического полета) и выполнив обширную программу исследований, корабль «Союз-9» 19 июня успешно совершил посадку.

А. В. Алтыкис

СКОЛЬКО КРАСОК?

На обложке журнала вы видите четыре окружности, в каждой из которых проведено по хорде. Они разбивают плоскость на несколько частей. Эти части раскрашены тремя красками так, что соседние имеют разные цвета. (Соседними называются части, границы которых имеют общий отрезок или дугу. Части, границы которых содержат одну общую точку, соседними не считаются.) Назовем такую раскраску правильной, а точку, которая принадлежит границе более чем двух частей, вершиной.

Докажите, *что если плоскость разбита на части:*

а) *несколькими прямыми, то для правильной раскраски достаточно двух красок;*

б) *окружностями, в каждой из которых проведена хорда, то для правильной раскраски достаточно трех красок;*

в) *так, что в каждой вершине сходится четное число частей, то для правильной раскраски достаточно двух красок.* (В последней задаче плоскость разбита произвольными линиями.)

В этих задачах для правильной раскраски достаточно трех красок. Приведите примеры такого разбиения плоскости на части, когда уже нельзя обойтись тремя красками. Убедитесь, что в каждом из ваших примеров четырех красок достаточно для правильной раскраски.

Еще в конце XIX века была сформулирована задача о том, что четырех красок достаточно для правильной раскраски произвольного разбиения плоскости на части. Но до сих пор никому не удалось решить эту задачу. То, что для этого достаточно пяти красок, доказано.

Подробнее об этом вы можете прочесть в книжках Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры», М., «Наука», 1966 и Л. И. Головиной и И. М. Яглома «Индукция и геометрия», М., Гостехиздат, 1956.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

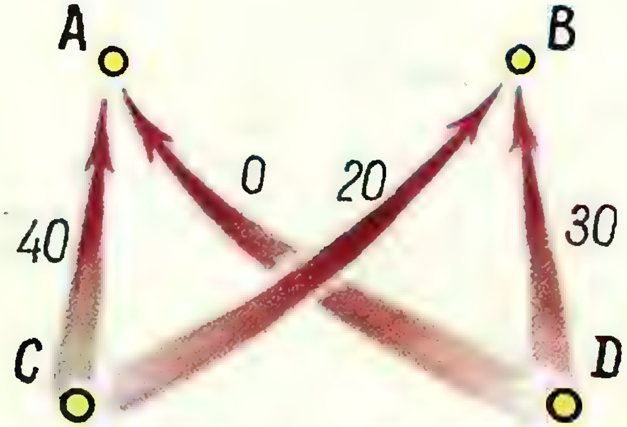


Рис. 1.

К статье «Экономика и линейные неравенства»

(См. «Квант» № 3).

1. Завод должен выпускать 300 дорожных и 200 гоночных велосипедов в день.

2. Ответ изображен на рисунке 1.

3. Добавится ограничение $x+y\leqslant S$. На рисунке 2 изображен случай, когда решение изменяется, так как прежнее решение — точка M — лежит вне нового множества допустимых точек.

5. а) Решения будут образовывать отрезок $M'_1M'_2$ прямой $a_1x+b_1y=c_1+\delta$, лежащей внутри множества A.

б) Решения не изменяются.

в) Решения будут образовывать уменьшенный отрезок M''_1M_2 (точка M_1'' лежит на отрезке M_1M_2).

(«Квант» № 4)

2. Плоскость $x_1+x_2+x_3=K_0$ может не проходить через это ребро.

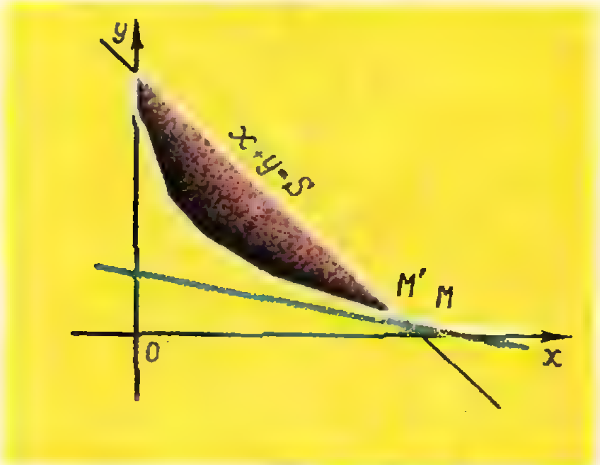


Рис. 2.

К статье «Логические задачи и алгебра высказываний»

Указание. При решении задач полезно использовать еще две равносильности (помимо перечисленных в статье):

$$A\vee A\wedge B\equiv\overline{A};\qquad \overline{A}\vee A\wedge B\equiv A\vee B.$$

1. Устав клуба можно переписать следующим образом:

1) финансовый комитет должен быть избран из состава общего комитета;

2) никто из членов библиотечного комитета не может быть в общем комитете.

2. Первый, второй и четвертый вопросы требуют ответа «да», пятый — ответа «нет», про третий вопрос ничего определенного сказать нельзя.

3. Псевдонимы между писателями распределены так:

$$A—Y,\quad B—X,\quad C—W,\quad D—Z.$$

К статье «Тригонометрические неравенства»

1. $$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

2. $$\frac{3\pi}{8}+k\pi<x<\frac{9\pi}{8}+k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

3. $$-\frac{5\pi}{6}+10k\pi\leqslant x\leqslant\frac{35\pi}{6}+10k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

4. $$\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}.$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

5. $$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x_1\leqslant-\frac{\pi}{3}+k\pi,$$
$$\frac{\pi}{3}+m\pi\leqslant x_2<\frac{\pi}{2}+m\pi$$
$$(k,m=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

6. $$\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

7. $$-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

8. $$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x_1\leqslant-\frac{\pi}{6}+k\pi,$$
$$\frac{\pi}{6}+m\pi\leqslant x_2<\frac{\pi}{2}+m\pi$$
$$(k,m=0,\pm1,\pm2,\ \ldots).$$

9. $2k\pi \leqslant x_1 \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$$\frac{5\pi}{6} + 2m\pi \leqslant x_2 \leqslant \pi + 2m\pi$$

$$(k,\ m = 0, \pm 2,\ \ldots).$$

10. $-\pi + 2k\pi < x_1 < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

$$\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x_2 < \pi + 2m\pi$$

$$(k,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

11. $\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

12. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

К статье «Вступительные экзамены по математике МИЭМ»

1. $v_1 = v_2 = 4$ *км/ч.*

2. $\frac{4}{\sqrt{47}}.$

3. $\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

4. $-3 < x < -1, \quad x \neq -2,$

$$x \geqslant -1 + \sqrt{2}.$$

5. $b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$

6. $x = \frac{7 \pm \sqrt{153}}{16}.$

7. $2k\pi - \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}} < x < (2k+1)\pi - \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

К заметке «Заочный математический турнир»

1. 113, 112, 15; 39, 36, 15; 25, 20, 15; 17, 8, 15; 15, 0, 15 (в последнем случае треугольник вырождается в отрезок).

2. Аня живет на Невском проспекте в доме № 96.

3. Указание. Если целое число не делится на 5, то его четвертая степень дает остаток 1 при делении на 5.

4. Указание. Докажите, что произведения площадей противоположных треугольников равны. Тогда произведение площадей всех треугольников является полным квадратом и не может оканчиваться ни на 70, ни на 71.

5. Указание. Достаточно проверить, что если числа 0, 1, 2, 3, 4, 5 возвести в куб или в пятую степень, то их остатки от деления на 6 не изменятся.

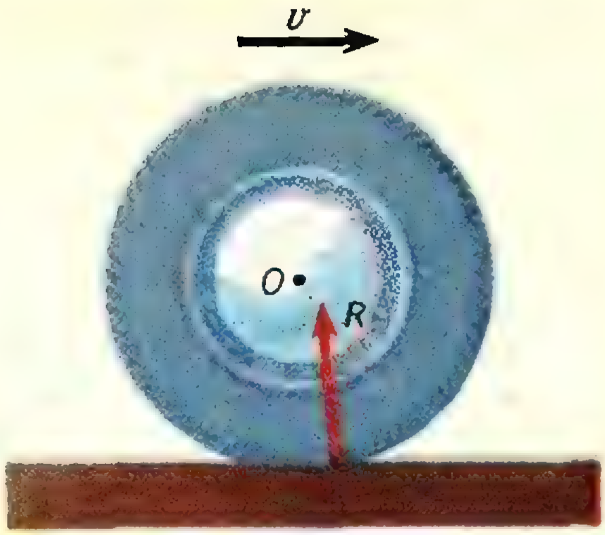


Рис. 1.

К «Задачам про колесо»

1. Контакт между колесом и плоскостью будет осуществляться не в точке, а по некоторой площадке (вследствие деформации). Поэтому плоскость будет действовать на колесо с силами, равнодействующая которых будет такой, как показано на рисунке 1.

2. Трение этого колеса о плоскость является трением качения и поэтому не может быть сведено к горизонтальной силе F, как было бы в случае трения скольжения. При качении колесо слегка деформируется и вдавливается в плоскость, вследствие чего на него действует сила R, направленная примерно так, как показано на рисунке 2. Поскольку

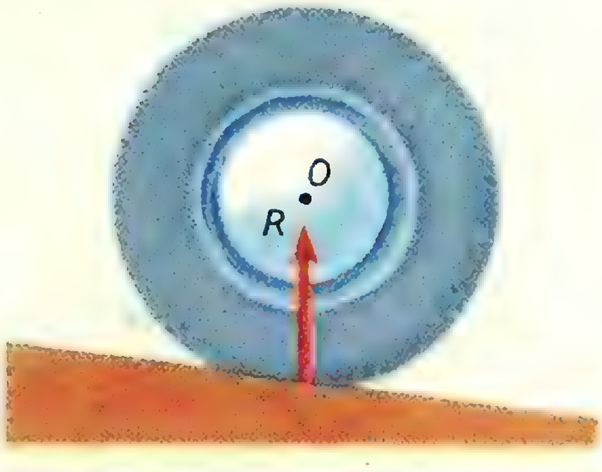


Рис. 2.

горизонтальная составляющая этой силы направлена влево, скорость колеса будет уменьшаться. Вместе с тем момент этой силы относительно точки O направлен против часовой стрелки и, следовательно, тормозит вращение колеса.

3. Когда вращение колес замедляется, они проявляют тенденцию к скольжению (так как автомобиль имеет тенденцию двигаться вперед с прежней скоростью). Поэтому между колесами и землей возникают значительные силы трения, которые являются внешними.

4. Так как колеса паровоза и вагонов не скользят по рельсам, то

$$F_1 \leqslant kP_1,$$

$$F_2 \leqslant kP_2,$$

где P_1 — вес паровоза, P_2 — вес вагонов, F_1 — сила трения паровозных колес о рельсы, F_2 — сила трения вагонных колес о рельсы, и k — коэффициент трения стали о сталь. Но из написанных неравенств и из того, что $P_2 > P_1$, очевидно, нельзя сделать вывод, что $F_2 > F_1$.

Конечно,

$$F_2 \leqslant F_1.$$

Это связано с тем, что трение колес вагонов о рельсы — это в основном трение качения, а трение колес паровоза о рельсы — трение покоя.

5. В формуле $N = Fv$ под N понимается мощность, развиваемая силой F, а под v — скорость точки приложения этой силы. В равенстве же $4Fv = N$ сила F — это сила, приложенная к ободу колеса, v — скорость центра колеса, и N — мощность не сил F, а сил, приложенных к колесам со стороны двигателя. Поэтому равенство

$$4Fv = N$$

неверно.

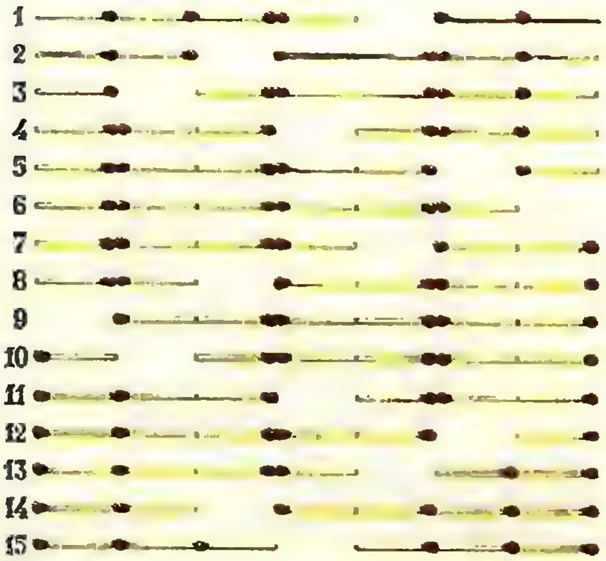


Рис. 1.

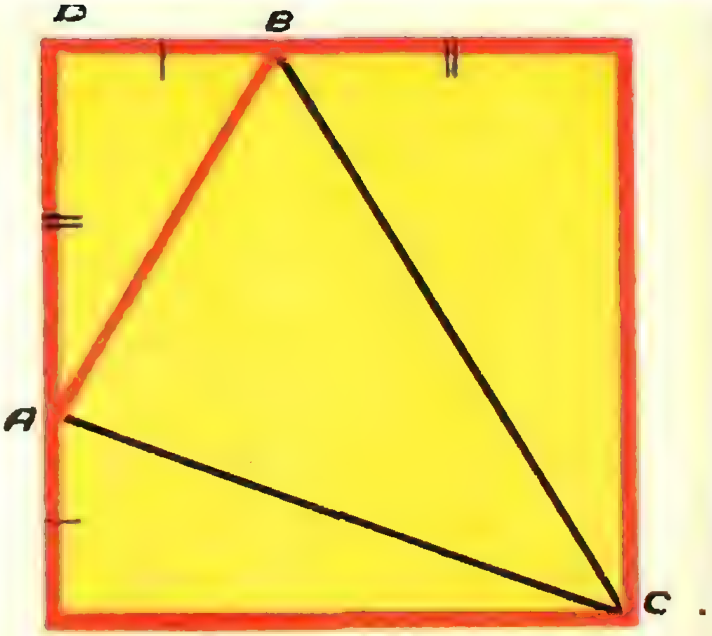


Рис. 2.

Что касается второго противоречия, то линия действия силы R проходит не так, как показано на рисунке на стр. 42, а несколько левее, т. е. впереди центра колеса (колесо касается дороги по некоторой площадке). Момент этой силы относительно центра O направлен по часовой стрелке и уравновешивает момент M, приложенный к колесу со стороны двигателя.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(«Квант» № 3, 1971, 3-я стр. обложки)

1. 5 дней.

2. Положим на чашки весов по 5 монет.

а) Если весы в равновесии, то фальшивая монета среди оставшихся пяти, а на весах все монеты настоящие. Осталось сравнить вес оставшихся монет с любой из групп настоящих.

б) Если одна из чашек весов перевесит, то оставшиеся 5 монет настоящие. Вторым взвешиванием сравниваем вес этих монет с весом более тяжелой из групп, взвешивавшихся в первый раз. Если весы в равновесии, то фальшивая монета легче остальных; если же группа, оставшаяся после первого взвешивания, опять перевесила, то фальшивая монета тяжелее остальных.

3. 19 и 21.

4. Один из возможных способов изображен на рисунке 1.

5. Отрежем треугольник ABD (рис. 2), перевернем его и согнем лист по линиям AB, BC, AC. Чтобы углы квадрата сошлись в вершине будущей пирамиды, требуется лишь равенство отрезков, отмеченных на рисунке. Можно, например, взять

$$AD = 2BD.$$

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

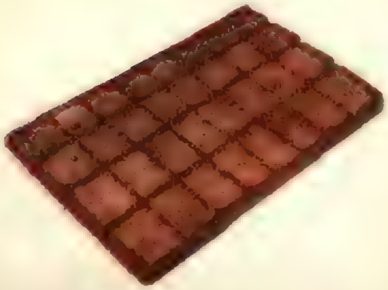


Рис. 1.

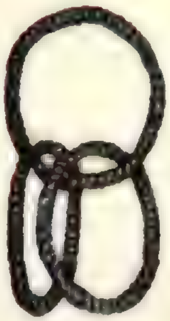


Рис. 2.

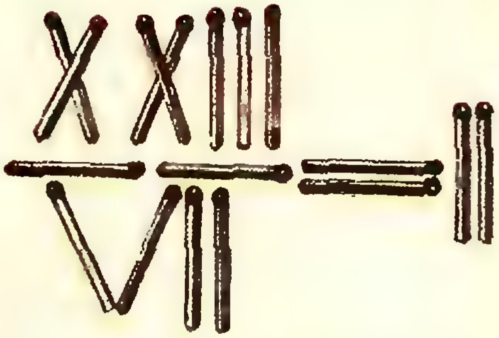


Рис. 3.

1. За какое наименьшее число разломов можно полностью разломить шоколадку (рис. 1) на кусочки? Ломать можно только по прямым, являющимся углублениями на шоколадке.

2. Здесь зашифровано хорошо известное стихотворение. Можете ли вы его расшифровать?

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
Юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящъ,
Мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

3. На рисунке 2 изображены три веревочных кольца. Если разрезать верхнее кольцо, то остальные окажутся свободными, если же разрезать одно из нижних, то оставшиеся будут сцепленимым. Попробуйте сцепить три кольца так, чтобы при разрезании любого из них оставшиеся кольца оказались свободными.

4. Здесь крестиками зашифрованы некоторые цифры. Попробуйте расшифровать пример.

```
_××7×××××××|××××7×
 ××××××    |-------
-----------  ××7××
_×××××7×
 ×××××××
-----------
  _×7××××
   ×7××××
   --------
  _×××××××
   ××××7××
   ---------
    _××××××
     ××××××
     -------
     0
```

5. Равенство, изображенное на рисунке 3, неверно. Переложите одну спичку так, чтобы оно выполнялось с точностью до 0,01.

Подсказка. Посмотрите статью Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 1, 1970.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**
Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), В. П. Лишевский, А. И. Маркуцевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. А. Панькова

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математичекой литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

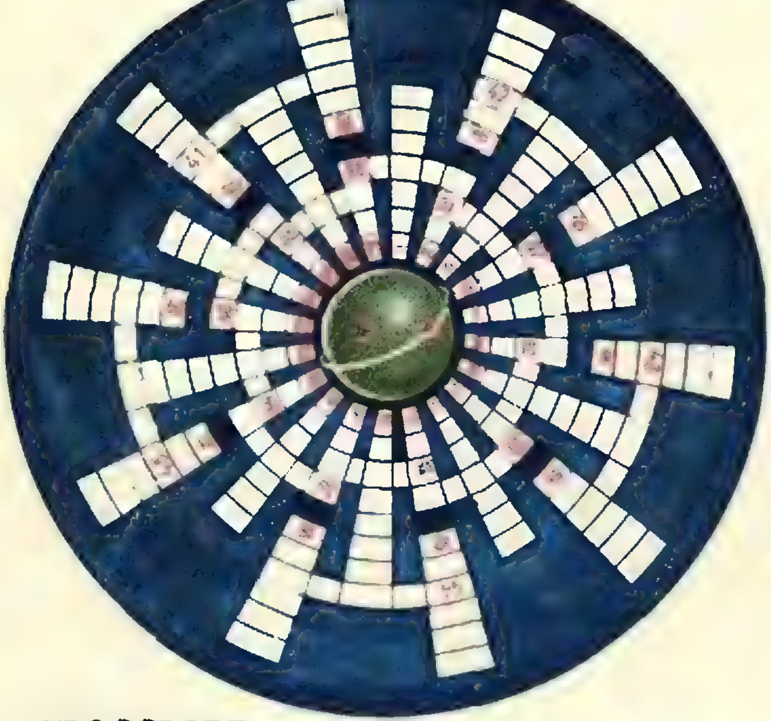
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/XII 1970 г.
Подписано в печать 23/II 1971 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,04. Тир. 285750
Т-02198.
Цена 30 коп. Заказ 848
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/1-42

Квант 4



Ответ на кроссворд, помещенный в № 3

По горизонтали:

1. Фаза. 4. Радар. 7. Кюри. 9. Наст. 10. Безу. 11. Фалес. 13. Труд. 15. Сила. 17. Связь. 18. Актив. 20. Пленка. 22. Камера. 23. Кредо. 25. Призма. 27. Работа. 31. Ток. 33. Цикл. 34. Утро. 35. Опал. 36. Этап. 38. Ряд. 41. Звезда. 43. Допуск. 45. Фурье. 47. Куммер. 49. Контур. 50. Режим. 51. Непер. 52. Рост. 55. Овал. 57. Совет. 58. Окно. 59. Весы. 60. Брус. 61. Фотон. 62. Тяга.

По вертикали:

1. Факт. 2. Анод. 3. Основа. 5. Доля. 6. Ледник. 7. Курс. 8. Игла. 11. Физика. 12. Сектор. 14. Реле. 16. Лира. 17. Скрип. 19. Вагон. 21. Тело. 24. Лоция. 25. Показ. 26. Метод. 28. Араго. 29. Артек. 30. Сопло. 31. Тор. 32. Код. 37. Репер. 39. Ядро. 40. Рупор. 42. Аффикс. 43. Дефект. 44. Фуко. 46. Дуга. 48. Резина. 49. Кеплер. 52. Румб. 53. Трос. 54. Свет. 55. Опыт. 56. Лупа.

КРОССВОРД

По радиусам:

1. Человек, совершивший первый в мире космический полет. 2. Команда, отдаваемая при запуске космического корабля. 3. Название космического корабля, впервые совершившего полет с человеком на борту. 4. Командир корабля «Союз-9». 5. Физическое понятие. 6. Малая планета, обладающая наименьшим из всех известных малых планет средним расстоянием от Солнца. 7. Астроном, открывший «на кончике пера» новую планету (вычисливший ее положение на небосводе). 8. Время суток. 9. Элементарные частицы. 10. Космодром. 11. Система точек, соединенных линиями (ориентированными или неориентированными). 12. Один из первых космонавтов, побывавших на Луне. 13. Тело, обращающееся вокруг планеты под действием ее притяжения. 14. Планета, «неправильности» в движении которой послужили основой для открытия новой планеты. 15. Восьмая по порядку от Солнца большая планета солнечной системы. 16. Математическое понятие. 17. Поликристаллическое состояние воды. 18. Камень космического происхождения. 19. Ученый, которого называли главным конструктором космических кораблей. 20. Одна из самых ярких звезд северного полушария. 21. Астроном, открывший законы движения планет. 22. Оптический прибор. 23. Созвездие. 24. Поток элементарных частиц, рожденных в космических лучах. 25. Коллективный псевдоним группы известных французских математиков. 26. Созвездие. 27. Самая распространенная смесь газов. 28. Ученый, создавший общую теорию относительности. 29. Форма «молодой» Луны. 30. Автоматическая космическая станция.

По окружностям:

31. Позывной в полете космонавта Быковского. 32. Позывной первой в мире женщины-космонавта. 33. Целая часть числа. 34. Астроном, обнаруживший новую планету на основе теоретических расчетов другого ученого. 35. Ученый, сформулировавший основные положения кибернетики. 36. Выдающийся немецкий физик-теоретик. 37. Выдающийся норвежский математик. 38. Световой квант. 39. Атмосферное явление. 40. Знак, применяемый при записи градиента функции. 41. Древнегреческий философ, автор известных парадоксов. 42. Сторона света. 43. Свойство некоторых частиц. 44. Способ передвижения. 45. Изобретатель радио.

НОМЕР
5

В номере:

П. Л. Чебышев (1821—1894) *Н. Н. Колесников* 1
О постулате Бертрана *М. И. Башмаков* 4
Графики потенциальной энергии *Р. Г. Минц* 8
Луночки Гиппократа *В. Н. Березин* 17

Математический кружок

Физика помогает геометрии *Б. Ю. Коган* 22

Лаборатория «Кванта»

Невозможные объекты *Л. Пенроуз, Р. Пенроуз* 26
Фотографирование невозможных объектов *В. И. Бахмин* 27

Задачник «Кванта»

Задачи 30
Решения задач М31-М33; Ф43, Ф48-Ф52 *И. Н. Бернштейн, А. Б. Зелевинский, А. Г. Кушниренко, И. Ш. Слободецкий* 32

Практикум абитуриента

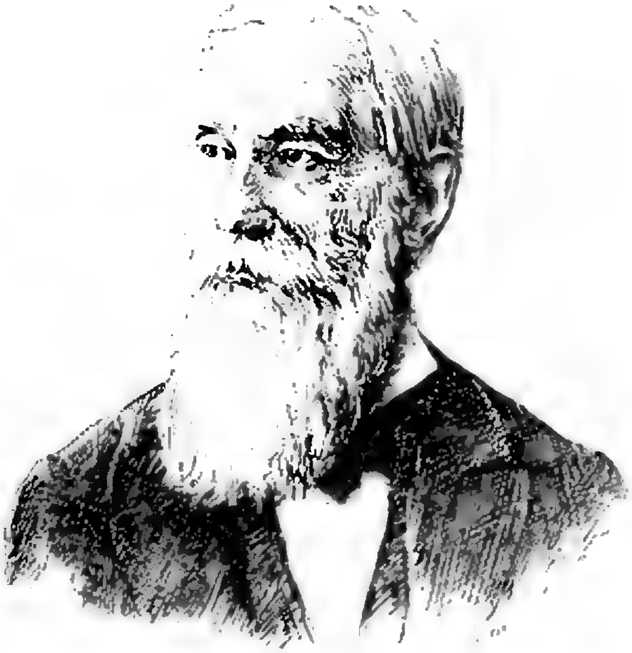
Что здесь — теряем или находим! *В. А. Петров* 40
Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1970 году *Ш. А. Алимов, Ф. П. Васильев, В. П. Моденов* 42
Вступительный письменный экзамен по математике в МФТИ в 1970 году *А. П. Савин, Б. В. Федосов* 46
Задачи на законы Ньютона *Ю. В. Зайчиков* 50

Информация

Московский математический... *А. Г. Терушкин* 58
Ответы, указания, решения 60
Уголок коллекционера *3-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ



(1821—1894)

Н. Н. Колесников

Пафнутий Львович Чебышев — великий русский математик и механик, родился в дворянской семье в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Получив домашнее образование, он в 1837 году поступил в Московский университет, с отличием окончил его в 1841 году, а в 1847 году переехал в Петербург, где в 1849 году защитил докторскую диссертацию.

Еще в 1841 году за работу «Вычисление корней уравнений» по теме, предложенной факультетом в Московском университете, Чебышев награждается серебряной медалью, а его докторская диссертация «Теория сравнений» удостоена специальной премии Петербургской Академии наук.

В 1859 году Пафнутий Львович избирается академиком Петербургской Академии наук.

Научные достижения П. Л. Чебышева нашли широкое признание и были высоко оценены еще при жизни ученого. Он был членом Берлинской и Болонской академий и одним из восьми иностранных членов Парижской Академии наук. Пафнутий Львович был избран членом-корреспондентом Лондонского Королевского общества *), Шведской Академии наук и почетным членом многих других российских и иностранных научных обществ и академий.

П. Л. Чебышев со времени приезда в Петербург начал чтение лекций в Петербургском университете, профессором которого он состоял с 1850 по 1882 год. В 1882 году он вышел в отставку, посвятив себя целиком научной работе в Академии наук. П. Л. Чебышев воспитал большую группу математиков, виднейшими представителями которой были: А. М Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов, Д. А. Граве, Г. Ф. Вороной А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев.

---

*) Так в Англии называется Академия наук, являющаяся одним из старейших научных учреждений мира

Научные интересы П. Л. Чебышева отличаются большим разнообразием и широтой. Он оставил после себя блестящие исследования в области математического анализа, особенно в теории приближения функций многочленами, в интегральном исчислении, теории чисел, теории вероятностей, геометрии, баллистике, теории механизмов и других областях знаний.

В каждой их этих областей науки Пафнутий Львович получил фундаментальные результаты, выдвинул новые идеи и методы, определившие развитие этих ветвей математики и механики на многие годы и сохранившие свое значение и до сих пор.

При этом поражает способность Чебышева простыми, элементарными средствами получать великолепные научные результаты.

Другой важнейшей особенностью научной деятельности П. Л. Чебышева является неизменный интерес к вопросам практики, стремление связать теоретические проблемы математики с запросами естествознания и техники, практической деятельности людей. В свете современных тенденций развития науки чрезвычайно прозорливой представляется программная установка научной деятельности П. Л. Чебышева: «Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды» (П. Л. Чебышев, Сочинения, т. II, Спб., 1907, стр. 239).

Следует отметить, что для самого Пафнутия Львовича интерес к практике оказался чрезвычайно плодотворным, так как многие его математические открытия были сделаны при решении прикладных задач. Так, например, изучение шарнирного механизма, известного под названием «параллелограмм Уатта», привело его к созданию основ теории наилучшего приближения функций многочленами, которая сейчас превратилась в широко развитую математическую область, имеющую большое прикладное значение. По богатству математических идей, значимости полученных результатов и изяществу их получения работа П. Л. Чебышева «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» (1854 г.) является выдающейся. В этом мемуаре Чебышев ставит и решает знаменитую задачу: «*Дана непрерывная функция* $f(x)$; *среди всех многочленов* $P(x)$ *степени* n *найти такой, чтобы в данном промежутке максимальное значение разности* $|f(x) - P(x)|$ *было возможно меньшим.*». Если эта функция сама многочлен степени $n+1$, то поставленная задача равносильна нахождению многочлена такой же степени, с тем же коэффициентом при старшем члене, который возможно меньше уклоняется от нуля на рассматриваемом интервале. Так возникли знаменитые «полиномы Чебышева» — полиномы, «наименее уклоняющиеся от нуля» в промежутке $[-1, +1]$: $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$. (Эти выражения являются многочленами от x степени n. Коэффициенты при старшей степени у этих многочленов равны единице.) Чебышев исследовал также приближение функций посредством рациональных функций и тригонометрических полиномов (Рациональная функция — это отношение двух многочленов, а тригонометрический полином — это многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.)

В теории вероятностей Чебышеву удалось необычайно простыми средствами получить ряд весьма важных результатов. Многие результаты и выводы были только намечены, не доведены до конца, но все работы Чебышева в этой области явились той базой, на которой развилась русская школа теории вероятностей. Строгие доказательства многих теорем, намеченные Чебышевым, и дальнейшее их развитие было проведено его учениками, академиками А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым.

Выдающееся значение для науки имели исследования П. Л. Чебышева в теории чисел. Впервые после Евклида удивительно остроумными и удивительно элементарными рассуждениями он получил важнейшие результаты в задаче о распределении простых чисел в работах «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах». П. Л. Чебышев доказал, что функция $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x — удовлетворяет неравенству

$$0{,}92 < \frac{\pi(x)\ln x}{x} < 1{,}06 \text{ *)}$$

при достаточно больших x. Это неравенство затем было несколько уточнено английским математиком Сильвестром, а французским математиком Адамаром было строго доказано, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[\pi(x) : \frac{x}{\ln x}\right] = 1$$

или асимптотически $\pi(x) \sim x/\ln x$.

Здесь же Чебышев доказал утверждение (так называемый постулат Бертрана), состящее в том, что между x и $2x (x \geqslant 2)$ всегда найдется хотя бы одно простое число **).

Классические результаты были получены Чебышевым и в области математического анализа.

Одной из наук, которой Пафнутий Львович интересовался всю жизнь, была теория механизмов и машин, причем Чебышев занимался не только теоретическими изысканиями в этой области, но и уделял большое внимание непосредственному конструированию конкретных механизмов.

Задолго до того, как советский «Луноход-1» проложил первую трассу на лунной поверхности, фантасты и ученые рассматривали различные варианты машин, которым будет суждено передвигаться по другим планетам. Большинство проектов сводилось к некоторому шагающему механизму. П. Л. Чебышев разработал вариант стопоходящей машины, имитирующей движение животного при ходьбе.

Огромное влияние П. Л. Чебышева на развитие математики в нашей стране не ограничивается его личными достижениями. Его работы, исключительно богатые новыми идеями и методами, дали мощный толчок к развитию многих ветвей математики и механики; кроме того, он лично ставил важные задачи и проблемы перед молодыми учеными. По его непосредственному совету А. М. Ляпунов начал исследования по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, где и получил классические результаты, имеющие первостепенное значение для механики и космогонии.

Великий математик и механик П. Л. Чебышев был передовым человеком своего времени. Так, например, вместе с двумя другими академиками-математиками — В. Г. Имшенецким и В. Я. Буняковским — он предложил физико-математическому отделению Петербургской Академии избрать членом-корреспондентом Академии замечательную русскую женщину — Софью Васильевну Ковалевскую *).

Много внимания уделял Чебышев вопросам народного образования, принимая активное участие в Ученом комитете Министерства просвещения.

Труды ученого, его научная, педагогическая и просветительская деятельность, основанная им знаменитая Петербургская математическая школа сыграли исключительно большую роль в развитии отечественной математики и механики. В 1944 году Академия наук СССР учредила премии имени П. Л. Чебышева за лучшие исследования в области математики и теории механизмов и машин.

---

*) $\ln x$ — логарифм числа x по основанию e, где $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

**) О методе, с помощью которого Чебышев получил свои замечательные результаты, см. на стр. 4—7.

*) С. В. Ковалевская была избрана 7 ноября 1889 года.

О ПОСТУЛАТЕ БЕРТРАНА

М. И. Башмаков

Среди 69 работ Пафнутия Львовича Чебышева две работы сыграли особенно важную роль в развитии теории чисел. Эти работы: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах», написанные им в молодые годы, посвящены труднейшему в теории чисел вопросу о распределении простых чисел.

Во второй из названных работ указаны неравенства, позволяющие достаточно точно оценить количество простых чисел в данном отрезке натурального ряда и, в частности, доказан такой факт: между x и $2x$ (где $x>1$) всегда есть хотя бы одно простое число. Это утверждение высказал известный французский математик Бертран, который проверил его в пределах имевшихся таблиц простых чисел, но доказать не сумел и принял в качестве постулата.

Мы проследим основные идеи Чебышева, приведшие его к этим оценкам, а затем предложим ряд задач, решение которых позволит читателям (достаточно хорошо знакомым со свойствами логарифмов) восстановить чебышевское доказательство постулата Бертрана и получить неравенства для количества простых чисел, не превосходящих заданной величины.

Читатель может удивиться, какое отношение имеют логарифмы к простым числам? В том-то и состоит заслуга Чебышева, что он указал, как можно использовать обычные функции анализа — корни, логарифмы — при изучении задач о целых числах. Если мы хотим обнаружить, есть ли хотя бы одно простое число на отрезке от n до $2n$, то можно поступить следующим образом:

1) придумать какую-нибудь функцию $y=f(x)$ вещественного аргумента x, которая не меняла бы своего значения, пока x пробегает отрезок между соседними простыми числами, и принимала бы большее значение при переходе через простое число;

2) доказать неравенства относительно функции f, которые помогли бы достаточно точно оценить скорость ее роста.

Для так подобранной функции разность $f(2n)-f(n)$ будет положительным числом в том и только том случае, если функция f возросла при переходе от n к $2n$, то есть если между n и $2n$ имеется хотя бы одно простое число.

Первому условию удовлетворить легко. Можно рассмотреть такую функцию: обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x

Например, $\pi(1)=0$ (единица не считается простым числом), $\pi(3)=2$, $\pi(9)=4$, $\pi(9{,}5)=4$, $\pi(10{,}9)=4$, $\pi(11)=5$ и т. д.

Конечно, если бы мы могли доказать, что

$$\pi(2x)-\pi(x)>0,$$

мы и доказали бы постулат Бертрана, так как

$$\pi(2x)-\pi(x)$$

как раз и обозначает число простых чисел, заключенных между x и $2x$

Однако дать точные оценки для $\pi(x)$ нелегко, и Чебышев для решения этой задачи предложил рассмотреть функцию, которая при переходе через простое число возрастала бы не на единицу, как $\pi(x)$, а более ощутимо. Он исследовал функцию

$$\theta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \ldots = \sum_{p \le x} \log p \quad (\theta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 2)$$

— сумму логарифмов всех простых чисел, не превосходящих x (или, что то же самое, логарифм произведения простых чисел, не превосходящих x). Тогда, как это очевидно из предыдущего, постулат Бертрана эквивалентен следующему неравенству:

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0. \qquad (1)$$

Для оценки функции $\theta(x)$ и доказательства (1) Чебышев использовал вспомогательную функцию $T(x)$:

$$T(x) = \log 2 + \log 3 + \ldots = \sum_{n \le x} \log n.$$

Функция $T(x)$ есть логарифм произведения всех целых чисел, не превосходящих x. Чебышев показал, что функции $\theta(x)$ и $T(x)$ связаны между собой следующим замечательным тождеством:

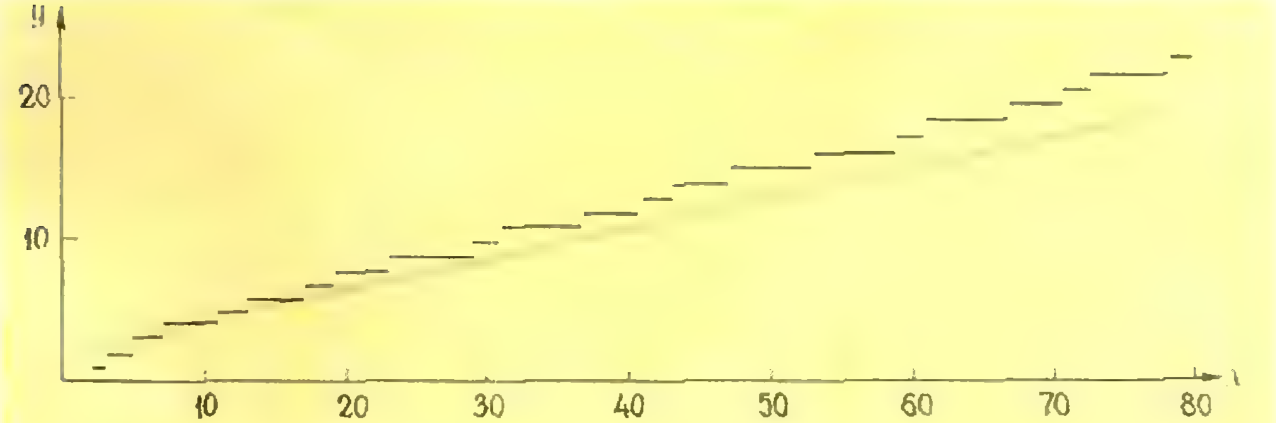
$$T(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{3}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{4}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}\right) + \ldots \qquad (2)$$

где суммирование обрывается тогда, когда аргумент $\sqrt[k]{x/m}$ становится меньше двух, а значение $\theta(\sqrt[k]{x/m})$ становится нулем. Функция T известна со времен Эйлера и еще задолго до Чебышева были доказаны неравенства, позволяющие довольно точно оценить порядок роста T.

Из этих неравенств Чебышев получает неравенства для $\theta(x)$ вида

$$Ax + v_1(x) < \theta(x) < \frac{6}{5}Ax + v_2(x), \qquad (3)$$

где A — некоторая постоянная, а дополнительные члены $v_1(x)$ и $v_2(x)$ при больших x значительно меньше x. Этого уже достаточно, чтобы при x, бо́льших некоторого x_0, доказать неравенство $\theta(2x) - \theta(x) > 0$ (у Чебы



На этом рисунке черные ступеньки изображают график функции $y = \pi(x)$, выражающей количество простых чисел, не превосходящих x. Эта функция ведет себя очень нерегулярно; например, можно доказать, что на ее графике встречаются сколь угодно длинные ступеньки. Чебышев впервые получил оценки для этой функции, характеризующие порядок ее роста. Он доказал, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log_e x$ (где $e = 2{,}718\ldots$, график функции $y = x/\log_e x$, при $x > 1$, изображен на том же рисунке красной линией) близко к единице при всех достаточно больших x; он доказал также, что черная и красная линия пересекаются бесконечное число раз.

шева $x_0 = 160$). Для x, меньших x_0, справедливость постулата Бертрана устанавливается прямой проверкой.

Дальнейшее развитие чебышевских идей привело к такому результату: для $x \geqslant 48$ $\theta\left(\frac{9}{8}x\right) - \theta(x) > 0$, то есть, начиная с указанного места, между x и $\frac{9}{8}x$ всегда есть хотя бы одно простое число.

Вы можете более детально проследить за ходом рассуждений Чебышева, решая следующие ниже задачи 1—5.

Для того чтобы $T(x)$ выразить через $\theta(x)$, удобно ввести еще одну вспомогательную функцию. Пусть p^{a_p} — наивысшая степень p, не превосходящая x. Определим функцию ψ так:

$$\psi(x) = a_2 \log 2 + a_3 \log 3 + a_5 \log 5 + \ldots = \sum_{p \leqslant x} a_p \log p.$$

Ясно, что $\psi(x)$ есть логарифм наименьшего общего кратного для всех целых чисел, не превосходящих x. T легко выражается через ψ.

Задача 1. Доказать, что

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots$$

Теперь надо связать функции ψ и θ.

Задача 2. Доказать, что

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \ldots$$

Решив задачи 1 и 2, вы установите тождество (2). Оценим теперь $T(x)$.

Задача 3. Докажите, что существует такое вещественное число e, что при всех натуральных n

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

Для решения этой задачи полезно показать, что каждое из чисел

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

меньше каждого из чисел

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};$$

отсюда следует, что существует такое число e, которое больше всех a_n и меньше всех b_n. Это и есть то число, которое мы ищем (о некоторых его свойствах рассказывалось на последней странице нашего журнала № 1, 1971).

Решив эту задачу, вы получите такие неравенства для $T(x)$ *):

$$(x-1)(\log x - 1) < T(x) < (x+1)\log x - x \qquad (4)$$

Сам Чебышев пользовался более точными неравенствами.

Из оценки для $T(x)$ Чебышев получает оценки для $\psi(x)$, а затем и для $\theta(x)$.

Чтобы выразить ψ через T, Чебышев замечает следующее. Рассмотрим сумму

$$S = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1 и приведем эту сумму к такому виду

$$S = A_1\psi(x) + A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots$$

Задача 4. Проверьте, что коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \ldots$ меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений n коэффициенты A_n составляют следующую последовательность: 1, 0, 0, 0, 0, −1, 1, 0, 0, −1, 1, −1, 1, 0, −1, 0, 1, −1, 1, −1, 0, 0, 1, −1, 0, 0, 0, 0, 1, −1.

Отсюда видно, что сумма S записывается знакопеременным рядом $S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \ldots$

Так как ψ неубывающая функция, то

$$S = \psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{6}\right) - \psi\left(\frac{x}{7}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{10}\right) - \psi\left(\frac{x}{11}\right)\right) - \ldots \leqslant \psi(x) \qquad (5)$$

Аналогично

$$S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right)\right) + \ldots \geqslant \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right). \qquad (6)$$

Из (2) сразу получается неравенство для ψ, которое оценивает ее снизу, так как мы знаем неравенства для T и получили оценку для ψ через S, то есть комбинацию значений T. Эта оценка будет иметь такой вид: $\psi(x) \geqslant A_1(x) + \omega_1(x)$, где ω_1 растет медленнее, чем x, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\omega_1(x)}{x} = 0$.

Для получения оценки сверху надо освободиться еще от $\psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Применяя неравенство (6) к $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \frac{x}{6^3}$ и т. д. и скла-

---

*) В этой формуле логарифмы берутся по основанию e — это так называемые натуральные логарифмы.

дывая их найдем неравенство для $\psi(x)$ типа $\psi(x) \leqslant A_2 x + \omega_2(x)$, где ω_2 растет медленнее чем x.

Задача 5. Докажите, что

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqslant \theta(x) \leqslant \leqslant \psi(x) - \psi(\sqrt{x})$$

Отсюда уже получаются нужные оценки (3).

Из результатов Чебышева не только вытекала справедливость постулата Бертрана, но, что еще более важно, из них получались неравенства, позволяющие хорошо оценить функцию $\pi(x)$:

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x},$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные *). Вы сможете доказать такие неравенства, решив следующую задачу.

Задача 6. Докажите, что

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x) + \theta(x)}{\log x}.$$

Несколько иные доказательства постулата Бертрана и неравенств для $\pi(x)$ можно прочесть в книгах [2] и [3]. В них вместо $n!$ оценивается $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (см. решение задачи М23, «Квант» № 2, 1971, стр. 27).

Литература

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, 1947.
2. Э. Трост. Простые числа. Физматгиз, 1959.
3. И. М. Яглом, А. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., 1954, раздел II, п. 14.

КОЛЬКО ВОПРОСОВ

Коля и Ося играют в такую игру. Ося задумывает несколько чисел, а Коля их отгадывает. При этом ему разрешается задавать Осе только «арифметические» вопросы: например он спрашивает, чему равно произведение всех этих чисел или сумма кубов, и т. д.

Ответом на каждый такой вопрос является некоторое число. По этим числам — ответам Коля отгадывает задуманные Осей числа, причем он может отгадывать их не по одному, а сразу группами. Например, он задает два вопроса и по полученным ответам отгадывает три из загаданных чисел.

Вопросы могут быть и более сложными: Коля может попросить Осю, чтобы он ответил, какое получится число, если перемножить первые два задуманных числа, сложить полученный результат с третьим числом, потом возвести полученное число в степень, равную четвертому числу, и т. д. При этом нужно помнить, что Коля не знает, сколько именно чисел задумал Ося.

Какое минимальное количество вопросов должен задать Коля, если он знает, что Ося задумал натуральные числа?

Сколько понадобится вопросов, если Ося задумывает целые числа обоих знаков?

---

*) Логарифм здесь можно брать по любому основанию a, большему единицы; от a зависят только значения постоянных c_1 и c_2, поскольку $\log_b x$ получается из $\log_a x$ умножением на постоянное число $\log_a b$. Более естественно использовать натуральный логарифм, потому что именно функция $x/\log_e x$ эквивалентна $\pi(x)$ при больших x, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log_e x} = 1$. Это было доказано уже значительно позже, а из работы самого Чебышева следовало только, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log_e x$ заключено между 0,921 и 1,106 и что если предел при $x \to \infty$ существует, то он равен единице.

ГРАФИКИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Р. Г. МИНЦ

Как выяснить, ограничено ли движение тела и в каких пределах? Существуют ли положения равновесия, и если да, то какие они — устойчивые или неустойчивые?

В этой статье мы покажем, что на подобные вопросы очень легко ответить, если известна потенциальная энергия тела. Мы обсудим, когда имеет смысл говорить о потенциальной энергии и как вычислить ее величину в каждой точке

Раз речь зашла о потенциальной энергии, значит, мы хотим изучать движение тел, точнее говоря, материальных точек *), исходя из закона сохранения механической энергии.

Этот закон утверждает, что для замкнутой системы материальных точек (тел) сохраняется величина

$$E=T+U. \qquad (1)$$

Сумма

$$T=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\ldots+\frac{m_nv_n^2}{2}$$

называется кинетической энергией системы, а U — потенциальной энергией взаимодействия тел. Кинетическая энергия в формуле (1) отражает собственно движение тел, а потенциальная энергия, которая зависит от расстояний между телами, их взаимное влияние друг на друга.

В дальнейшем, для простоты, мы будем рассматривать движение лишь одной из материальных точек *), предполагая, что все остальные покоятся. В таких случаях обычно говорят о движении частицы во внешнем силовом поле, а формула (1) принимает вид

$$E=\frac{mv^2}{2}+U. \qquad (2)$$

Говоря о движении частицы во внешнем поле, мы рассматриваем влияние неподвижных частиц на движущиеся, причем вся система частиц как целое является замкнутой. В этом, однако, содержится некая тонкость. Проследим ее внимательно на примере двух материальных точек с массами m и M. Пусть частица массы M в некоторый момент покоилась. Выясним, при каком условии она и дальше остается неподвижной, то есть можно будет говорить о движении частицы массы m во внешнем поле. Воспользуемся законом сохранения количества движения (ведь наша система тел замкнутая): $M\vec{v}+m\vec{v}_1=m\vec{v}_0$. (Здесь v_0 — начальная скорость частицы с массой m, v_1 — ее скорость через некоторое время и v — скорость, приобретаемая частицей с массой M.)

---

*) Как обычно, под материальной точкой мы подразумеваем тело, собственные размеры которого в данной задаче пренебрежимо малы.

*) Задача о движении большого числа взаимодействующих между собой тел чрезвычайно сложна. До сих пор удалось в общем виде решить лишь задачу о двух телах.

Отсюда $\vec{v}=\frac{m}{M}(\vec{v}_0-\vec{v}_1)$. Если $\vec{v}_1\neq\vec{v}_0$, то $\vec{v}=0$ только при $M\to\infty$. Физически это означает, что $m\ll M$. Таким образом, внешнее поле — результат действия тяжелых неподвижных частиц на легкую. Напомним два типичных примера внешнего поля: спутник в поле притяжения Земли, электрон в поле ядра. В каждом из этих примеров, конечно же, выполняется условие $m\ll M$.

Если полная энергия E частицы задана, то соотношение (2) накладывает ограничения на то, в какой области пространства может находиться частица. Действительно, ведь кинетическая энергия $E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}$ положительна (если бы она была отрицательной, то скорость частицы $v=\sqrt{\frac{2}{m}E_{\text{кин}}}$ должна была бы быть мнимой!), а из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2}=E-U.$$

Таким образом, $E\geqslant U$; мы получили критерий для определения области, в которой возможно движение с полной энергией E. В точках, где $E=U$, кинетическая энергия, а значит и скорость, обращается в нуль.

Рассмотрим в качестве примера движение тела вдоль прямой (ось x). Тогда потенциальная энергия зависит лишь от положения на этой прямой: $U=U(x)$. В этом случае наш критерий очень удобно применять графически. Проведем на графике потенциальной энергии горизонтальную прямую $U(x)=E$. Всюду, где график потенциальной энергии проходит ниже прямой, $E>U$ и движение возможно. В точках пересечения скорость обращается в нуль (здесь $E=U$), а в других областях движение невозможно. На рисунке 1 приведены примеры зависимости потенциальной энергии от координаты и показано, в каких областях может двигаться тело.

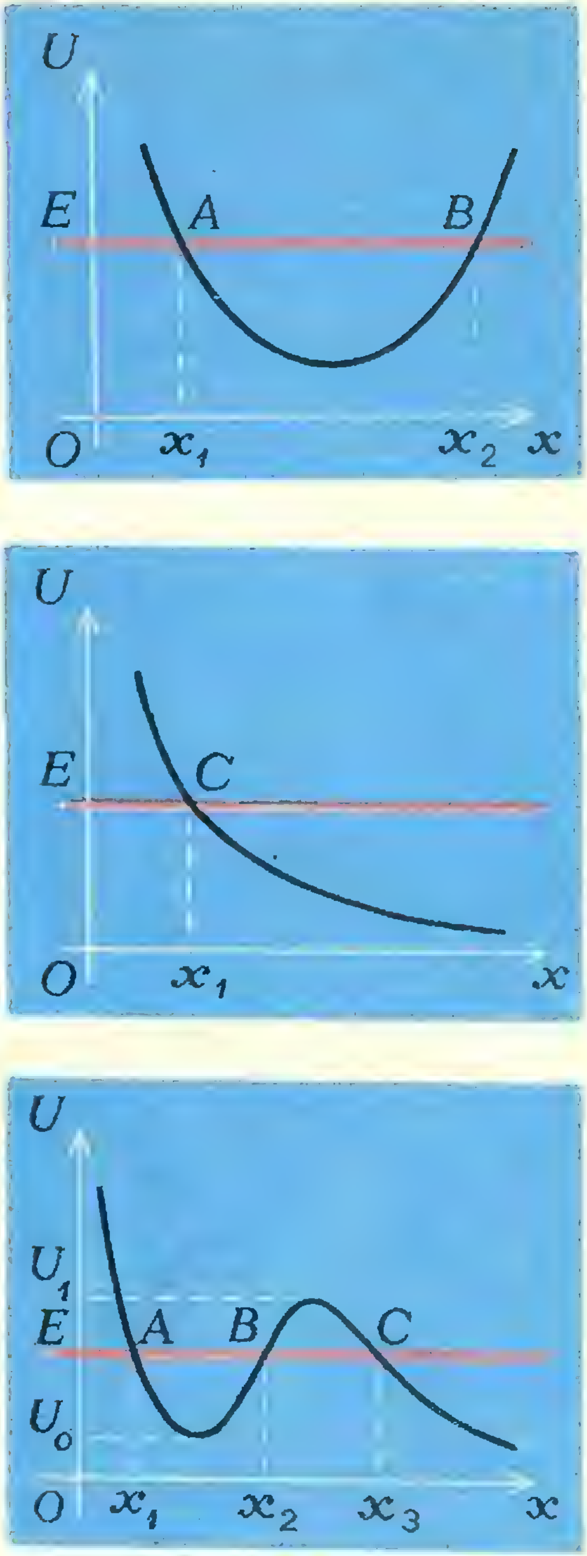


Рис. 1. а) Движение возможно в области $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. б) Движение возможно в области $x\geqslant x_1$. в) Движение возможно в областях $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и $x\geqslant x_3$.

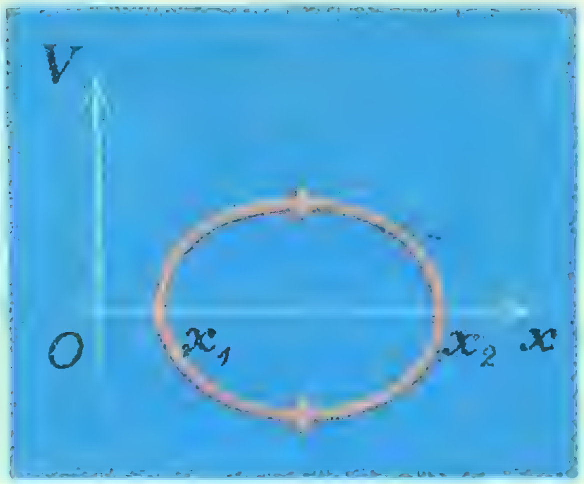


Рис. 2. Тело, двигаясь влево, подходит к точке x_1, где его скорость равна нулю. Однако остаться в этой точке оно не может, так как на него действует сила (см. правило санок на стр. 12). Поэтому дальше тело будет двигаться вправо, увеличивая скорость.

Зная потенциальную энергию, легко определить скорость частицы в каждой точке. Так как $\frac{mv^2}{2} = E - U$, то

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}.$$

Два знака скорости соответствуют двум возможным направлениям движения вдоль оси x. На рисунке 2 графически показана зависимость скорости частицы от ее положения для случая, когда энергия и потенциальная энергия соответствуют рисунку 1*а*. Направление движения обозначено на графике стрелкой.

Итак, мы видим, что с помощью графиков потенциальной энергии можно просто и наглядно выяснить, где возможно движение, какой вид имеют траектории и как зависит скорость тела от его положения. При выяснении этих вопросов нам нужно было знать поведение потенциальной энергии как функции координат «в целом», то есть как она ведет себя на всей траектории.

Давайте теперь посмотрим, с чем связана скорость изменения потенциальной энергии, то есть величина

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x_2) - U(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad (3)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ очень мало́

По закону сохранения механической энергии

$$\Delta U = U(x_2) - U(x_1) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = $$
$$= \frac{m}{2}(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) \qquad (4)$$

где v_1 — скорость тела в точке x_1, а v_2 — его скорость в точке x_2. На малом участке Δx действующую на тело силу можно считать постоянной. Движение под действием постоянной силы, которую обозначим F, равноускоренное, а ускорение $a = F/m$. В таком случае $v_2 - v_1 = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t$ (Δt — время движения), а $\frac{v_1 + v_2}{2}$ равно средней скорости $\frac{v_1 + v_2}{2} = v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Подставим эти выражения в формулу (4):

$$\Delta U = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(-\frac{F}{m}\Delta t\right) = -F\Delta x.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = -F. \qquad (5)$$

Формулу (5) можно получить и иначе, учитывая, что при равномерном движении меняется лишь потенциальная энергия тела и изменение ее равно работе силы, действующей на тело.

Выясним геометрический смысл формулы (5). Пусть нам задан график потенциальной энергии. Ясно, что чем меньше величина $x_2 - x_1$, тем точнее скорость изменения потенциальной энергии совпадает с тангенсом угла наклона касательной к кривой потенциальной энергии (рис. 3). Действи

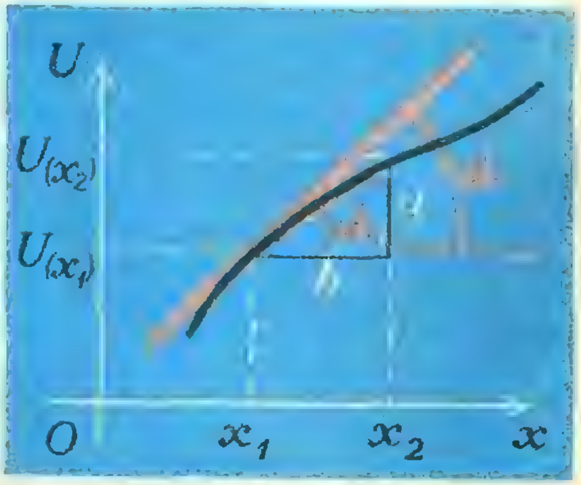


Рис. 3

тельно, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a}{b} = \frac{U(x_2) - U(x_1)}{x_2 - x_1}$, а чем меньше $x_2 - x_1$, тем с большей точностью угол α_1 равен углу α. Таким образом, мы приходим к выводу, что тангенс угла наклона касательной к графику потенциальной энергии, взятый с обратным знаком, совпадает с действующей на тело силой. Это значит, что чем круче растет потенциальная энергия, тем больше величина силы и наоборот.

После того как формула (5) приобрела наглядный геометрический смысл, легко, например, выяснить, существуют ли положения равновесия и какие они. Положением равновесия мы называем точку, в которой тело может пребывать сколь угодно долго, если, конечно, вначале оно обладает нулевой скоростью. Когда это возможно? Изменение скорости характеризуется ускорением: если оно равно нулю, то скорость тела неизменна. Ускорение же пропорционально действующей на тело силе. Значит, положения равновесия — это те точки, где сила обращается в нуль.

Обратимся снова к графику потенциальной энергии. Как мы уже видели, сила, действующая на тело, равна взятому с обратным знаком тангенсу угла наклона касательной к кривой потенциальной энергии. Если этот угол равен нулю, то равна нулю и сила. Таким образом, на графике потенциальной энергии положения равновесия соответствуют тем точкам, в которых касательная параллельна оси абсцисс. Очевидно, например, что положениями равновесия являются максимумы и минимумы потенциальной энергии (рис. 4).

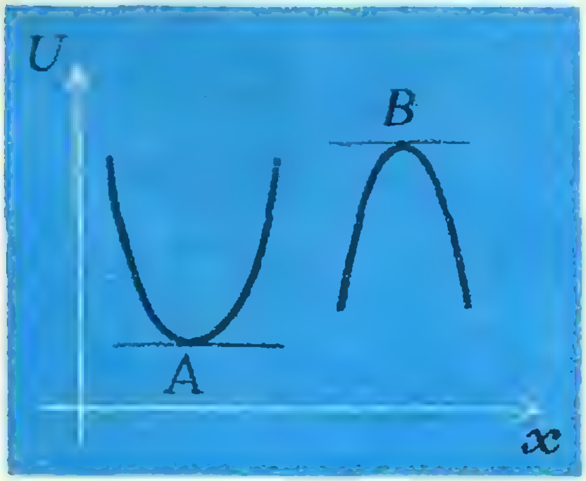


Рис. 4

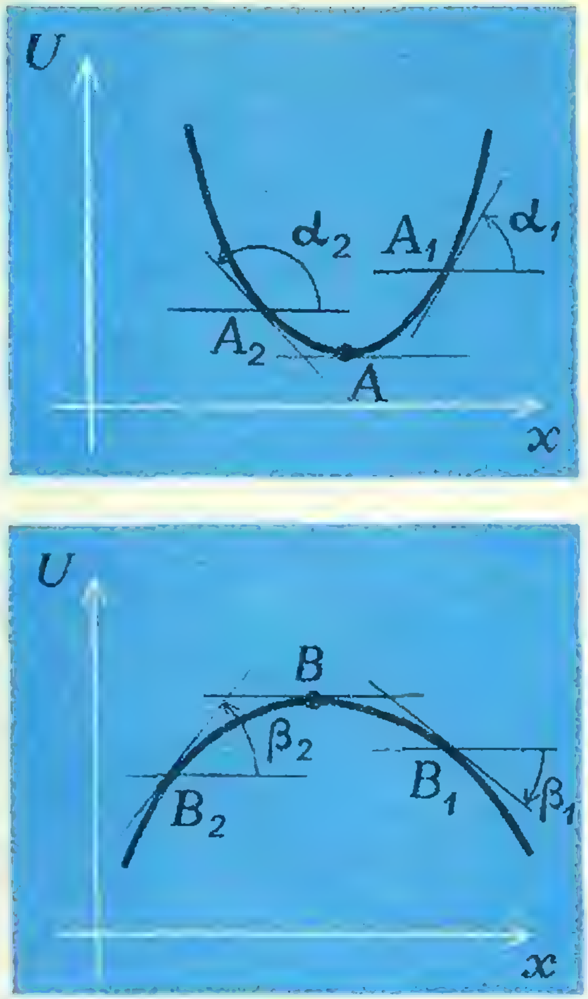


Рис. 5а,б

Положения равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Что имеется в виду? Пусть мы слегка отклонили тело от положения равновесия. Если при этом сила, действующая на тело, возвращает его обратно, то равновесие называется устойчивым, если нет, то неустойчивым.

Исследуем на устойчивость положение равновесия, соответствующее минимуму на кривой потенциальной энергии (точка A на рис. 4). Пусть тело сдвинулось от точки A вправо. В новом положении A_1 (рис. 5 a) тангенс угла наклона касательной положителен, а сила отрицательна, то есть направлена в противоположную смещению сторону и возвращает тело к точке A. Если слегка сдвинуться влево от точки A, то в таком положении (A_2 на рис. 5 *а*) тангенс угла наклона касательной отрицательный, сила положительна, то есть направлена к точке A и заставляет тело вернуться в исходное положение. Таким образом, положение равновесия в минимуме потенциальной энергии является устойчивым. Аналогично можно рассмотреть устойчивость положения равновесия, если потенциальная энергия максимальна (рис. 5 *б*).

Итак, мы видим, что по кривой потенциальной энергии можно найти величину действующей на тело силы, легко определить, где находятся положения равновесия и какие они. В этом смысле график потенциальной энергии можно сравнить с ледяной горкой, откуда спускаются на санках. В тех местах, где горка крутая, санки разгоняются быстрее, на пологом спуске — медленнее. Вершина горки и углубления в ней — положения равновесия. Ведь если поставить туда санки, они там и останутся. При этом вершина — положение неустойчивого равновесия, а ложбинки — устойчивого.

Теперь, пожалуй, пора поговорить о том, как вычислить величину потенциальной энергии. Для этого вернемся снова к формуле (5) и перепишем ее в виде

$$U(x_2) - U(x_1) = -F \cdot (x_2 - x_1). \qquad (6)$$

Напомним, что длина $\Delta x = x_2 - x_1$

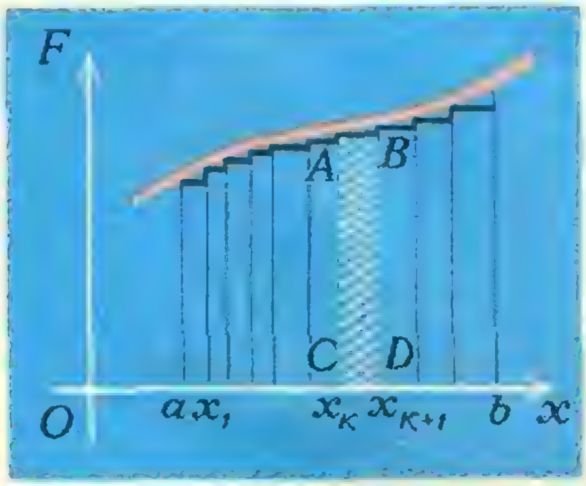


Рис. 6

выбрана здесь столь малой, что силу F можно считать постоянной на всем участке Δx. Величина $F \cdot (x_2 - x_1)$ равна работе силы F на пути из точки x_1 в точку x_2. Следовательно, разность потенциальных энергий равна работе силы, взятой с обратным знаком. Последнее утверждение справедливо при любом расстоянии между соответствующими точками. Чтобы доказать это, разобьем путь из точки a в точку b на n маленьких участков таких, что на каждом из них справедлива формула (6). Обозначим работу силы F на пути из точки x_k в точку x_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, n$) так:

$$F \cdot (x_{k+1} - x_k) = A_{k+1}.$$

Применяя формулу (6) к каждому из участков пути, найдем, что

$$U(x_1) - U(a) = -A_1,$$
$$U(x_2) - U(x_1) = -A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U(b) - U(x_{n-1}) = -A_n.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$U(b) - U(a) = -(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = -A, \qquad (7)$$

где A — работа силы F на пути из a в b.

Формула (7) приобретает наглядный геометрический смысл, если обратиться к графику зависимости силы от координаты $F = F(x)$ (рис. 6). Суть доказательства, которое мы только что провели, заключается в том, что истинную зависимость силы от координаты мы заменили ступенчатой, так как на каждом участке сила предполагалась постоянной. Ясно, что если число ступенек сделать очень большим, то обе кривые — черная и красная — фактически совпадут.

Обратим теперь внимание на то, что площадь любого прямоугольника на рисунке 6 равна работе силы F на соответствующем участке пути, а сумма площадей всех таких прямоугольников равна работе на пути из a в b; но площадь под ступенчатым графиком силы равна площади под истинным графиком силы. Это означает, что разность потенциальных энергий тела равна взятой с обратным знаком *) площади под графиком зависимости действующей на тело силы от координаты.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть сила, действующая на тело, постоянна, то есть не зависит от координат **). Тогда ее график — прямая, параллельная оси абсцисс. Площадь под ней равна $F \cdot (x - x_0)$, откуда для разности потенциальных энергий получаем

$$U(x) - U(x_0) = -F \cdot (x - x_0) \quad (8)$$

(рис. 7 *а*,*б*).

С помощью соотношения (8) получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F \cdot (x - x_0).$$

$$\frac{mv^2}{2} - Fx = \frac{mv_0^2}{2} - Fx_0,$$

то есть потенциальная энергия $U = -Fx$. Однако это не единственная возможность, с тем же основанием мы могли бы написать и такое равенство

$$\frac{mv^2}{2} - Fx + C = \frac{mv_0^2}{2} - Fx_0 + C,$$

где C — постоянное число. Но тогда потенциальная энергия $U = -Fx + C$. Таким образом, мы видим, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной. Это обстоятельство следует уже из самого закона сохранения механической энергии. Ведь если мы говорим, что сохраняется величина $E = \frac{mv^2}{2} + U$, то сохраняется и $E' = \frac{mv^2}{2} + U + C$, где C — некоторая постоянная. Но в таком случае $U' = U + C$. Это означает, что потенциальную энергию можно определить лишь с точностью до произвольной постоянной, которую всегда выбирают из соображений удобства *). Конечно же, такая неопределенность потенциальной энергии никак не сказывается на сделанных нами выводах о характере движения в данном поле, о наличии в нем положений равновесия и на зависимости скорости тела от координаты. В этом вы легко можете убедиться, надо только одновременно с изменением потенциальной энергии на величину C изменить и полную энергию тела на такую же величину. Дело в том, что для полного описания движения тела надо задать его положение и скорость в некоторый момент

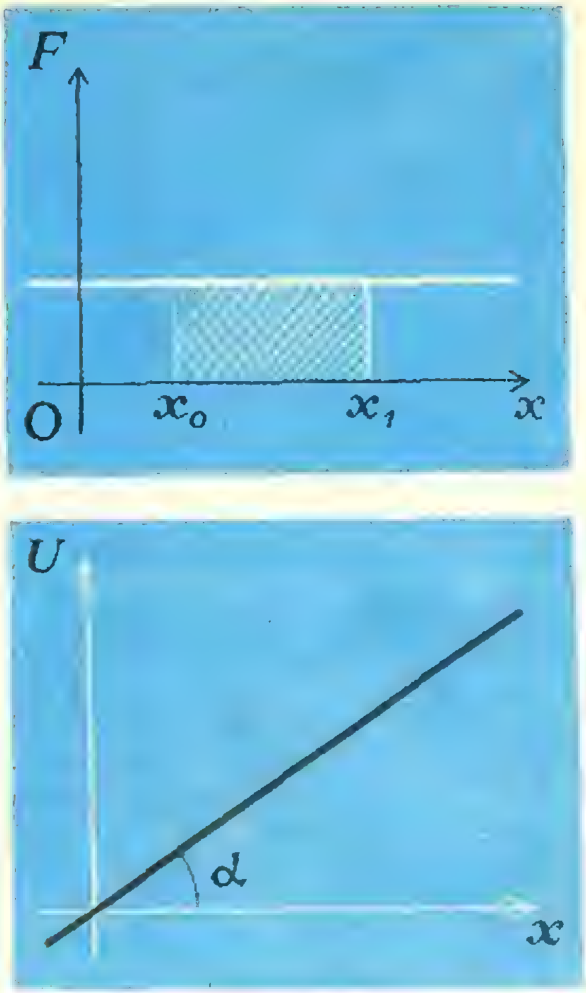


Рис. 7*а*,*б*

---

*) Надо отметить, что если сила отрицательна, то соответствующему участку площади следует приписать знак минус.

**) Поле, в котором сила, действующая на тело, всюду постоянна, называется однородным. Однородными, например, являются поле тяготения вблизи поверхности Земли $F = mg$ и электрическое поле внутри плоского конденсатора.

*) Так, например, в случае однородного поля постоянную, как правило, полагают равной нулю, то есть считают, что потенциальная энергия равна нулю в начале координат (см. рис. 7 *б*). Вспомните, что именно так вы обычно поступаете, решая задачи о движении тел вблизи поверхности Земли.

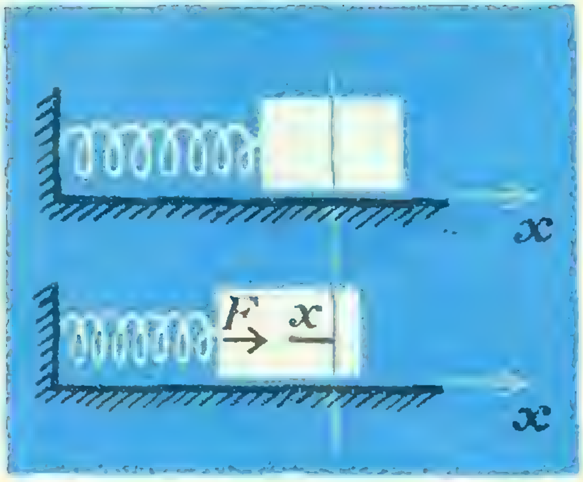


Рис. 8

времени, тем самым мы будем знать $\frac{mv_0^2}{2}$ и $U(x_0)$. Полная же энергия $E=\frac{mv_0^2}{2}+U(x_0)$. Поэтому при добавлении к U некоторой постоянной величины, энергия E увеличивается ровно на столько же.

Рассмотрим теперь движение кубика на пружинке в отсутствие трения (рис. 8) и вычислим, чему равна потенциальная энергия в этом случае. По закону Гука сила, действующая на кубик, равна $F=-kx$, где k — жесткость пружины, x — ее деформация. В таком случае график силы — прямая, тангенс угла наклона которой к оси x равен k (рис. 9*а*).

Разность потенциальных энергии $U(x_1)-U(x_0)$ равна площади заштрихованной на рис. 9 *а* трапеции $ABCD$, высота которой $BC=x_1-x_0$, а полусумма оснований $\frac{AB+CD}{2}=\frac{kx_0+kx_1}{2}$. Воспользовавшись формулой площади трапеции, находим, что

$$U(x_1)-U(x_0)=\frac{(x_1-x_0)(kx_0+kx_1)}{2}=$$
$$=\frac{k(x_1^2-x_0^2)}{2}=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_0^2}{2}. \quad (9)$$

В результате для $U(x)$ получаем следующее выражение: $U(x)=\frac{kx^2}{2}$ *).

График потенциальной энергии в этом случае является параболой с минимумом в точке $x=0$ (рис. 9*б*).

Еще одна интересная задача — движение одного заряда в поле другого или, что почти одно и то же, движение одной массы в поле другой. Действительно, в первом случае на тело по закону Кулона действует сила $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$, а во втором по закону всемирного тяготения $F=-\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$, то есть зависимость силы от расстояния между телами r в обоих случаях одинакова, отличие состоит лишь в коэффициенте. Разность потенциальных энергий, как мы знаем, равна площади под кривой $F=\frac{\alpha}{r^2}$ (рис. 10*а*), где для одной задачи $\alpha=q_1q_2$, а для другой $\alpha=-\gamma m_1m_2$. К сожалению, в отличие от двух разобранных выше

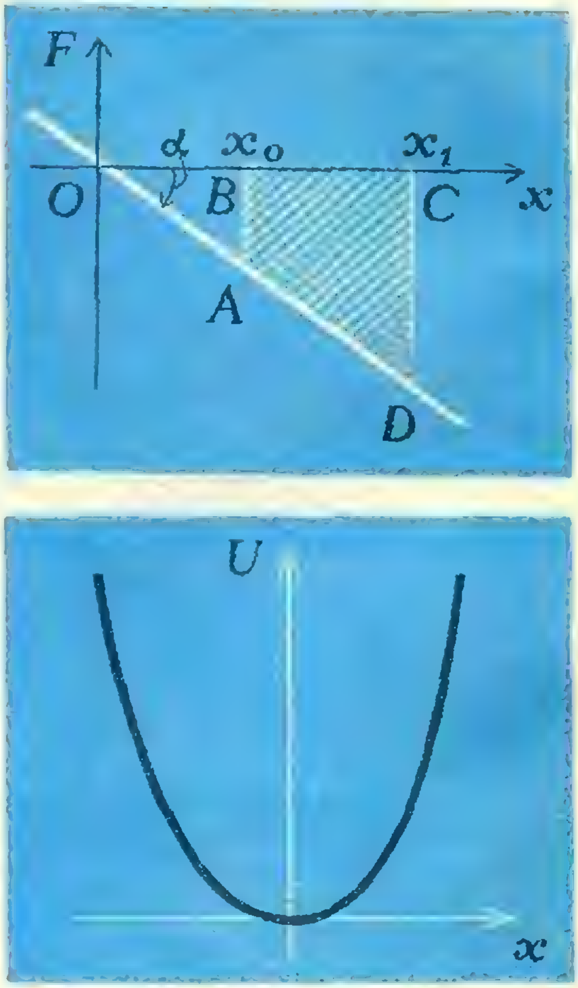


Рис. 9*а*,*б*

---

*) Аналогично случаю однородного поля постоянную C мы выбрали здесь так, чтобы $U(0)=0$.

случаев ($F=\text{const}$, $F=-kx$) вычислить эту площадь оказывается не под силу без знания интегрального исчисления. Если же ее найти, то окажется, что для силы, меняющейся по закону $F=\frac{\alpha}{r^2}$, потенциальная энергия

$$U=\frac{\alpha}{r} \qquad (10)$$

Обратите внимание, что в формуле (10) мы выбрали постоянную C так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на бесконечности. Почему это удобно и когда? Вспомним, что потенциальная энергия характеризует действие тел друг на друга — взаимодействие; если на бесконечности сила обращается в нуль, то чем дальше тела отстоят друг от друга, тем слабее их взаимное влияние. Именно этому и соответствует выбор постоянной в нашем и аналогичных ($F(\infty)=0$) случаях.

Из формулы (10) следует, что вид потенциальной энергии существенным образом зависит от знака α (см. рис. 10*б*). Если $\alpha>0$, то сила $F=\frac{\alpha}{r^2}>0$, и мы имеем дело с отталкиванием (одноименные заряды, $\alpha=q_1q_2>0$). Если $\alpha<0$, то сила $F=-\frac{|\alpha|}{r^2}<0$, что соответствует притяжению (разноименные заряды, $\alpha=-q_1|q_2|$). Здесь, пожалуй, стоит еще раз вернуться к аналогии с санками, спускающимися с ледяной горки. Заметьте, что если поставить санки на горку, имеющую профиль интересующей нас потенциальной энергии, то они покатятся в направлении действия силы. Такое мнемоническое правило дает возможность сразу определить, что имеет место — притяжение или отталкивание. Действительно, ведь если санки покатятся к точке $r=0$ (например, нижняя кривая на рис. 10*б*), то имеет место притяжение, если наоборот (например, верхняя кривая), то — отталкивание.

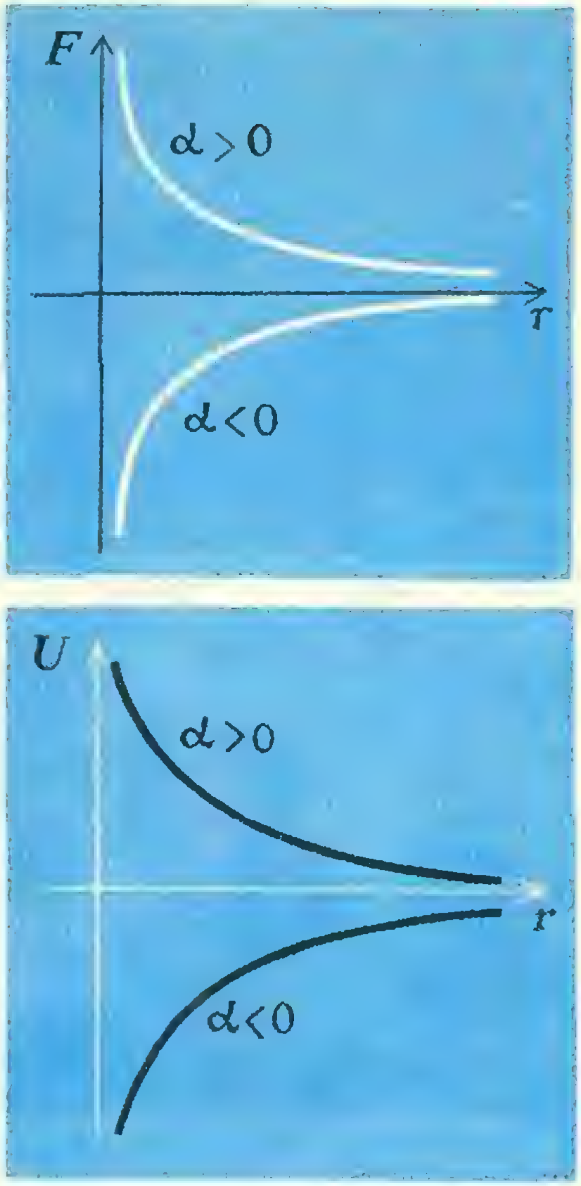


Рис. 10*а, б*

Это же правило позволяет качественно построить вид потенциальной энергии для тех случаев, когда не удается его вычислить *). Давайте проследим за тем, как это делается, на примере двухатомной молекулы. Известно, что на большом расстоянии атомы устойчивых молекул притягиваются, если же сильно сблизить атомы, то они начнут отталкиваться. Характер притяжения и отталкивания существенным образом зависит от строения электронных оболочек атомов, однако, можно утверждать сле-

---

*) Это может быть связано как с вычислительными трудностями (например, незнание интегрального исчисления), так и с принципиальными (например, зависимость ядерных сил от расстояния известна лишь приближенно).

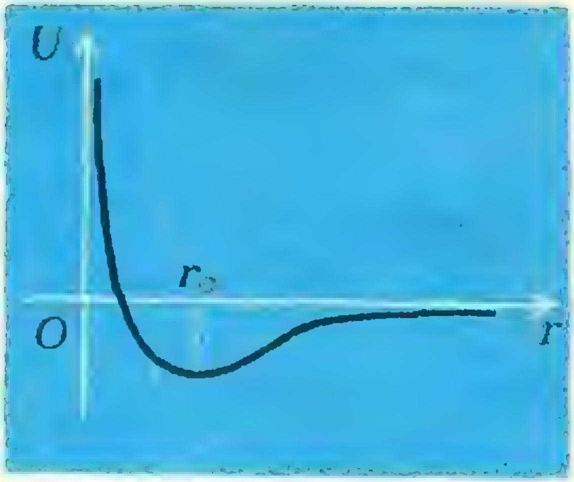


Рис. 11

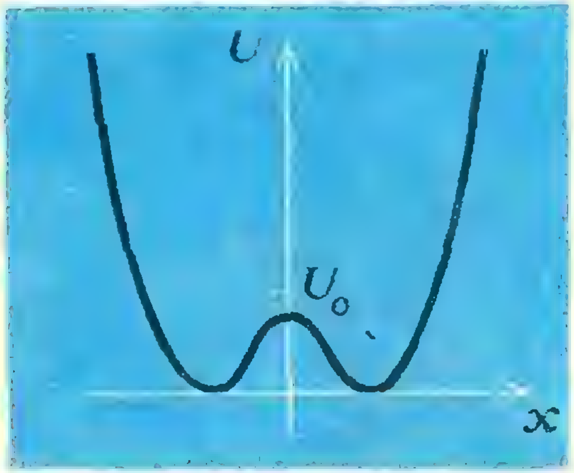


Рис. 12

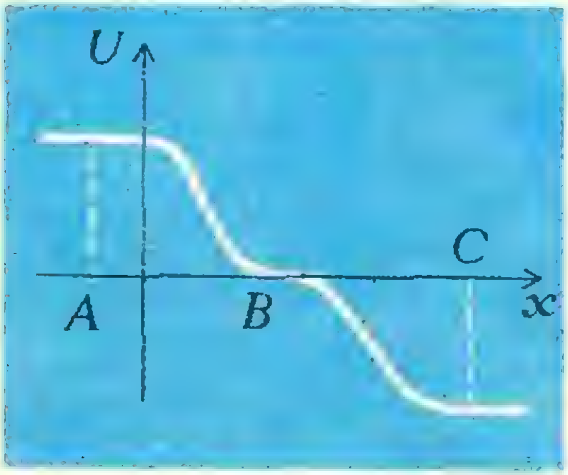


Рис. 13

дующее. На больших расстояниях притяжение быстро убывает, а отталкивание при сближении, начиная с некоторого расстояния, возрастает очень резко. Описанной картине взаимодействия атомов соответствует график потенциальной энергии, показанный на рисунке 11. Убедитесь в этом, воспользовавшись аналогией с ледяной горкой. Точка $r = r_0$ соответствует положению устойчивого равновесия, и поэтому r_0 равно расстоянию между атомами в молекуле.

В заключение подведем некоторые итоги. Мы видели, что по графику потенциальной энергии можно выяснить ряд существенных характеристик движения (число различных траекторий в зависимости от энергии, ограничено движение или нет, имеются ли положения равновесия и какие они: устойчивые или неустойчивые), каждая из них, как оказалось, имеет простой геометрический смысл. Легко также определить величину и направление действующей на тело силы («правило санок»). Мы показали, что площадь под графиком силы, взятая с обратным знаком, равна потенциальной энергии тела. Это дает возможность в ряде случаев непосредственно вычислить потенциальную энергию, что сильно облегчает решение различных задач.

И, наконец, вы видели, как качественный вид потенциальной энергии позволяет уяснить существо вопроса и дать на него ответ.

Попробуйте теперь самостоятельно решить следующие задачи.

Упражнения

1. Выяснить область возможного движения при

$$E<U_0 \text{ и } E>U_0,$$

если потенциальная энергия имеет вид, изображенный на рис. 12.

2. Найти положения равновесия по кривой потенциальной энергии (рис. 13) и выяснить их устойчивость.

Нарисовать график зависимости силы от координаты.

3. Показать геометрически, что при изменении потенциальной энергии на постоянную величину C сила, действующая на тело в каждой точке, не изменится.

4. Кубик со стороной a плотности $\rho_к$ плавает на поверхности жидкости, плотность которой $\rho_ж$. Нарисовать графики силы, действующей на кубик, и потенциальной энергии в зависимости от глубины погружения.

ЛУНОЧКИ ГИППОКРАТА

В. Н. Березин

В пятом веке до нашей эры, то есть почти две с половиной тысячи лет назад, жил в Греции ученый, звали его Гиппократ Хиосский. Именно Гиппократу принадлежит первая известная попытка создать «Начала» геометрии. К сожалению, книга эта до нас не дошла.

По одной из легенд неудачливый купец Гиппократ был ограблен пиратами и направился жаловаться на них в Афины. Здесь он встретился с мудрецами, которые проводили время, занимаясь, в основном, решением геометрических задач. Не найдя управы на грабителей, Гиппократ утешился тем, что превзошел в геометрии самых искусных мудрецов . . .

Гиппократ пытался осуществить квадратуру круга, иначе говоря, построить с помощью циркуля и линейки круг, равновеликий данному квадрату. И хотя это ему, естественно, не удалось, он сумел построить несколько фигур, представляющих собой куски плоскости, ограниченные дугами окружностей, и тем не менее равновеликих квадрату.

С именем Гиппократа в истории геометрии связаны фигуры особого вида, так называемые луночки. Луночку (иначе говоря, полумесяц) можно определить так: на хорде произвольного круга строят внешним образом полуокружность, концы которой совпадают с концами хорды. Фигура, ограниченная меньшей дугой окружности данного круга и проведенной полуокружностью, и есть луночка.

На рисунке 1 четыре такие луночки окрашены в желтый цвет. Гиппократ заметил, что суммарная их площадь равна площади квадрата, окрашенного здесь в голубой цвет. Действительно, сумма площадей полукругов, построенных на сторонах этого квадрата, равна площади круга, в который вписан квадрат. Если из полукругов удалить окрашенные в фиолетовый цвет сегменты, то останутся четыре луночки; если же удалить их из большого круга, то останется квадрат.

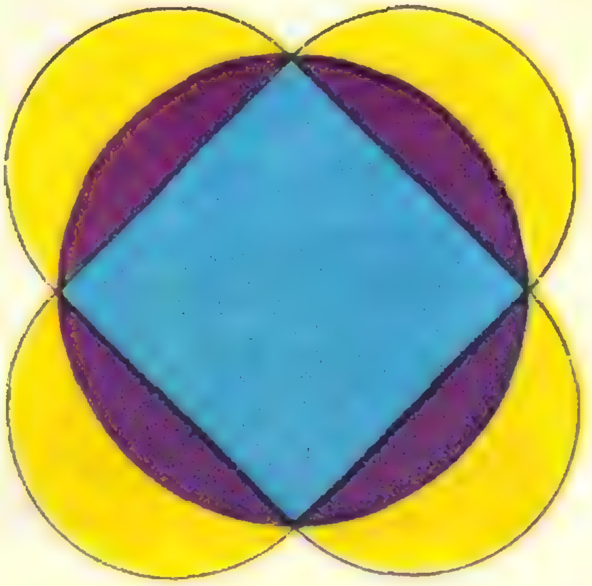


Рис. 1.

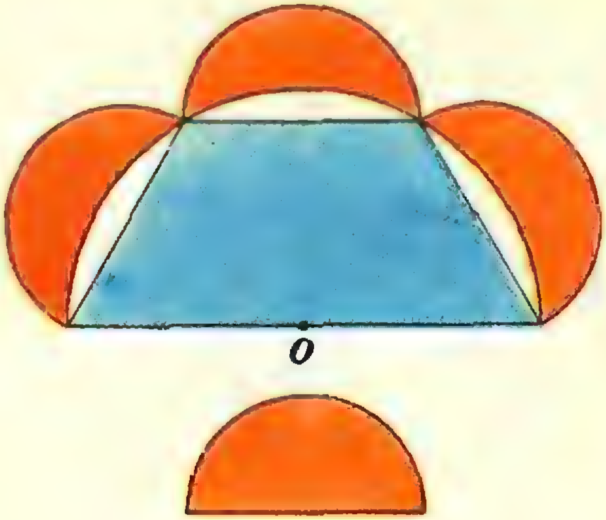


Рис. 2.

Рисунок 2 иллюстрирует еще одну теорему Гиппократа. Оказывается, площадь трапеции, вписанной в окружность с центром в точке O, равна сумме площадей оранжевых луночек и оранжевого полукруга (все три луночки равны по построению, полукруг равен тем полукругам, из которых образованы луночки). Доказывается эта теорема так же, как предыдущее утверждение.

На рисунке 3 приведена фигура, также составленная Гиппократом. Две боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 1, большее основание равно $\sqrt{3}$. Нижняя дуга фигуры, заштрихованной на рисунке черными линиями и которую естественно назвать обобщенной луночкой, касается диагонали трапеции. Оказывается, что площади вписанной трапеции и луночки равны (доказать это можно, установив, что сумма площадей боковых и верхнего сегментов равна площади нижнего сегмента).

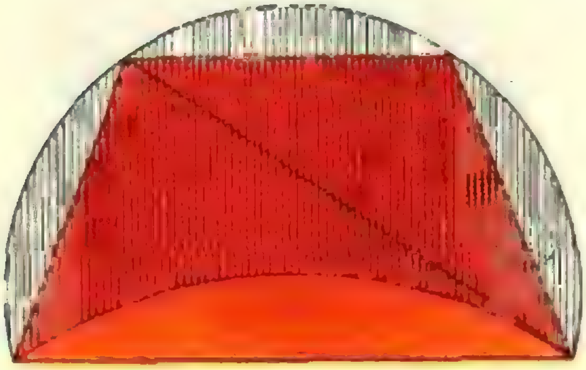


Рис. 3.

Квадратуру треугольника или трапеции осуществить несложно, так что у Гиппократа могло сложиться впечатление, что он близок к цели — квадратуре круга . . . Впрочем, более подробно о работах Гиппократа вы можете прочесть, например, в книге Б. Л. Ван дер Вардена «Пробуждающаяся наука», Физматгиз, 1959.

На рисунке 4 изображена фигура, об особенностях которой Гиппократ, по-видимому, не знал. А между тем площадь изображенного здесь прямоугольного треугольника равна сумме площадей луночек. Доказательство этого факта легко получить, если воспользоваться теоремой Пифагора. Кстати, у этой фигуры есть еще одно удивительное свойство. Луночки имеют одинаковую ширину. Точнее говоря, диаметры наибольших вписанных в них окружностей равны каждый половине разности между суммой катетов и гипотенузой треугольника, показанного на том же рисунке.

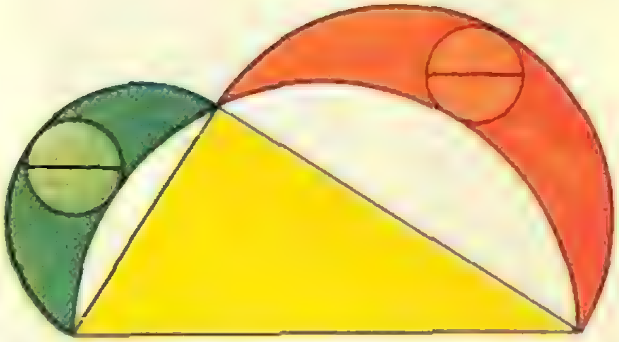


Рис. 4.

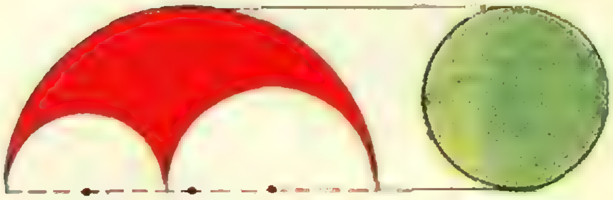


Рис. 5.

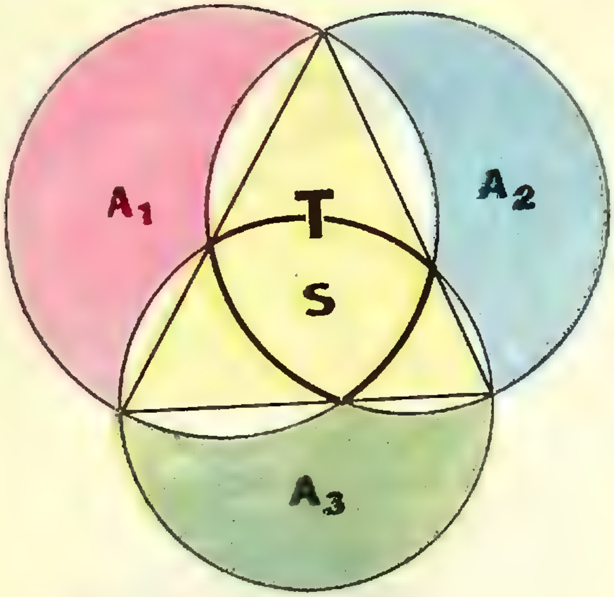


Рис. 6*а*.

На рисунке 5 слева изображена фигура, построенная Архимедом. Во всяком случае это утверждал в девятом столетии большой знаток трудов Архимеда арабский математик Сабит ибн-Корра. Источники, которыми он при этом пользовался, не сохранились. Фигуру эту называют арбелоном или «сапожным ножом».

Сабит ибн-Корра показал, следуя, вероятно, Архимеду, что площадь арбелона равна площади круга, относительные размеры которого и способ построения показаны на рисунке 5. Доказательство предлагаем найти вам самим.

Фигура, изображенная на рисунке 6*а*, к древней математике не имеет непосредственного отношения. Треугольник T произвольный, стороны его служат диаметрами трех кругов. Фигура эта обладает свойством, которое роднит ее с ранее рассмотренными фигурами. Оказывается, что сумма площадей арбелонов A_1, A_2 и A_3 без площади криволинейного треугольника S равна удвоенной площади треугольника T (если треугольник T прямоугольный, то два арбелона вырождаются в луночки).

Приведем геометрическое доказательство этого неожиданного факта.

На рисунке 6*б* проведены и продолжены отрезки, соединяющие вершины данного криволинейного треугольника. В силу симметрии сегменты, окрашенные здесь в одинаковый цвет, равновелики (симметрия вытекает, например, из такой теоремы: высоты основного треугольника являются биссектрисами треугольника с вершинами в основаниях этих высот; доказательство можно посмотреть в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры», Физматгиз, 1962).

На рисунке 6*в* видим пары других симметричных сегментов (осями сим-

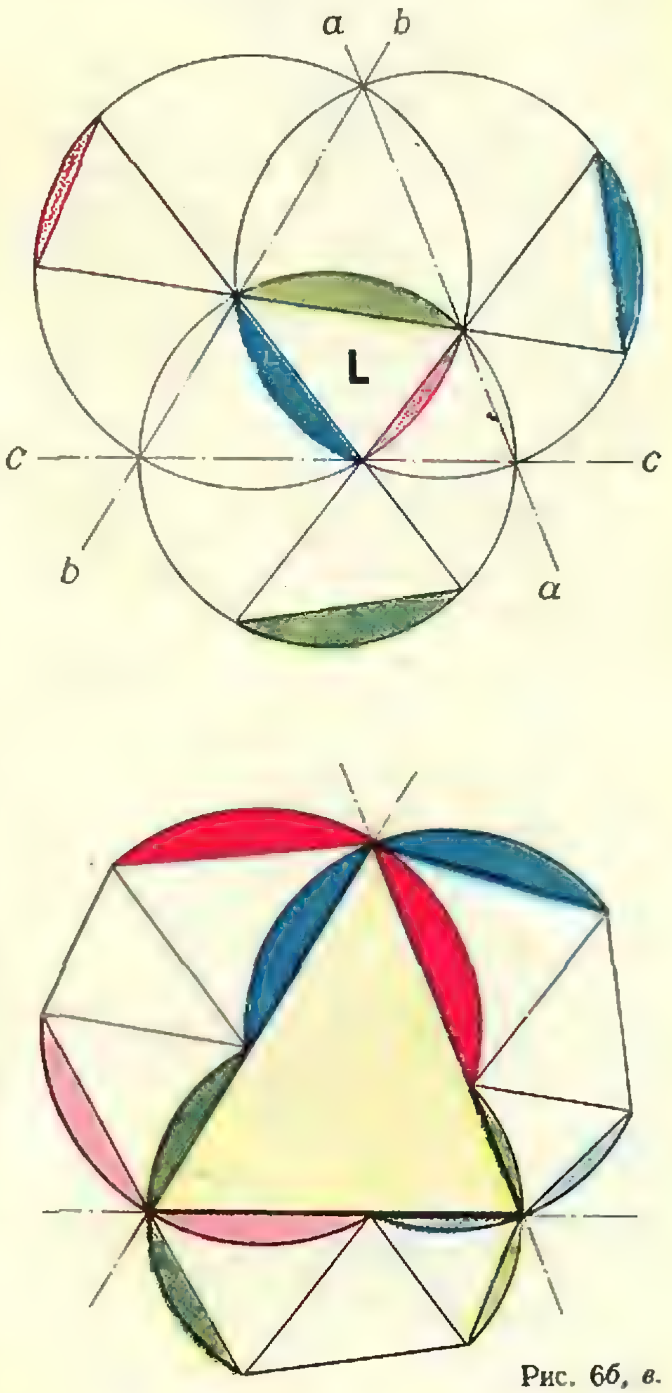


Рис. 6*б*, *в*.

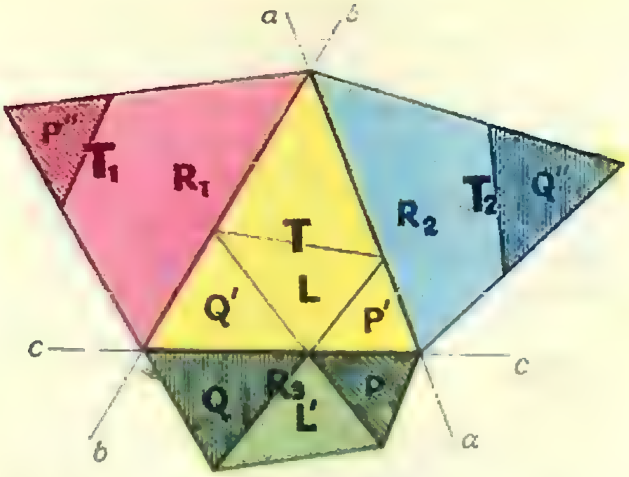

a
b
P''
T₁
R₁
T
Q'
L
P'
R₂
T₂
Q''
c
Q
R₃
L'
P
c
b
a

Рис. 6г.

метрии по-прежнему служат стороны треугольника T).

Поскольку симметричные сегменты равновелики, достаточно теперь доказать (см. рис. 6 г), что сумма площадей четырехугольников R_1, R_2 и R_3 без площади треугольника L равна удвоенной площади треугольника T.

Треугольники L и L' симметричны относительно стороны c. Отразим теперь треугольники P и Q сначала относительно стороны c. Получаем треугольники P' и Q'. Затем отразим треугольник P' относительно стороны $в$, а треугольник Q' — относительно стороны a. Образуется фигура из двух треугольников T_1 и T_2. Оба эти треугольника симметричны

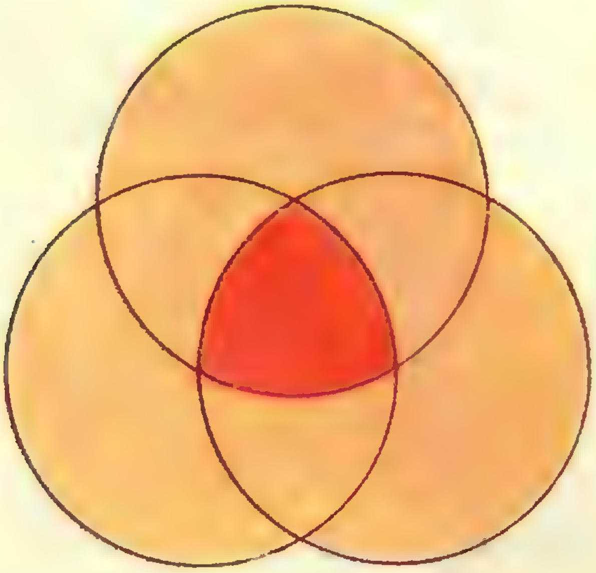


Рис. 7

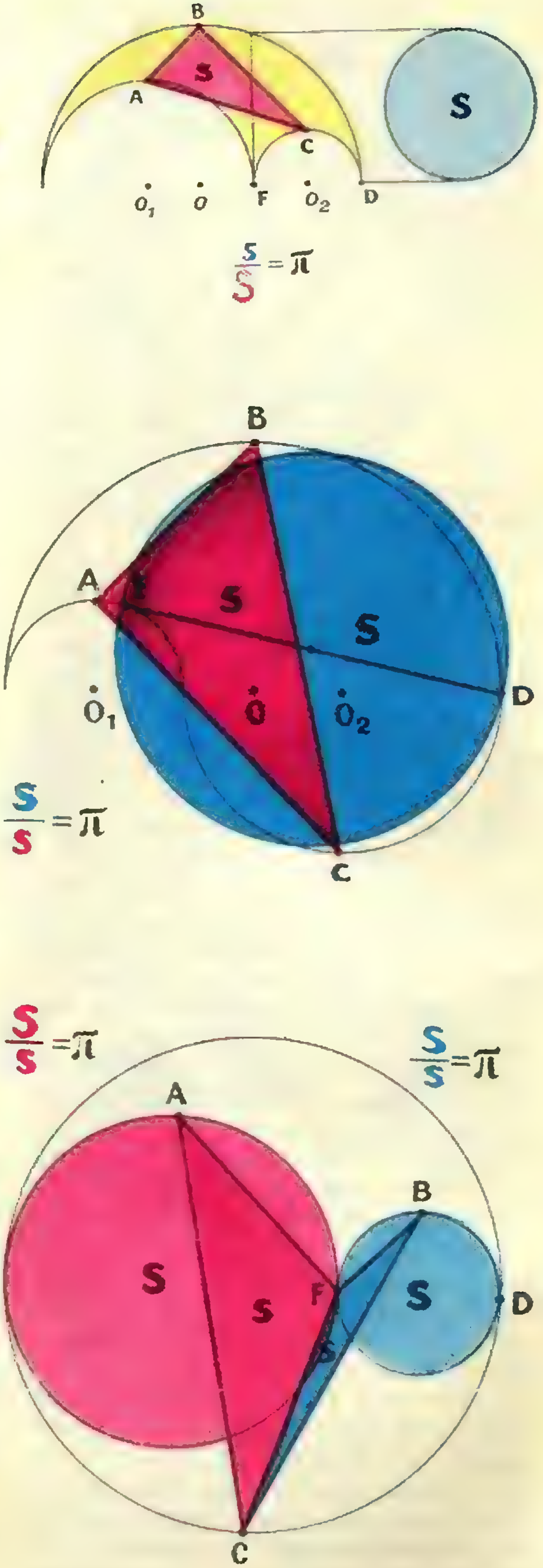

B
S
A
C
S
O₁
O
F
O₂
D
S/S = π
B
A
E
S
S
O₁
O
O₂
D
C
S/S = π
S/S = π
A
S/S = π
B
S
S
F
S
D
C

Рис. 8а,б,в.

треугольнику T (один относительно стороны b, другой относительно стороны a), поэтому они и равновелики ему. Таким образом, наше утверждение доказано.

Попробуйте теперь свои силы на задачах, геометрическое решение которых опирается на мотивы, родственные только что разобранным.

1. Обратимся к рисунку 7. На нем изображен криволинейный треугольник, образованный пересечением трех кругов одинакового радиуса. Что больше пó площади: четверть такого круга или криволинейный треугольник?

Еще одно упражнение

2. На рисунках 8*а* — 8*в* изображены соответственно арбелон, зеркальное отражение запятой и фигура, представляющая дополнение арбелона до объемлющего его круга. Точки A, B и C в каждом из этих случаев делят пополам полуокружности, центры окружностей которых находятся соответственно в точках O_1, O, O_2. Точка D на рисунке 8*б* — конец диаметра окружности с центром в O, проходящего через точки O_1 и O_2. DE — касательная, проведенная из точки D (рис. 8*б*) к окружности, центр O_1 которой на этом рисунке максимально удален от D.

Требуется доказать, что:

а) На рисунке 8*а* площадь круга, нарисованного справа (или равная ей площадь арбелона), относится к площади треугольника ABC как π.

б) На рисунке 8*б* площадь круга с диаметром DE относится к площади треугольника ABC как π

в) На рисунке 8*в* площадь круга проходящего через точки B и D, относится к площади треугольника BFC как π, и площадь круга, проходящего через точки A, F и C, относится к площади треугольника AFC как π.

Тем, кто заинтересовался историей вопроса о квадрировании луночек, мы рекомендуем прочесть в книге Архимед «Сочинения», Физматгиз, 1962, главу «Измерение круга».

ДВА ВЗВЕШИВАНИЯ

Задачи, связанные с гирями и весами, очень популярны в последнее время. Это — необычная новая задача, предложенная Полем Кари, служащим из Нью-Йорка. Имеется шесть гирь. Одна пара — красная, другая — белая, третья — голубая. В каждой паре одна из гирь немного легче другой, но выглядят обе одинаково. Три более тяжелые гири весят одинаково. То же условие и для более легких гирь.

Как определить двумя взвешиваниями на чашечных весах, какая гиря в каждой из пар тяжелее?

ШИФРОВКА

Эта шифровка (или ребус, как предпочитают называть ее многие составители задач) очень стара, и происхождение ее неизвестно. Это, безусловно, одна из лучших шифровок, и, я надеюсь, она неизвестна большинству читателей: $\frac{EVE}{DID}=0,$

$$TALKTALKTALK\ \ldots$$

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры. (Одна из них может быть и нулем.) Знаменатель и числитель дроби $\frac{EVE}{DID}$ взаимно просты. Равная ей десятичная дробь имеет период из четырех цифр. Имеется только одно решение.

Физика помогает геометрии

Б. Ю. Коган

При изучении физики, конечно, используется математика. Но, оказывается, бывает и наоборот — физика приносит пользу математике. Вот несколько примеров того, как понятие центра тяжести можно использовать в геометрии.

1. Теорема о медианах треугольника. Поместим в вершины треугольника (рис. 1) материальные точки одинаковой массы. Центр тяжести системы точек A и B находится в точке K — середине отрезка AB. Значит, центр тяжести системы точек A, B и C лежит на медиане CK. Рассуждая аналогично, мы придем к выводу, что этот центр тяжести лежит на медиане AL и на медиане BM. Но у системы точек A, B и C всего лишь один центр тяжести. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Далее, так как точка C имеет массу m, а точка K «представляет» систему точек A и B, имеющую массу $2m$, то KS вдвое меньше SC. Следовательно, точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1.

2. Теорема о средних линиях четырехугольника. Поместим в вершины четырехугольника $ABCD$ материальные точки одинаковой массы (рис. 2). Так как центр тяжести системы точек A и B лежит в точке K — середине отрезка AB, а центр тяжести системы точек C и D — в точке M — середине отрезка CD, то центр тяжести системы точек A, B, C и D находится на отрезке KM, соединяющем середины сторон AB и CD. Назовем этот отрезок средней линией четырехугольника. Рассуждая аналогично о точках B и C

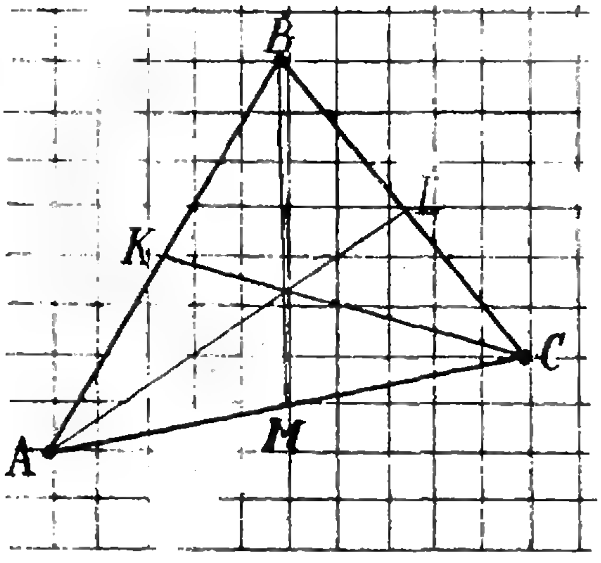


Рис. 1.

или о точках A и D, мы придем к выводу, что центр тяжести системы точек A, B, C и D лежит на пересечении средних линий KM и LN. Далее так, как система точек A и B имеет такую же массу, как и система точек C и D, то $KS=SM$. Рассуждая аналогично, найдем, что $LS=SN$. Следовательно, средние линии четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам.

Заметим, что в наших рассуждениях нигде не использовался тот факт, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Значит, доказанная теорема верна и для пространственного четырехугольника. (Из нее следует, что средние линии такого четырехугольника обязательно пересекаются.)

3. Обобщение предыдущей теоремы. Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ (рис. 3). Поместим в его вершины материальные точки: в вершину A — массы m, в вершину B — массы αm, в вершину D — массы βm и в вершину C — массы $\alpha\beta m$, где α и β — произвольные положительные числа. Тогда центр тяжести системы точек A, B, C и D будет лежать на пересечении прямых KM и LN, где K — центр тяжести системы точек A и B, M — центр тяжести системы точек C и D, L — центр тяжести системы точек B и C и N — центр тяжести системы точек A и D. Далее, так как длины плеч обратно пропорциональны соответствующим весам, то

$$\frac{AK}{KB}=\frac{\alpha m}{m}=\alpha, \quad \frac{DM}{MC}=\frac{\alpha\beta m}{\beta m}=\alpha,$$

$$\frac{NS}{SL}=\frac{\alpha m+\alpha\beta m}{m+\beta m}=\alpha, \quad \frac{BL}{LC}=\frac{\alpha\beta m}{\alpha m}=\beta,$$

$$\frac{AN}{ND}=\frac{\beta m}{m}=\beta,$$

$$\frac{KS}{SM}=\frac{\alpha\beta m+\beta m}{\alpha m+m}=\beta.$$

Следовательно, если стороны этого четырехугольника разделить так, что

$$\frac{AK}{KB}=\frac{DM}{MC}=\alpha, \quad \frac{BL}{LC}=\frac{AN}{ND}=\beta,$$

то отрезки NL и KM разделятся в том же отношении:

$$\frac{NS}{SL}=\alpha, \quad \frac{KS}{SM}=\beta.$$

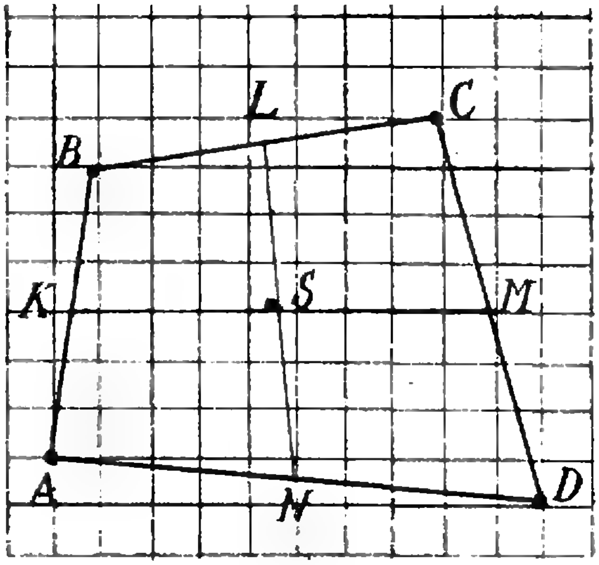


Рис. 2.

Доказанная теорема приводит к интересному результату. Разделим одну пару противоположных сторон четырехугольника на k одинаковых частей, а другую — на l одинаковых частей. Соединив затем соответственные точки противоположных сторон, получим сетку, подобную той, что показана на рисунке 4. (Здесь $k=3$, а $l=4$.) Причем каждый из отрезков, соединяющих противоположные стороны, окажется разбитым на участки одинаковой длины.

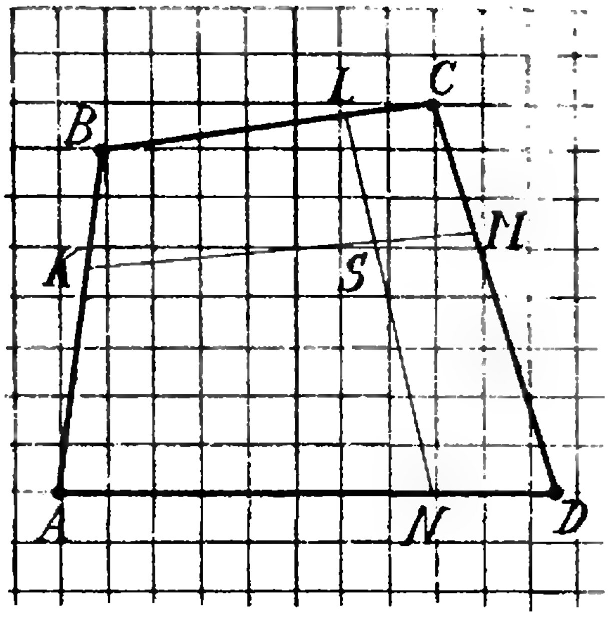


Рис. 3.

Например, на рисунке 4 каждый «вертикальный» отрезок разбит на три одинаковых участка, а каждый «горизонтальный» — на четыре одинаковых участка *).

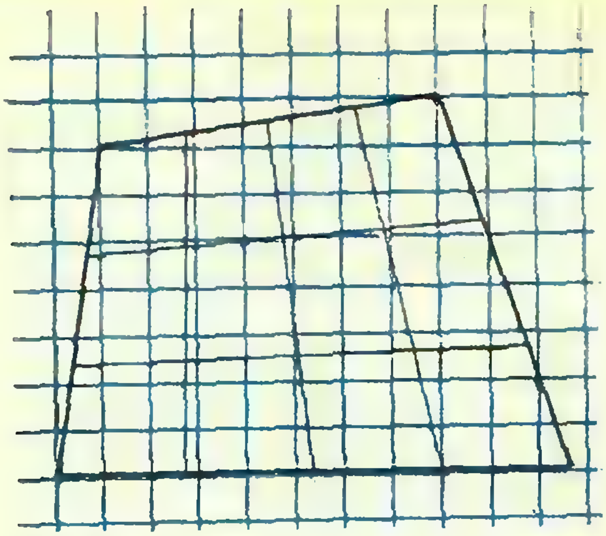


Рис. 4.

4. Нахождение соотношений отрезков. С помощью представления о центре тяжести легко решаются задачи следующего типа. На сторонах треугольника ABC поставлены точки K и L (рис. 5). Зная, что $\frac{AK}{KB}=\frac{1}{2}$ и $\frac{BL}{LC}=\frac{3}{5}$, найти отношения $\frac{AS}{SL}$ и $\frac{CS}{SK}$.

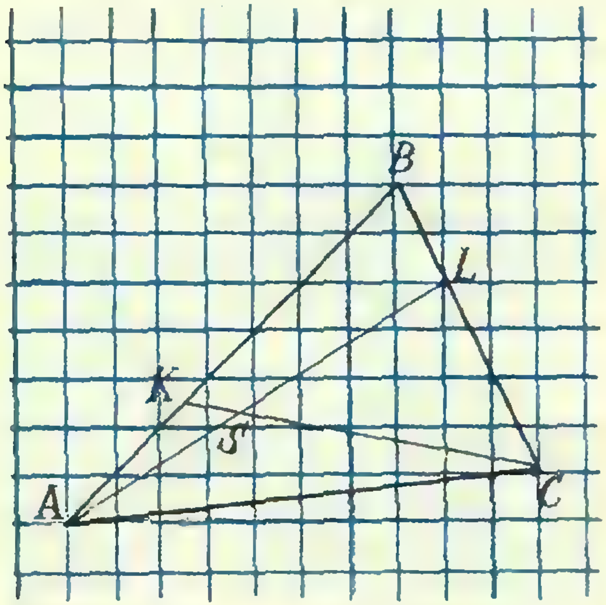


Рис. 5.

Решение. Поместим в вершины A, B, C материальные точки так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{m_B}{m_A}=\frac{AB}{KB}=\frac{1}{2},\quad \frac{m_C}{m_B}=\frac{BL}{LC}=\frac{3}{5},$$

например, положим

$$m_A=10m,\quad m_B=5m,\quad m_C=3m.$$

Тогда центр тяжести системы точек A и B будет лежать в точке K, а центр тяжести системы точек B и C — в точке L. Следовательно, центр тяжести системы точек A, B и C лежит на прямой CK и в то же время на прямой AL, то есть он помещается в точке пересечения S. Отсюда легко найти, что

$$\frac{AS}{SL}=\frac{m_B+m_C}{m_A}=\frac{5m+3m}{10m}=\frac{4}{5},$$

$$\frac{CS}{SK}=\frac{m_A+m_B}{m_C}=\frac{10m+5m}{3m}=\frac{5}{1}.$$

Задачи

1. Каждая вершина тетраэдра соединена с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что четыре полученных отрезка пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AK. Прямая, соединяющая вершину C с серединой медианы, пересекает сторону AB в точке L. Найти отношение $AL:LB$.

3. В треугольнике ABC, показанном на рисунке 6,

$$\frac{AK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA}=\frac{1}{3}.$$

Какую часть от площади треугольника ABC составляет сумма площадей заштрихованных треугольников?

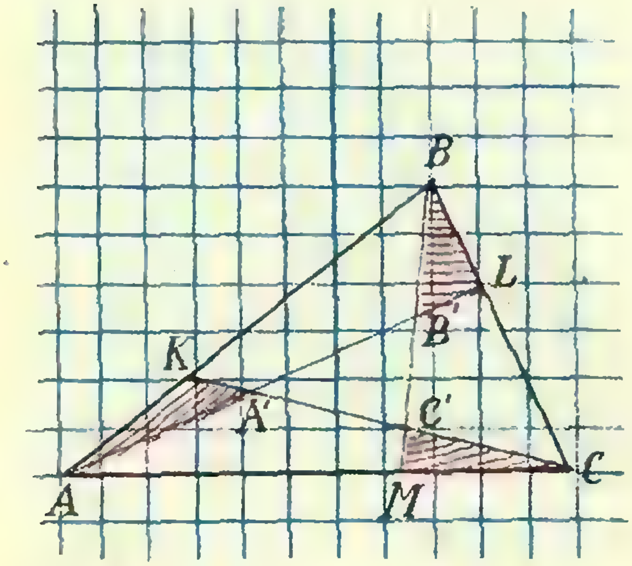


Рис. 6.

---

*) Эта теорема верна и для неплоского четырехугольника.

Первое знакомство с номограммами

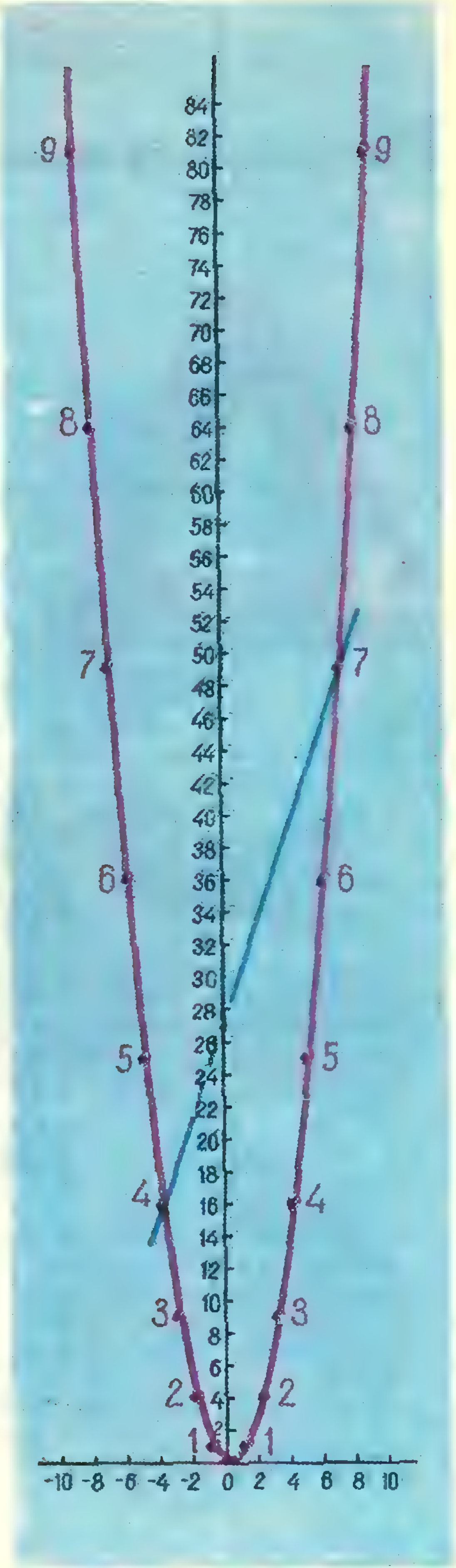
Ю. В. Матиясевич

На рисунке справа цифрами 1, 2,..., 9 отмечены те точки на параболе $y=x^2$, абсциссы которых равны ±1, ±2, ..., ±9. В результате получилась необычная таблица умножения. Чтобы узнать, чему равно, например, 4×7, достаточно соединить прямой линией точку, отмеченную цифрой 4 на левой ветви параболы, с точкой, отмеченной цифрой 7 на правой ветви. Эта прямая пересекает ось ординат в точке, отмеченной числом 28, и действительно, $4\times7=28$.

Проверьте сами другие «строчки» этой «таблицы». Конечно, для этого нет необходимости рисовать линии, достаточно просто приложить линейку или натянуть нитку.

Такие «считающие чертежи» называются *номограммами*. Ясно, что построенная нами номограмма не имеет большой ценности — таблицу умножения помнит каждый. Но номограммы можно строить и для более сложных функций. В таких случаях они значительно сокращают время вычислений.

Вы познакомитесь с другими номограммами и научитесь делать их, если прочтете книжку М. В. Пентковского «Считающие чертежи» (М., «Физматгиз», 1959).



Упражнения

1. Укажите, как надо расставлять числа на параболе $y=ax^2$ $(a>0)$, чтобы также получить таблицу умножения.

2. Дайте обоснование построенной номограмме.

Невозможные объекты

Л. Пенроуз, Р. Пенроуз

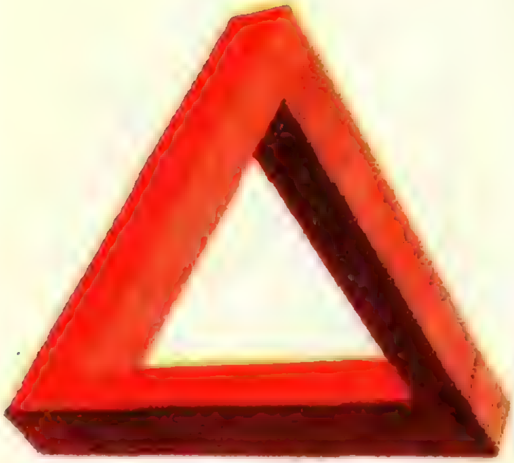


Рис. 1.

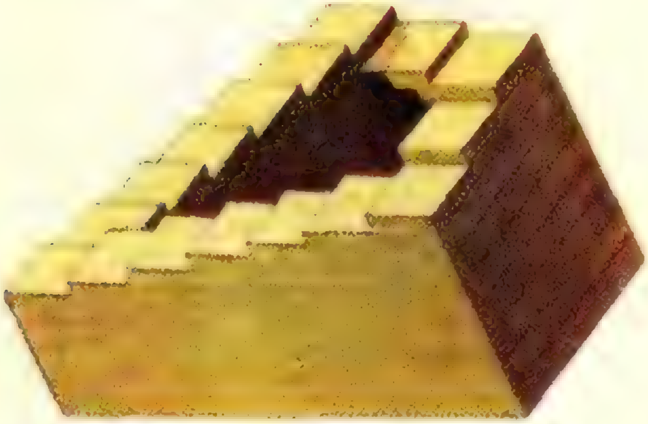


Рис. 2.

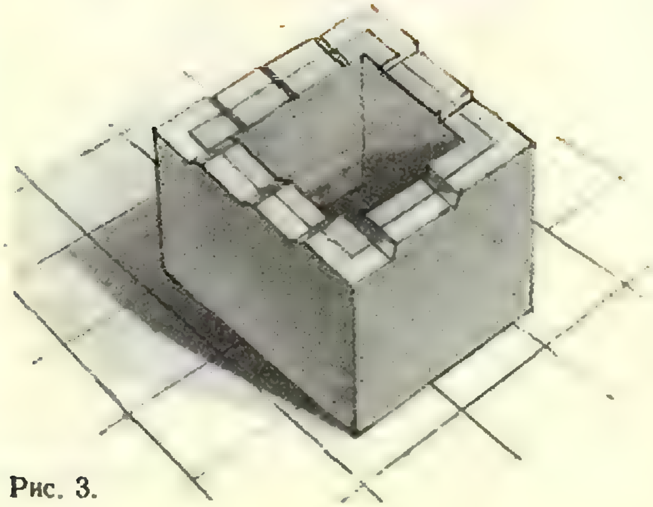


Рис. 3.

Впечатление от трехмерных предметов можно передать с помощью плоских изображений. Этим можно воспользоваться для того, чтобы создать противоречивое впечатление.

Здесь описаны рисунки несуществующих конструкций. Каждая отдельная часть воспринимается как изображение трехмерного объемного предмета, но весь рисунок за счет неправильного соединения этих частей кажется предметом-призраком.

Пример такой конструкции показан на рисунке 1. Каждая часть —это брусок прямоугольного сечения, но линии на рисунке соединены так, что изображенный предмет ие существует в действительности. По мере того, как глаз следует вдоль грани бруска, изменяется кажущееся расстояние от предмета до наблюдателя.

На рисунке 2 показана конструкция, каждая часть которой—ряд ступенек. Однако части эти соединены друг с другом так, что картина в целом несовместима: ступеньки все время поднимаются.

Иллюзию несуществующих конструкций могут вызвать и фотографии существующих предметов. Для этого они должны быть сконструированы специальным образом и сфотографированы под определенным углом. Пример подобной фотографии показан на рисунке 3. Здесь фотография действительно существующей модели вызывает то же впечатление, что и изображение несуществующей лестницы (рис. 2). Это вызвано тем, что крайняя правая ступенька при фотографировании находилась ближе к фотоаппарату и выше, чем ступенька, которая кажется расположенной прямо над ней.

Фотографирование невозможных объектов

В. И. Бахмин

Обычные двумерные фотографии и рисунки можно рассматривать двояко. С одной стороны — это система линий на плоскости, с другой — изображение объектов совсем иного, трехмерного пространства. В мозгу информация перерабатывается, и мы воссоздаем по имеющемуся двумерному изображению трехмерный мир. Подобный процесс происходит не только при рассматривании двумерных фотографий и рисунков. Известно, например, что на сетчатке глаза человека все отражается в перевернутом виде, но мы воспринимаем изображение как нормальное. Можно надеть особые очки и попытаться видеть мир перевернутым. Однако вскоре мозг приспосабливается, и изображение вновь будет восприниматься как нормальное. Таким образом, мозг постоянно перерабатывает получаемую зрительную информацию и согласовывает ее с информацией, получаемой от остальных органов чувств. Так вырабатывается наше представление об окружающем мире.

Иногда из двумерного рисунка или фотографии мозг не может однозначным образом построить реально существующий трехмерный объект. Такие объекты получили название невозможных. Хотя реально эти объекты не существуют, можно все-таки сделать трехмерную модель, которая создает впечатление невозможного объекта, если ее сфотографировать из определенной точки. Например, изображенный на рисунке 1 невозможный треугольник, придуманный Пенроузом, можно получить, сделав

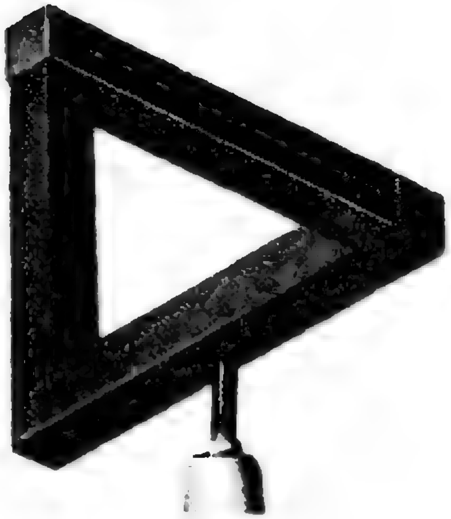


Рис. 1. Невозможный треугольник Пенроуза.

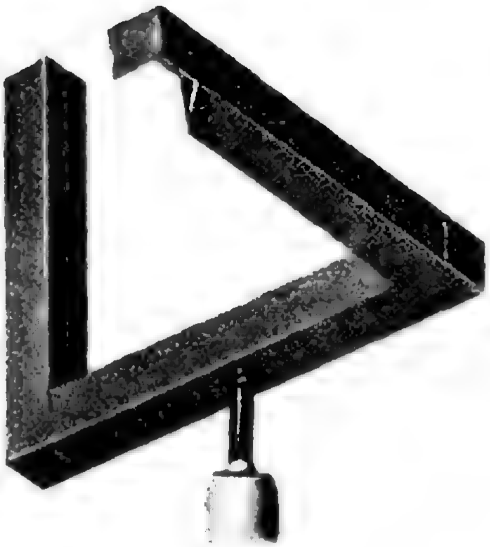


Рис. 2. Модель, придуманная Грегори, позволяет получить фотографию невозможного треугольника Пенроуза.

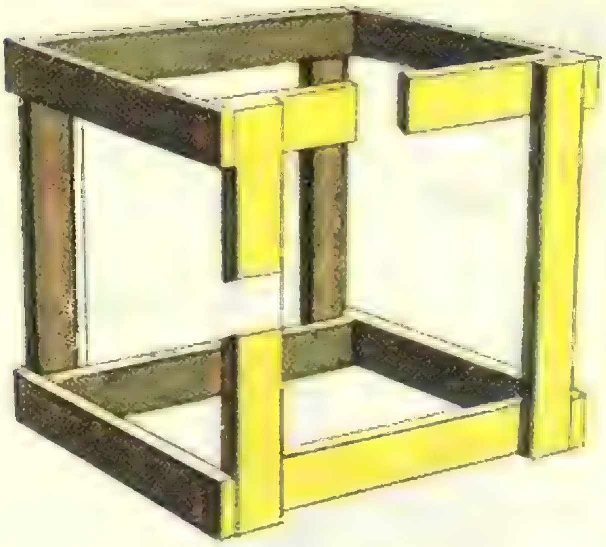


Рис. 3. Модель невозможного куба.

разомкнутую трехмерную модель (рис. 2). Если смотреть на такую модель одним глазом и найти нужную точку, можно увидеть, как две разъединенные стороны модели совместятся. Сфотографировав модель из этого положения, вы получите фотографию невозможного треугольника Пенроуза.

Этот прием используется и для получения изображения невозможного куба. Если вы сделаете такую клетку, которая изображена на рисунке 3, то, расположив ее так, чтобы задние ребра клети закрыли прорези в передних, вы увидите невозможный куб: задние ребра клетки будут казаться выдвинутыми вперед. (Из этого положения можно получить и фотографию.) Физиолог Гибсон, использовав эту идею, придумал ряд интересных иллюзий, в которых он использовал картонные прямоугольники с прорезями в некоторых из них, для того чтобы более удаленный из прямоугольников казался расположенным на переднем плане. На рисунке 4 два набора квадратов, хотя и кажутся одинаковыми, по-разному расположены в пространстве, а в третьем ряду валет на самом деле находится ближе шестерки, и карты, следовательно, одинаковы по размеру. Такую фотографию можно получить, сделав соответствующие прорези в ближе расположенной карте и в среднем прямоугольнике, через которые можно увидеть более удаленную шестерку (рис. 5).

Другая серия такого же рода оптических иллюзий может быть получена с помощью так называемой искривленной комнаты Эймса, геометрия которой показана на рисунке 6. Сделана эта комната несколько необычно. Пол в ней наклонен и повышается вправо от наблюдателя, задняя стена удаляется по мере продвижения налево, окна на этой стене разных размеров и имеют форму трапеции. Однако если в такую комнату смотреть из определенной точки, она выглядит совсем обычной: пол кажет-

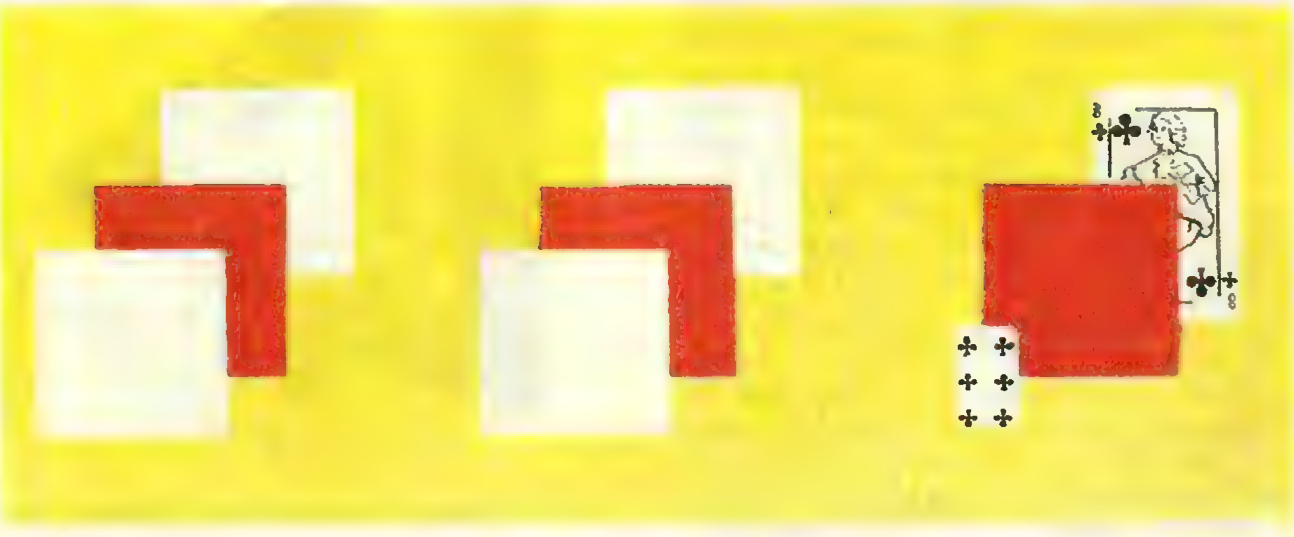


Рис. 4.

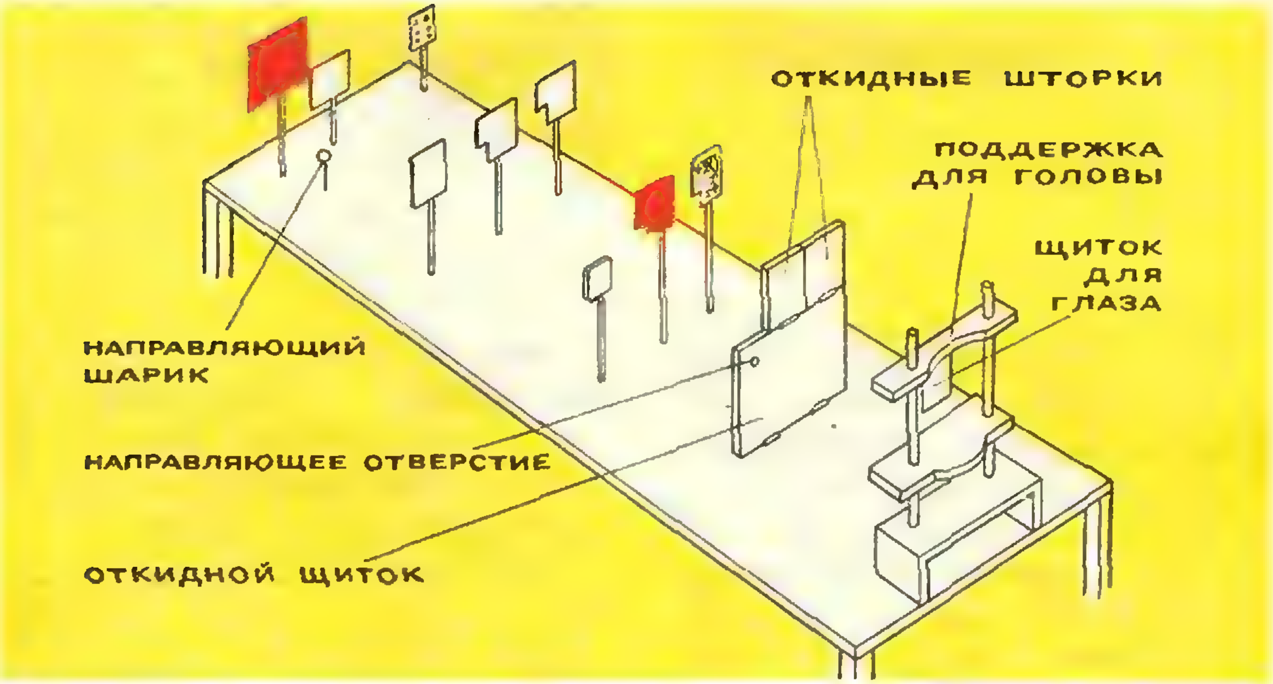


Рис. 5. Устройство, позволяющее наблюдать иллюзию, которую вы видите на рисунке 4.

ся ровным, задняя стенка — перпендикулярной направлению взгляда, а окна — прямоугольными и одинаковыми. Эймс сделал одну из таких комнат достаточно большой для того, чтобы в ней могли находиться люди. Получился удивительный эффект: когда зритель рассматривает людей, прогуливающихся вдоль этой комнаты, он наблюдает необычайные изменения их размеров. В зависимости от того, куда идет человек, он кажется то растущим, то уменьшающимся.

Малая модель такой комнаты позволяет видеть в окнах задней стенки руки или лицо человека. Как и в большой комнате, руки или лица кажутся ненормально большими или маленькими в зависимости от того, появляются ли они в окнах справа от наблюдателя или слева. Мы настолько привыкли к комнатам обычной формы, что в комнате Эймса воспринимаем как реальные даже сильно искаженные объекты. Восприятие изображения — психологический процесс. При этом важно отношение наблюдателя к предмету наблюдения и даже его состояние в данный момент. Интересно, что лица хорошо знакомых людей воспринимаются в комнате Эймса вполне нормальными, при этом вся тайная геометрия комнаты становится заметной наблюдателю.

Конечно, самим построить большую комнату Эймса довольно сложно. Но сделать небольшую модель, по-видимому, можно. Помещая внутрь различные предметы, вы при желании сможете получить довольно эффектные фотографии. Почему бы не попробовать?

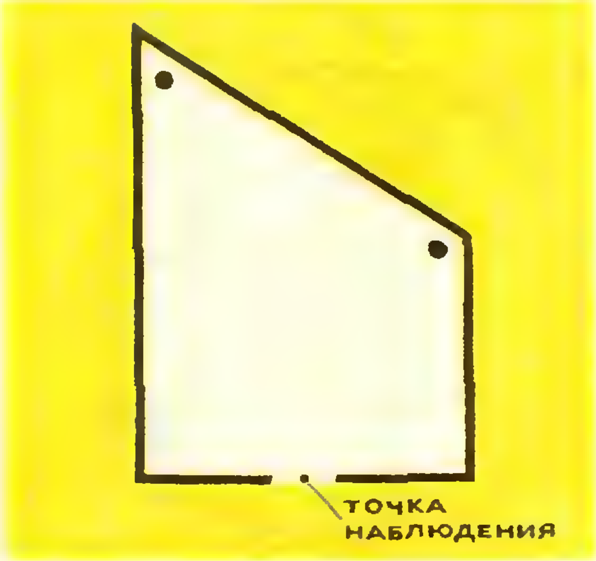


Рис. 6. Геометрия искривленной комнаты Эймса.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Задачи

М81. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, из вершины A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

А. Н. Виленкин

М82. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно, что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных автомашин.

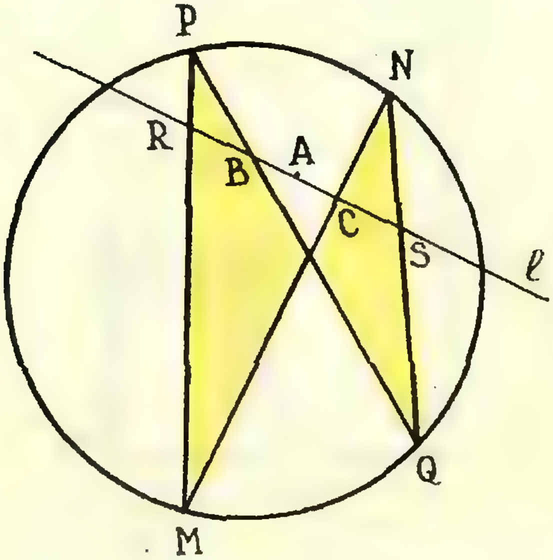


Рис. 1.

М83. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, n$ ни при каком n нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой.

М84. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l.

На этой прямой взяты еще две точки B и C так, что

$$AB = AC.$$

Через точки B и C проведены две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках P и Q, вторая — в точках M и N. Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что

$$AR = AS.$$

Эту задачу (или некоторые ее варианты) называют иногда «задачей о бабочке»; происхождение такого названия ясно из рисунка 1.

М85. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — попарно различные натуральные числа, ни одно из которых не делится на квадрат целого числа, большего единицы, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — целые числа, отличные от нуля, то

$$b_1\sqrt{a_1}+b_2\sqrt{a_2}+\ldots+b_m\sqrt{a_m}\neq 0.$$

Л. Н. Васерштейн

Ф93. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано отверстие небольшого радиуса r. По оси отверстия из сосуда направляют горизонтально тонкий луч света. До какого уровня h над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения?

Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

И. Ф. Гинзбург

Ф94. Над одной грамм-молекулой идеального газа совершают цикл (замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2)). Температуры в точках *1* и *3* равны T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

Ф95. Поверхность реки образует наклонную плоскость. Может ли тело свободно плыть по реке со скоростью, превышающей скорость течения или максимальную скорость течения?

Ф96. Два одинаковых шарика связаны нитью. Найти высоту подъема этой системы, если один из шариков бросили вверх со скоростью v.

А. Дроздов

Ф97. Виток изолированного провода изогнут в виде восьмерки, кольца которой имеют радиусы $r_1 = 1$ *см* и $r_2 = 3$ *см*. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ *гс*, перпендикулярном плоскости витка.

Изоляция провода рассчитана на напряжение 10 *в*. Произойдет ли пробой изоляции, если магнитное поле резко выключить? Время выключения поля 10^{-3} *сек*.

Л. Г. Асламазов

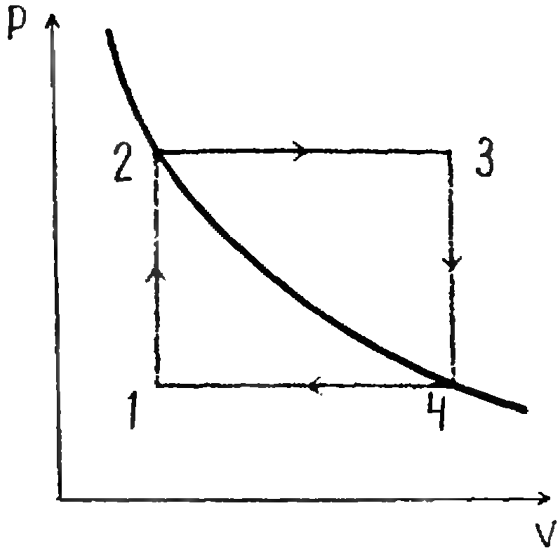


Рис. 2.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М31—М33

М31

Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто двадцатиугольников?

При каждом разрезании общее число кусков бумаги увеличивается на 1 (так как один кусок пропадает и появляются два новых), поэтому после n разрезов будет $(n+1)$ кусков бумаги.

Подсчитаем теперь, каким может быть общее число вершин во всех кусках вместе после n разрезов. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается либо на 2 (если резали через две вершины), либо на 3 (если резали через вершину и сторону), либо на 4 (если резали через 2 стороны). Так как сначала было 4 вершины, то после n разрезов во всех кусках вместе будет не больше чем $4n+4$ вершины.

Предположим, что после N разрезов получилось 100 двадцатиугольников. Так как при этом общее число полученных кусков будет $N+1$, то, кроме этих двадцатиугольников, будет еще $N+1-100$ кусков. Каждый из этих кусков будет иметь не меньше трех вершин, поэтому общее число вершин во всех кусках будет не меньше чем $100\cdot 20+(N-99)\cdot 3$. Как было доказано раньше, это число не больше чем $4N+4$. Значит,

$$4N+4\geqslant 100\cdot 20+(N-99)\cdot 3=$$
$$=3N+1703,$$

откуда $N\geqslant 1699$.

Итак, мы доказали, что нельзя получить 100 двадцатиугольников, сделав меньше чем 1699 разрезов. Это основная и самая трудная часть доказательства.

Покажем теперь, как можно получить 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов. Вот один из способов: разрежем квадрат на 100 прямоугольников (99 разрезов) и каждый прямоугольник за 16 разрезов превратим в двадцатиугольник, отрезая от углов треугольники (1600 разрезов). Всего будет 1699 разрезов.

Ответ. Можно получить ровно 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов, а сделав меньшее число разрезов, 100 двадцатиугольников получить нельзя.

Точно так же можно узнать, какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы получить ровно k l-угольников.

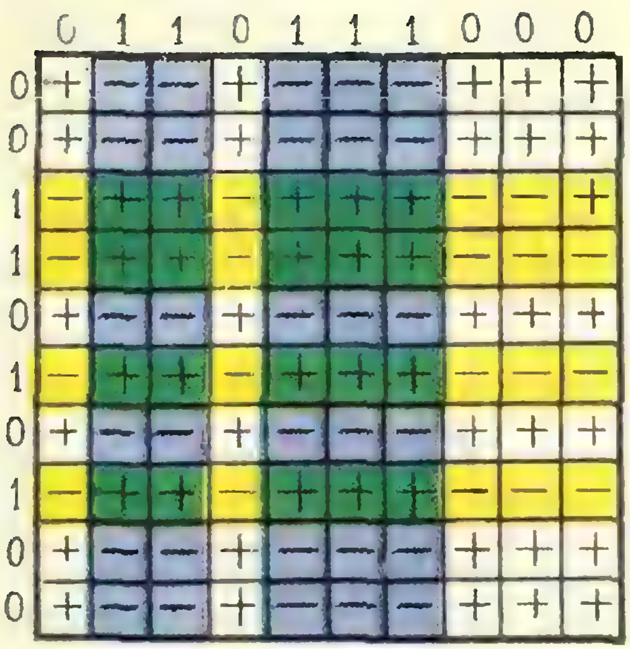
Точное решение этой задачи прислали *Д. Григорьев* из Ленинграда и *В. Лившиц* из Запорожья.

И. Н. Бернштейн

М32

Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

Пусть в i-й строке мы изменили знак x_i раз, в k-м столбце — y_k раз. Тогда в клетке, стоящей на пересечении i-й строки и k-го столбца, знак изменится x_i+y_k раз. Следовательно, в этой клетке будет стоять минус в том и только в том случае, когда x_i+y_k нечетно. Таким образом. об-



	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+

Рис. 1.

щее количество минусов в полученной таблице зависит только от четности чисел x_i и y_k; на рисунке 1 вместо четных чисел поставлены нули, вместо нечетных — единицы. Пусть x — число нечетных чисел среди x_i; y — число нечетных чисел среди y_k (на рисунке $x=5$, $y=4$). Тогда, как нетрудно посчитать, общее число минусов в таблице будет равно

$$x(100-y)+(100-x)y = \\ =100x+100y-2xy,$$

где x, y — целые.

Теперь вернемся к нашей задаче и докажем, что ответ в ней отрицательный, т. е. 1970 минусов получить *невозможно*. *Предположим, что нам* удалось получить ровно 1970 минусов. Тогда $1970=100x+100y-2xy$, откуда

$$xy-50x-50y+2500=1515.$$

Разложив левую часть на множители, получаем

$$(x-50)(y-50)=1515=15\cdot 101.$$

Имеем

$$-50\leqslant x-50\leqslant 50,\quad -50\leqslant y-50\leqslant 50.$$

Поскольку число 101 простое, то либо $x-50$, либо $y-50$ должно делиться на 101 (ведь их произведение делится на 101). Но из предыдущих неравенств тогда следует, что либо $x-50$, либо $y-50$ равно 0. Итак, мы получили противоречие, которое доказывает, что ровно 1970 *минусов* получить невозможно.

Правильное решение прислал *Д. Григорьев.*.

А. В. Зелевинский

М33

Имеется натуральное число $n>1000$. Возьмем остатки от деления числа 2^n на числа 1, 2, 3,..., n и найдем сумму этих остатков. Доказать, что эта сумма больше $2n$.

Обозначим сумму остатков от деления 2^n на числа 1, 2,..., n через S_n. *Мы усилим утверждение задачи и докажем, что при* $n>1000$ $S_n>3{,}5n$. Попутно мы докажем тем же методом, что

$$S_n>\frac{n}{2}(\log_2 n-4)$$

при любом n.

Мы следуем, в основном, решению *Д. Григорьева* из Ленинграда. Решение основано на очень простом соображении: 2^n не делится нацело ни на какое нечетное число, отличное от 1, значит, остаток от деления 2^n на такое число не меньше 1. Отсюда легко вывести, что для любого нечетного $k>1$ остаток от деления 2^n на $2^l k$ не меньше 2^l. Действительно, пусть остаток от деления 2^{n-l} на k равен r, то есть $2^{n-l}=mk+r$, где $0\leqslant r<k$, тогда $2^n=m(2^l k)+2^l r$, где $0\leqslant 2^l r<2^l k$, то есть остаток от деления 2^n на $2^l k$ равен $2^l r$, и так как $r\neq 0$, то этот остаток не меньше 2^l.

Отсюда следует, что во всяком случае

$S_n\geqslant 1\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2k+1$, $k>1$)$+$
$+2\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2(2k+1)$, $k>1$)$+$
$+2^2\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2^2(2k+1)$, $k>1$)$+$
. . . .
$+2^l\cdot$ *(количество не превосходящих* чисел вида $2^l(2k+1)$, $k>1$). (*)

где l определяется условиями $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$ (нет смысла брать большее l, так как тогда выражение в скобке будет равно нулю).

Что можно сказать про правую часть этого неравенства?

Рассмотрим $(i+1)$-е слагаемое: $2^i(\ldots)$. Число, стоящее в скобке, равно, очевидно, числу не превосходящих n членов арифметической прогрессии $3\cdot 2^i$, $5\cdot 2^i$, $7\cdot 2^i$, ..., то есть прогрессии с первым членом $3\cdot 2^i$ и разностью $2\cdot 2^i$. Число таких членов не меньше $\frac{n-3\cdot 2^i}{2^{i+1}}$ и, значит, i-е слагаемое правой части неравенства не меньше $\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\cdot 2^i$. В основном, решение задачи на этом окончено. Все остальное — это различные преобразования правой части (*) с помощью полученных неравенств. Заменим, например, сумму в правой части (*) первыми восемью слагаемыми. Тогда мы получим

$$S_n > 8\cdot\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{7} 2^i >$$

$$> 8\cdot\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\cdot 2^8 = 3{,}5n+\left(\frac{n}{2}-384\right).$$

При $n > 1000$ выражение в скобке положительно и, значит, мы доказали, что $S_n > 3{,}5n$ при $n > 1000$. Тем самым задача М33 полностью решена.

Однако можно получить более точное неравенство. Просуммируем все члены правой части (*); получим:

$$S_n > (l+1)\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{l} 2^i >$$

$$> (l+1)\frac{n}{2}-\frac{3\cdot 2^{l+1}}{2}.$$

Воспользовавшись неравенствами $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$, найдем, что

$$S_n > \frac{n}{2}\log_2\frac{n}{3}-n=$$

$$=\frac{n}{2}\left(\log_2\frac{n}{3}-2\right) > \frac{n}{2}(\log_2 n-4).$$

Эта формула показывает, например, что если $n > 2^{1004}$, то $S_n > 500\,n$.

Задача. Сумма остатков от деления чисел 2^{l+1}, 2^{l+L} на нечетное число $m > 1$ больше, чем $\frac{m}{2}\left(\frac{L}{\log_2 2m}-1\right)$.

С помощью этой задачи, решение которой будет приведено ниже, можно доказать, что для бесконечного числа значений n сумма S_n на самом деле гораздо больше, чем $\frac{n}{2}(\log_2 n-4)$, то есть можно доказать, что оценка $S_n > \frac{n}{2}(\log_2 n-4)$ очень груба (по крайней мере для бесконечного числа значений n). Это и неудивительно, так как наш метод доказательства не учитывал многих обстоятельств. Например, мы использовали только то, что остатки от деления 2^n на нечетные числа отличны от нуля, в то время как эти остатки часто бывают довольно большими. Вместе с тем, величина S_n с ростом n не может расти слишком быстро, так как очевидно, что $S_n \leqslant 1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Нам кажется вероятным, что справедлива такая гипотеза:

Гипотеза 1. а) При достаточно больших n верно неравенство $S_n \leqslant \frac{n^2}{4}$;

б) существует положительное число $c > 0$ такое, что $cn^2 \leqslant S_n$.

Мы не умеем ни доказывать, ни опровергать эти утверждения. Более того, мы не знаем, справедлива ли более слабая

Гипотеза 2. Существует положительное число $c > 0$ такое, что неравенство $cn^2 \leqslant S_n$ выполняется при бесконечном числе значений n.

Если вам удастся доказать или опровергнуть одну из этих гипотез, присылайте нам ваши рассуждения. Если они окажутся интересными, мы опубликуем их в одном из номеров журнала. В качестве слабого подтверждения гипотезы 2 может быть доказана следующая

Теорема. Для бесконечного числа значений n выполняется неравенство

$$S_n > \frac{n^2}{132\log_2 n}\,^{*)}.$$

Теорема выводится из задачи следующим образом. Рассмотрим сумму Σ_k остатков от деления чисел 2^{k+1}, ..., 2^n на число k. Согласно задаче, при нечетном k сумма Σk достаточно велика, поэтому и число $\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_n$ велико. Но, как легко заметить, $S_1+S_2+\dots+S_n^1=\Sigma_1+\dots+\Sigma_n$, поэтому сумма, стоящая в левой части, также велика и, значит, одно из слагаемых, скажем S_l, также велико. Аккуратное проведение доказательства мы предоставляем читателю. Перейдем теперь к решению задачи.

---

*) Число $\frac{n^2}{132\log_2 n}$ при больших n гораздо больше, чем число $\frac{n}{2}(\log_2 n-4)$. Нетрудно доказать, например, что при достаточно большом n отношение этих чисел больше $\sqrt{n}$.

Решение задачи. Выпишем остатки от деления чисел $2^{l+1}, \dots, 2^{l+L}$ на m и будем ставить между двумя последовательными остатками «галочку», если первый больше второго. Тогда, во-первых, остаток, стоящий перед галочкой, больше $\frac{m}{2}$, во-вторых, количество чисел между двумя последовательными галочками меньше $\log_2 2m$, так как остатки между двумя галочками образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 (действительно, $2^{\log_2 2m-1}=m>m-1$, а всякий остаток не больше $m-1$). Таким образом, число промежутков между галочками больше $\frac{L}{\log_2 2m}-1$ и так как в конце каждого промежутка стоит число, большее $\frac{m}{2}$, то все доказано.

А. Г. Кушниренко

В этом номере мы публикуем решения задач Ф43, Ф48—Ф51

Ф43

Найти давление в центре жидкой планеты радиуса R, если жидкость несжимаема и имеет плотность ρ.

Разобьем объем планеты на тонкие сферические слои толщиной Δr. Легко показать, что равнодействующая гравитационных сил, действующих со стороны слоя на частицу внутри этого слоя, равна нулю. Действительно, рассмотрим для этого конус с малым углом при вершине, в которую помещена частица массы m. Конус вырезает из слоя участки площадями s_1 и s_2 (рис. 1). Если масса вещества, приходящегося на единицу поверхности слоя, равна μ, то гравитационные силы, действующие на массу m со стороны участков s_1 и s_2, равны

$$F_1=\gamma\frac{m\mu s_1}{r_1^2}, \qquad F_2=\gamma\frac{m\mu s_2}{r_2^2};$$

но

$$\frac{s_1}{r_1^2}\cos\alpha_1=\frac{s_2}{r_2^2}\cos\alpha_2=\Omega$$

(Ω — телесный угол при вершине конуса), а $\alpha_1=\alpha_2$; заштрихованные треугольники подобны, то есть $\angle OA_1M_1=\angle OA_2M_2$, $\angle OA_1B_1=\angle OA_2B_2$ (они опираются на одну и ту же дугу) и $\alpha_1=\angle OA_1B_1-\angle OA_1M_1$, а $\alpha_2=\angle OA_2B_2-\angle OA_2M_2$. Поэтому $\frac{s_1}{r_1^2}=\frac{s_2}{r_2^2}$. Благодаря этому $F_1=F_2$, то есть эти силы взаимно уравновешивают друг друга. Проведя аналогичное рассмотрение для других участков слоя, мы и докажем сделанное утверждение.

Сила, с которой притягивается элемент слоя $\Delta s\Delta r$ к центру планеты, равна

$$F=\gamma\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho\Delta s\Delta r\rho}{r^2},$$

где r — расстояние от этого элемента до центра планеты. Отсюда найдем, что увеличение давления на участке толщиной Δs равно

$$\Delta p=\frac{F}{\Delta s}=\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2 r\Delta r.$$

Поэтому давление на расстоянии r_0 от центра планеты будет равно

$$p=p_0+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\Sigma r\Delta r.$$

Так как сумма $r\Delta r$ равна площади

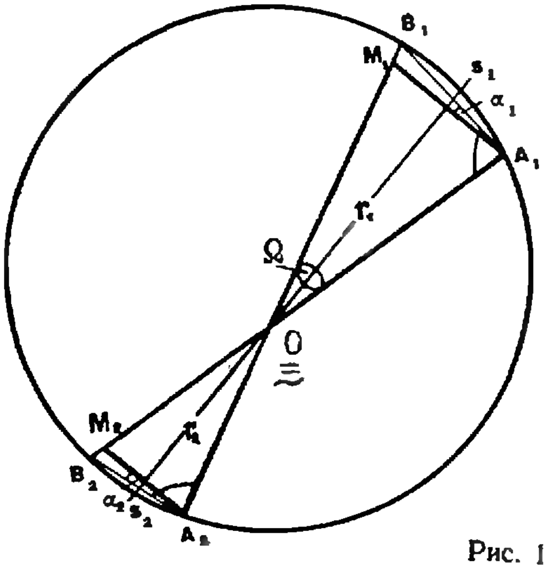


Рис. 1.

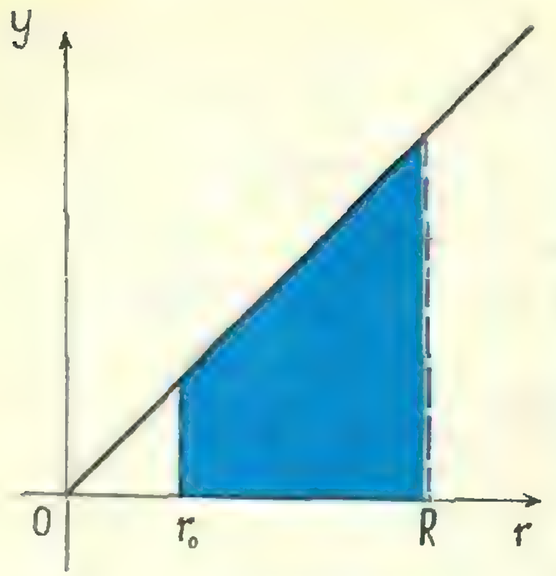


Рис. 2.

фигуры, ограниченной графиком $y=r$ и осью r (рис. 2), то

$$\sum r\Delta r=\frac{(R+r_0)(R-r_0)}{2}=\frac{R^2-r_0^2}{2}.$$

Поэтому

$$p=p_0+\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2(R^2-r_0^2);$$

p_0 — давление на поверхности планеты, которое можно принять равным нулю. Тогда

$$p=\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2(R^2-r_0^2).$$

В центре планеты ($r_0=0$) давление будет равно

$$p_ц=\frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2R^2.$$

Ф48

На вал якоря динамомашины намотана веревка, к которой прикреплен груз. Опускаясь, груз вращает якорь. Когда якорь достаточно раскрутился, к клеммам динамомашины присоединили сопротивление нагрузки. Изобразите на графике зависимость скорости вращения якоря от времени с момента начала движения груза.

Так как до подключения нагрузки момент внешних сил, действующих на якорь, постоянен, то якорь вращается с постоянным угловым ускорением и его скорость увеличивается пропорционально времени.

После подключения нагрузки по обмотке якоря пойдет ток. Благодаря этому на якорь в магнитном поле статора будет действовать момент сил, пропорциональный (как и сила, действующая в магнитном поле на проводник с током) величине тока. Этот момент сил тормозит вращение якоря. Так как ток, идущий по обмотке якоря, пропорционален э.д.с. индукции, возникающей в обмотке, а э.д.с. индукции, в свою очередь, пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего обмотку, то есть угловой скорости вращения якоря, то при некоторой угловой скорости ω_0 момент силы, действующей на якорь со стороны груза, будет равен моменту тормозящей силы, действующей на якорь в магнитном поле. ω_0 и есть скорость установившегося вращения якоря.

График зависимости скорости вращения якоря от времени показан на рисунке 3: красной линией — для случая, когда скорость вращения якоря в момент подключения нагрузки была меньше ω_0, и синей — когда она была больше ω_0.

Ф49

U-образная трубка заполнена водой (рис. 4). Из одного колена воздух удален; давление воздуха в другом колене при температуре $T_0=20$° C равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до $T=100$° C?

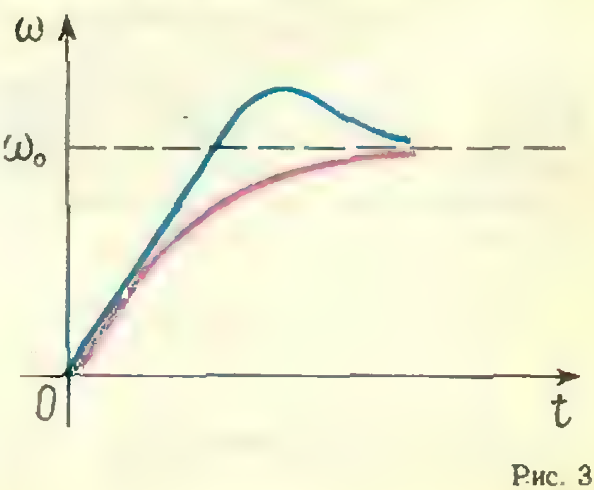


Рис. 3.

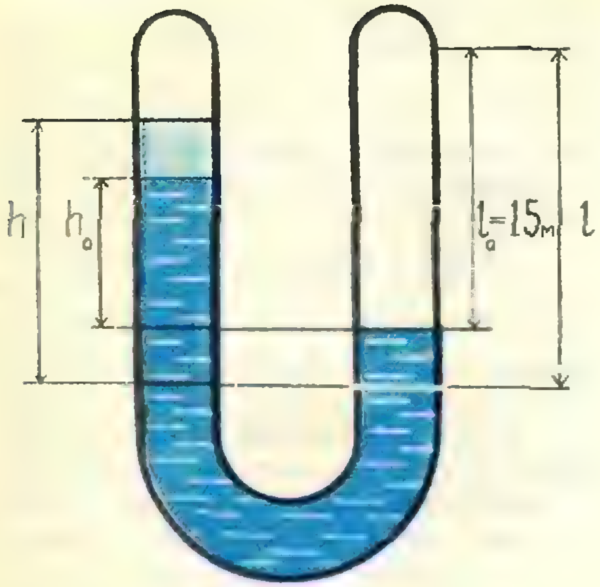


Рис. 4.

Давление в левом колене равно давлению насыщенного пара. В правом же колене находится как воздух, так и водяной пар, и давление равно сумме парциальных давлений воздуха и пара. Причем пар в правом сосуде тоже насыщен, и его парциальное давление равно давлению пара в левом колене. Поэтому, рассматривая равновесие воды, мы можем не учитывать давлений пара в левом и правом коленах.

Запишем условие равновесия воды в трубке при $T_0=20°$ C:

$$\rho g h_0 = P_0, \quad P_0 = 1 \text{ атм}.$$

Отсюда

$$h_0 = \frac{P_0}{\rho g} \approx 10 \text{ м}.$$

При 100° C давление воздуха в правом колене станет равным P, а разность уровней воды в коленах h. При этом

$$\rho g h = P. \qquad (*)$$

P связано с P_0 объединенным газовым законом:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T},$$

и $l - l_0 = {}^1/_2\,(h - h_0)$. Так как $V_0 = l_0 s$, $V = ls$ (s — площадь сечения трубки), то отсюда найдем

$$P = P_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l} = P_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}(h - h_0)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*), получим

$$h = \frac{P_0}{\rho g}\frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h},$$

или

$$h = h_0 \frac{T}{T_0}\frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h}.$$

Полагая, что ${}^1/_2\Delta h \ll l_0$, получим

$$h = h_0 \frac{T}{T_0} \approx 13 \text{ м};$$

$\Delta h \approx 3$ м, ${}^1/_2\Delta h \approx 1{,}5$ м $\ll l_0 = 15$ м. Это означает, что, пренебрегая ${}^1/_2\Delta h$ по сравнению с l_0, мы получили результат, малоотличающийся от точного.

Ф50

На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика с массами m, соединенных пружинкой жесткости k и длины l в нерастянутом состоянии. На левый кубик (рис. 5) внезапно начинает действовать постоянная по величине и направлению сила F. Найдите минимальное и максимальное расстояния между кубиками при дальнейшем движении системы.

Пусть расстояние l между кубиками минимально или максимально (будем говорить «экстремально»). Тогда оба кубика движутся с одинаковой скоростью v, и кинетическая энергия системы равна $2\frac{mv^2}{2} = mv^2$. В то же

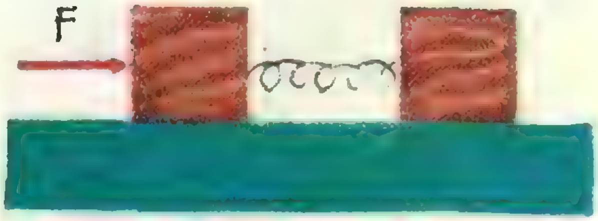


Рис. 5.

Заспорили ДВА ДРУГА

М. М. Лиман

В одном из скверов Краснодара имеется круглая цветочная клумба, расположенная в центре квадратного сквера $ABCD$ (рис. 1). Два друга —Вася и Петя — ходят в школу как раз через этот сквер. Причем иногда они выбирают путь AMC (красная линия), в другие дни — путь ADC (синяя линия). Васе кажется, что первый путь короче. Петя считает, что короче второй путь, и вот почему: круг, который им приходится обходить, имеет довольно большой радиус. «Конечно, — говорит Петя, — если бы радиус круга был невелик или если бы клумбы совсем не было, то путь по диагонали AC был бы явно короче ломаной линии ADC (рис. 2). Но размеры круга немалые, и если допустить, что круг был бы вписан в квадрат, то — рассуждает Петя — мы имели бы такую картину, как на рисунке 3». Теперь и Вася убедился, что синяя линия короче красной: по «синей» дороге надо идти все время «прямо», сделав только один поворот, по «красной» же дороге надо сделать несколько поворотов, а иногда даже как бы возвращаться назад.

Два друга решили рассеять свои сомнения таким образом: от точки A они пошли разными путями: Вася через сквер по красной линии, Петя — в обход — по синей линии. В точку C они прибыли почти одновременно. Спор остался нерешенным. Тогда они пошли обратно (каждый своей дорогой) к точке A. Теперь Петя пришел раньше Васи. И спор был решен окончательно в пользу Пети. Правда, Васе показалось, что Петя шел быстрее, чем Вася.

Дома Вася решил сделать математические вычисления, обозначив радиус круга через R, а сторону квадрата через a.

— Странно, — подумал Вася, — ответ на вопрос задачи не зависит от величины радиуса круга. Впрочем, — продолжал он свою мысль, — можно было обойтись и без вычислений: ведь всякая объемлющая линия, как известно, длиннее всякой объемлемой, имеющей те же концы.

Какие вычисления выполнил Вася и к какому результату он пришел?

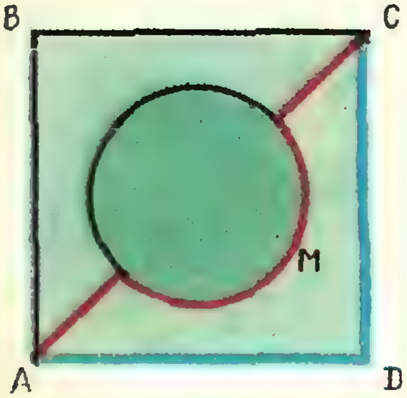


Рис. 1.

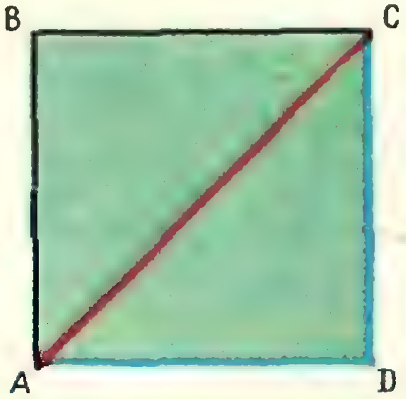


Рис. 2.

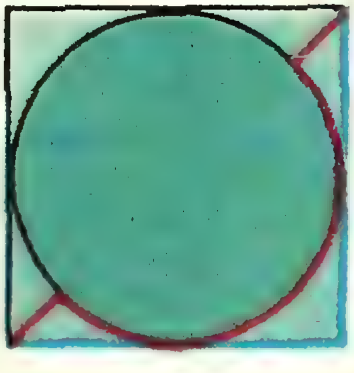


Рис. 3.

Заспорили ДВА ДРУГА

М. М. Лиман

В одном из скверов Краснодара имеется круглая цветочная клумба, расположенная в центре квадратного сквера $ABCD$ (рис. 1). Два друга — Вася и Петя — ходят в школу как раз через этот сквер. Причем иногда они выбирают путь AMC (красная линия), в другие дни — путь ADC (синяя линия). Васе кажется, что первый путь короче. Петя считает, что короче второй путь, и вот почему: круг, который им приходится обходить, имеет довольно большой радиус. «Конечно, — говорит Петя, — если бы радиус круга был невелик или если бы клумбы совсем не было, то путь по диагонали AC был бы явно короче ломаной линии ADC (рис. 2). Но размеры круга немалые, и если допустить, что круг был бы вписан в квадрат, то — рассуждает Петя — мы имели бы такую картину, как на рисунке 3». Теперь и Вася убедился, что синяя линия короче красной: по «синей» дороге надо идти все время «прямо», сделав только один поворот, по «красной» же дороге надо сделать несколько поворотов, а иногда даже как бы возвращаться назад.

Два друга решили рассеять свои сомнения таким образом: от точки A они пошли разными путями: Вася через сквер по красной линии, Петя — в обход — по синей линии. В точку C они прибыли почти одновременно. Спор остался нерешенным. Тогда они пошли обратно (каждый своей дорогой) к точке A. Теперь Петя пришел раньше Васи. И спор был решен окончательно в пользу Пети. Правда, Васе показалось, что Петя шел быстрее, чем Вася.

Дома Вася решил сделать математические вычисления, обозначив радиус круга через R, а сторону квадрата через a.

— Странно, — подумал Вася, — ответ на вопрос задачи не зависит от величины радиуса круга. Впрочем, — продолжал он свою мысль, — можно было обойтись и без вычислений: ведь всякая объемлющая линия, как известно, длиннее всякой объемлемой, имеющей те же концы.

Какие вычисления выполнил Вася и к какому результату он пришел?

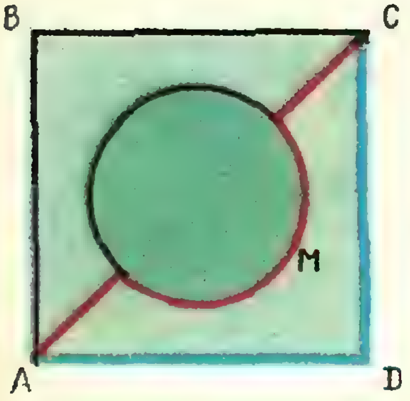


Рис. 1.

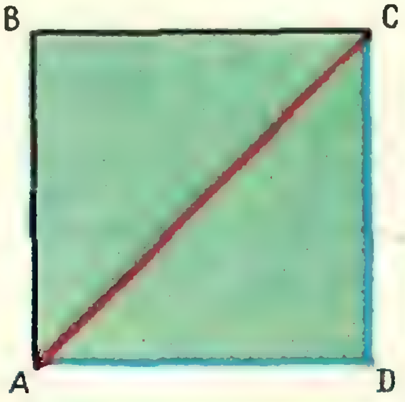


Рис. 2.

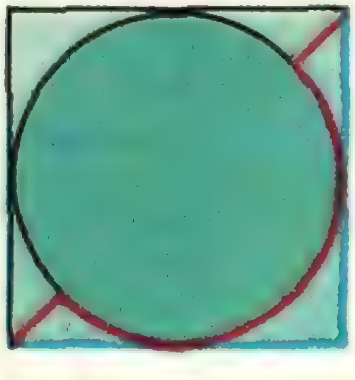


Рис. 3.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ЧТО ЗДЕСЬ—ТЕРЯЕМ ИЛИ НАХОДИМ?

В. А. Петров

Почти каждая письменная экзаменационная работа по математике включает в себя то или иное уравнение. Решая его, экзаменующийся должен не только безошибочно провести выкладки, необходимые для получения ответа, но и объяснить правомочность этих выкладок. Нужно уметь анализировать каждое из проделанных преобразований: приводит ли оно к равносильному уравнению, не угрожает ли потерей или приобретением решений.

Вопросы тактики «борьбы» с посторонними корнями и с потерей корней были рассмотрены в статье А. Г. Мордковича «Кто-то теряет, кто-то находит» («Квант» № 5, 1970)*). Теперь мы предлагаем вам проверить, достаточно ли твердо вы владеете этой тактикой. Сначала приводятся решения уравнений. Вам нужно проанализировать эти решения и ответить на следующие вопросы. Правильный ли получен ответ? Если нет, то что здесь — теряются корни или находятся посторонние? Почему? Каков правильный ответ? Сравните ваши соображения с нашими, помещенными на странице 62.

1. $2\sin 4x=\sqrt{2(1-\cos 4x)}$.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha,$$

получаем

$$2\sin 4x=\sqrt{4\sin^2 2x}$$

или

$$\sin 4x=\sin 2x,$$

что уже очень легко решается.

Ответ: $x=n\pi$ и $x=\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{3}$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

2. $8\cos x\cos 2x\cos 4x=1$.

Решение. Умножив обе части уравнения на $\sin x$ и трижды воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим простое уравнение

$$\sin 8x=\sin x.$$

Ответ: $x=(2n+1)\frac{\pi}{9}$ и $x=2n\frac{\pi}{7}$, где n — любое целое число.

3. $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right)=1$.

Решение. Из данного уравнения находим

$$\arccos x=\frac{5\pi}{2}+10n\pi$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

---

*) Более детально эта «тактика» освещена в очень полезной для абитуриентов книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», М., «Наука», 1970.

Отсюда, по определению $\arccos x$, получаем $x=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+10n\pi\right)=0$.

Ответ: $x=0$.

4. $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$.

Решение. Найдем ОДЗ:

$$x^2-5x+7>0,\ x-1>0,$$

откуда $x>1$. Согласно определению логарифмической функции, имеем

$$x^2-5x+7=x-1;\ x_1=2,\ x_2=4.$$

Так как оба значения входят в ОДЗ, то они и являются решениями исходного уравнения.

5. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб:

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\times$$
$$\times(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1.$$

Выражение в скобках представляет собой левую часть исходного уравнения — его можно заменить правой частью. После этого уравнение приводится к виду

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3.$$

Ответ: $x_1=0,\ x_2=1$.

6. *Может ли уравнение*

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

иметь бесконечно много решений?

Решение. Перенесем $\sqrt{x}$ направо и возведем обе части в квадрат:

$$x+a\sqrt{x}+b=c^2-2c\sqrt{x}+x.$$

После приведения подобных членов получаем: $(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b$. При $a+2c=0$ и $c^2-b=0$ (и только в этом случае), уравнение обращается в тождество, справедливое при всех неотрицательных x.

Ответ: уравнение имеет бесконечно много решений при $a=-2c$ и $b=c^2$. Решениями в этом случае являются $x\geqslant 0$.

7. $\left|\cos\frac{x}{2}\right|^{\sqrt{x^2+(7-\pi)x-7\pi}}=1.$

Решение. Если при возведении в степень некоторого положительного числа получилась единица, то это означает, что либо само число равно 1, либо показатель степени равен нулю. Поэтому решениями данного уравнения будут те и только те x, при которых $\left|\cos\frac{x}{2}\right|=1$ или $x^2+(7-\pi)x-7\pi=0$.

Ответ: $x=-7$, $x=\pi$ и $x=2n\pi$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$

8. $\begin{cases} x^2-y^2=9,\\ 2x+3y=22.\end{cases}$

Решение. Выразив x из второго уравнения и подставив в первое, получим: $5y^2-132y+448=0$; $y_1=4$, $y_2=\frac{112}{5}$. Подставляя в первое уравнение $y=4$, получаем $x=\pm5$, а при $y=\frac{112}{5}$ $x=\pm\frac{113}{5}$.

Ответ: $(4,\ 5)$; $(4,\ -5)$; $\left(\frac{112}{5},\ \frac{113}{5}\right)$; $\left(\frac{112}{5},\ -\frac{113}{5}\right)$.

9. $\begin{cases} ax+y=1,\\ x+ay=1.\end{cases}$

Решение. Умножив первое уравнение на $-a$ и сложив уравнения, получаем $(1-a^2)x=1-a$. Умножив второе уравнение на $-a$ и сложив уравнения, получаем

$$(1-a^2)y=1-a.$$

Ответ: при $a=-1$ система не совместна, при $a=1$ любая пара чисел $(x,\ y)$ является решением и при $a\neq\pm1$ система имеет единственное решение $x=y=\frac{1}{a+1}$.

10. $\begin{cases} x^3+y^3=a,\\ x^2y+2xy^2+y^3=2a.\end{cases}$

Решение. Разложим левые части уравнений на множители и поделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} y(x+y)^2=2a,\\ y^2-3xy+2x^2=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим

Ответ: $x_1=y_1=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ и $x_2=\sqrt[3]{\frac{a}{9}}$, $y_2=2\sqrt[3]{\frac{a}{9}}$.

Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1970 году

Ш. А. Алимов, Ф. П. Васильев, В. П. Моденов

В последние два десятилетия значение математических наук в общей системе человеческих знаний возросло неизмеримо. Главной причиной этого является развитие вычислительной математики. Создание электронных вычислительных машин произвело настоящую революцию не только в вычислительных возможностях и методах, но и в самом характере применения математики. Стало ясным, что качество и количество математических машин, их применение и системы управления ими являются неотъемлемой составной частью, определяющей научно-технический уровень страны.

В связи с этим возникла необходимость подготовки математиков новой специальности. В 1970 году в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова был открыт новый факультет — факультет вычислительной математики и кибернетики. В том же году был произведен первый прием на этот факультет.

На письменном экзамене по математике каждому поступавшему был предложен вариант из пяти задач, на решение которых отводилось 4 часа. Для получения удовлетворительной оценки нужно было решить более двух задач. Отличная оценка выставлялась за правильное решение всех пяти задач.

Разберем для примера типичный вариант, составленный из задач, предлагавшихся на письменном экзамене.

Вариант 0

1. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x-(a-2)\cos^2 x-3(a+1)=0$$

имеет решение, и найти все эти решения.

2. Решить уравнение

$$|1+\log_{\frac{1}{3}} x|=3+|2-\log_{\frac{1}{3}} x|.$$

3. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 240 *км* от A, со скоростью 40 *км/ч* выходит автобус. Одновременно с ним из B в A с постоянной скоростью v *км/ч* выезжает автомобиль. Через полчаса после встречи автомобиль, не доезжая до города A, поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B. Определить все те значения v, при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна среднему арифметическому длин сторон AB и AC. Угол A равен α. Найти углы B и C, считая, что $B \geqslant C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

5. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между высотой SO и образующей равен φ. На плоскости основания вне конуса выбраны две точки A и B так, что прямые SA и SB взаимно перпендикулярны и образуют с высотой SO углы, соответственно равные α и β. Вычислить угол между образующими, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB.

Разбор задач

1. Заметим, что $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1$ при всех x. Тогда с помощью подстановки $\cos^2 x = t$ уравнение приводится к системе:

$$\begin{cases} t^2-(a-2)\,t-3\,(a+1)=0,\\ 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

которая имеет решение $t=a+1$ при $-1\leqslant a\leqslant 0$. Следовательно,

$$\cos^2 x = a+1, \qquad (1)$$

где $-1\leqslant a\leqslant 0$. Отсюда

$$x=\pm\arccos\sqrt{a+1}+\pi n$$

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ -1\leqslant a\leqslant 0)$.

Большинство поступавших с решением этой задачи справилось. Часть абитуриентов неверно решила уравнение (1), ошибочно полагая, что $\arccos(-\sqrt{a+1})=\arccos\sqrt{a+1}$, и потеряла решения, соответствующие уравнению $\cos x=-\sqrt{a+1}$. Некоторые абитуриенты не указали всех значений a, при которых существуют решения задачи.

2. Область допустимых значений неизвестного: $x>0$. Перепишем уравнение в виде

$$|1+t|=3+|2-t|, \qquad (1)$$

где $t=\log_{\frac{1}{3}} x$. Последовательно рассмотрим промежутки $t\leqslant-1$, $-1<t<2$, $t\geqslant 2$. При $t\geqslant 2$ имеем

$$1+t=3+t-2, \qquad (2)$$

то есть уравнение (1) удовлетворяется тождественно при всех $t\geqslant2$. Далее убеждаемся, что уравнение (1) при $t\leqslant-1$ и $-1<t<2$ не имеет решения. Таким образом, решением уравнения (1) являются все $t\geqslant2$. Отсюда $\log_{\frac{1}{3}} x\geqslant 2$, и с учетом области определения находим

$$0<x\leqslant 1/9.$$

Некоторые абитуриенты, заметив тождество (2), писали, что уравнение удовлетворяется тождественно при всех t, не учитывая ограничения $t\geqslant2$.

3. Пусть t (*ч*) — время движения автомобиля до первой встречи с автобусом. Так как автомобиль и автобус выехали одновременно, то справедливо равенство

$$40\,t+vt=240. \qquad (1)$$

Автомобиль повернул обратно через $t+\frac{1}{2}$ (*ч*) после выхода из города B и, следовательно, вернулся в B через $2t+1$ (*ч*). Автобус после первой встречи прошел vt (*км*), затратив на этот путь $\frac{vt}{40}$ (*ч*). Таким образом, автобусу потребовалось на весь путь от A до B $t+\frac{vt}{40}$ (*ч*). Для того, чтобы автомобиль приехал в B раньше, чем автобус, должно выполняться неравенство

$$2t+1<t+\frac{vt}{40}. \qquad (2)$$

По условию автомобиль повернул обратно, не доезжая до города A. Поскольку в момент первой встречи он находился от A на расстоянии $40t$ (*км*) и в течение получаса прошел путь $\frac{v}{2}$, то это условие приводит к неравенству

$$\frac{v}{2}<40t. \qquad (3)$$

Объединяя (1), (2) и (3), мы приходим к системе:

$$\begin{cases} 40t+vt=240,\\ 2t+1<t+\frac{vt}{40},\\ \frac{v}{2}<40t.\end{cases}$$

Из уравнения (1) найдем $t=\frac{240}{v+40}$ и подставим в неравенства (2) и (3). Совместно решая получающиеся при этом неравенства относительно v, найдем $56<v<120$.

С составлением уравнения (1) и неравенства (2) справилось большинство абитуриентов, хотя некоторые из них заменяли знак $<$ в (2) на знак $\leqslant$. Основная доля ошибок была вызвана условием (3), так как многие абитуриенты не поняли необходимости этого требования и ограничились лишь решением системы, полученной из (1) и(2).

4. По условию

$$BC=\frac{AB+AC}{2}. \tag{1}$$

С помощью теоремы синусов найдем

$$AB=BC\frac{\sin C}{\sin\alpha},\quad AC=BC\frac{\sin B}{\sin\alpha}$$

и подставим в (1). Получим

$$\sin B+\sin C=2\sin\alpha,$$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin\alpha.$$

Так как

$$B+C=\pi-\alpha, \tag{2}$$

то $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$, и

$$\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Поскольку по условию $B\geqslant C$ и, кроме того, $0<C<\pi$, $0<B<\pi$, то

$$0\leqslant B-C<\pi. \tag{4}$$

Замечая, что $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, из условий (2), (3), (4) для определения B и C имеем систему:

$$\left\{\begin{aligned} &B-C=2\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right),\\ &B+C=\pi-\alpha.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Из (5) находим

$$\left\{\begin{aligned} &B=\frac{\pi-\alpha}{2}+\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right),\\ &C=\frac{\pi-\alpha}{2}-\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Таким образом, для всех значений α, при которых существует треугольник ABC, удовлетворяющий всем условиям задачи, величины углов B и C вычисляются по формулам (6).

Исследуем, при каких значениях α задача имеет решение. Из (6) необходимо следует $\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|\leqslant 1$. Так как $0<\alpha<\pi$, то отсюда $0<\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ и, следовательно, $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$. При найденных значениях α величины $A=\alpha$, B и C, определяемые по формулам (6), положительны и в сумме равны π. Для доказательства этого достаточно проверить условие $C>0$, ибо $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$ и, как следует из (6), $B\geqslant C$, $\alpha+B+C=\pi$.

Покажем, что $C>0$ или, согласно (5),

$$\frac{\pi-\alpha}{2}>\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right). \tag{7}$$

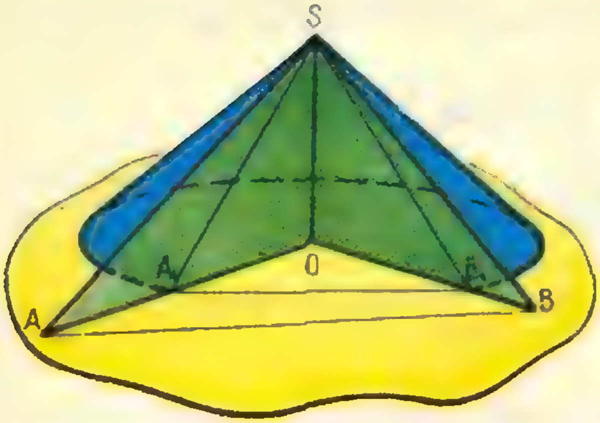
Так как $\cos x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ монотонно убывает, а величины $\frac{\pi-\alpha}{2}$ и $\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ принадлежат этому отрезку, то, вычисляя косинус от обеих частей неравенства (7), имеем $\cos\frac{\pi-\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}<2\sin\frac{\alpha}{2}$. При $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ это неравенство верно. Повторив наши рассуждения в обратном порядке, убеждаемся в справедливости неравенства $C>0$.

Таким образом, треугольник ABC с углами $A=\alpha$, $B\geqslant C$ и удовлетворяющий условию (1) существует, причем углы B и C выражаются формулами (6), $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$.

Многие поступавшие, получив систему для определения B и C, не смогли ее решить, а некоторые выписали ответ в виде (6), но не исследовали, при каких значениях α задача имеет решение. Часть абитуриентов указали лишь случай равностороннего треугольника

$$\alpha=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

5. Пусть x — искомый угол между образующими SA_1 и SB_1, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB (см. рисунок): $\sphericalangle ASB=\frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle OSA=\alpha$,



$\angle OSB = \beta$, $\angle OSA_1 = \angle OSB_1 = \varphi$. Вычислим косинус угла A_1OB_1, являющегося линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями треугольников OSA и OSB. Для этого найдем $A_1B_1^2$ по теореме косинусов из треугольника A_1SB_1 и из треугольника A_1OB_1, а затем приравняем полученные выражения. Получим

$$A_1S^2+B_1S^2-2A_1S\cdot B_1S\cdot\cos x = A_1O^2+B_1O^2-2A_1O\cdot B_1O\times\cos\angle A_1OB_1.$$

Так как $A_1S^2 = SO^2+A_1O^2$, $B_1S^2 = SO^2+B_1O^2$, то отсюда следует

$$2A_1O\cdot B_1O\cdot\cos\angle A_1OB = 2A_1S\times B_1S\cdot\cos x - 2OS^2.$$

Подставим в это выражение $A_1O = B_1O = OS\cdot\operatorname{tg}\varphi$, $A_1S = B_1S = \dfrac{OS}{\cos\varphi}$ и после сокращения на $2OS^2$ получим

$$\operatorname{tg}^2\varphi\cdot\cos\angle A_1OB_1 = \frac{\cos x}{\cos^2\varphi} - 1 \text{ или}$$

$$\cos\angle A_1OB_1 = \frac{\cos x - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}. \qquad (1)$$

Из треугольников ASB и AOB имеем

$$\cos\angle AOB = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (2)$$

Так как $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, то, приравнивая правые части равенств (1) и (2), получим

$$\cos x = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

откуда окончательно:

$$x = \arccos(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta).$$

С этой задачей справились немногие поступавшие.

Заметим, что формулы (1) и (2) выражают зависимость между внутренним двугранным углом и плоскими углами при вершине трехгранного угла. В общем случае, если A, B и C — внутренние двугранные углы, противолежащие соответственно плоским углам α, β и γ трехгранного угла, то справедливы формулы:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

которые выводятся так же, как и формула (1). Эти формулы могут оказаться полезными при решении многих стереометрических задач.

В заключение предлагаем самостоятельно решить следующий вариант, предлагавшийся на письменном экзамене.

Вариант I

1. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4x-(a+2)\cos^2x-(a+3)=0$$

имеет решения, и найти все эти решения.

2. Решить уравнение

$$|1-\log_{\frac{1}{6}}x|+2=|3-\log_{\frac{1}{6}}x|.$$

3. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 *км* от A, с постоянной скоростью v *км/ч* выходит автобус. Через 30 *мин* вслед за ним из A со скоростью 40 *км/ч* выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

4. В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α. Найти углы B и C, считая, что $B \geqslant C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

5. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ В МФТИ В 1970 ГОДУ

А. П. Савин, Б. В. Федосов

Задачи, предлагаемые на вступительном экзамене по математике в Московском физико-техническом институте, всегда привлекали внимание учителей и выпускников школ, поскольку уровень этих задач несколько выше, чем во многих технических вузах.

В 1970 году состав задач на письменном экзамене в МФТИ несколько изменился. Вместо четырех задач, предлагавшихся обычно, в 1970 году билет содержал пять задач (была добавлена одна легкая задача). Такой набор задач, видимо, сохранится и в дальнейшем.

С задачами приемных экзаменов МФТИ предыдущих лет можно познакомиться по сборнику «Задачи по элементарной математике»*), выдержавшему уже несколько изданий.

Хочется отметить, что трудность вступительного экзамена по математике в МФТИ часто преувеличивают. Тот факт, что после проведения всех экзаменов по математике и физике (устных и письменных) сохраняется конкурс в несколько человек на место, говорит сам за себя.

Чтобы вы смогли получить реальное представление о письменном экзамене по математике в 1970 году, подробно разберем один из вариантов.

Вариант 0

1. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 *сек*. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 *сек*. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 5x - 2 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x \cdot \operatorname{tg}^2 3x.$$

3. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найти AC, если $BC=a$, $AB=b$ и $\frac{DE}{AC}=k$.

4. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, каждое из которых параллельно ребрам AB и CD. Площадь части грани ABC, заключенной между секущими плоскостями, на s *см*^{2} больше площади части грани ACD, заключенной между этими же плоскостями. На сколько площадь одного сечения больше площади другого?

5. Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$$

Разбор задач

1. Обозначим через v_1 — скорость эскалатора, L — его длину и через v_2 — скорость пассажира. Тогда условия задачи запишутся в виде двух уравнений:

$$\frac{L}{v_1 + v_2} = 24, \qquad (1)$$

$$\frac{L}{v_2} = 42. \qquad (2)$$

Преобразуем эти уравнения:

$$\frac{v_1}{L} + \frac{v_2}{L} = \frac{1}{24}, \quad \frac{v_2}{L} = \frac{1}{42}.$$

---

*) В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. Задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1970.

Из двух последних уравнений сразу находим, что

$$\frac{v_1}{L}=\frac{1}{56},$$

а искомое время равно $\frac{L}{v_1}$, то есть 56 *сек.*

«Изюминка» задачи заключается в том, что из системы двух уравнений (1) и (2) с тремя неизвестными нужно найти лишь отношение двух неизвестных L и v_1. Те абитуриенты, которые пытались отыскать и L, и v_1, и v_2, естественно, не смогли этого сделать.

2. Преобразуем данное уравнение:

$$\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x= \\ =\operatorname{tg}3x\,(1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x), \quad (1)$$

$$\frac{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x}{1+\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x}=\operatorname{tg}3x.$$

В последнем преобразовании мы разделили обе части уравнения (1) на $1+\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x$. При этом мы можем потерять корни уравнения (1), являющиеся корнями уравнения $1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x=0$. Преобразуя исходное уравнение дальше, получаем

$$\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x,$$

откуда

$$3x=2x+k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

или

$$x=k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Проверим, не потеряли ли мы корней при делении уравнения (1) на $1+\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x$. Пусть x_1 — корень уравнения

$$1+\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x=0.$$

Тогда, подставив в исходное уравнение $\operatorname{tg}5x_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}3x_1}$, получим

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}3x_1}-\operatorname{tg}3x_1=0$$

или $\operatorname{tg}^2 3x_1=-1$, что невозможно. Следовательно, корней потеряно не было.

Ответ:

$$x=k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

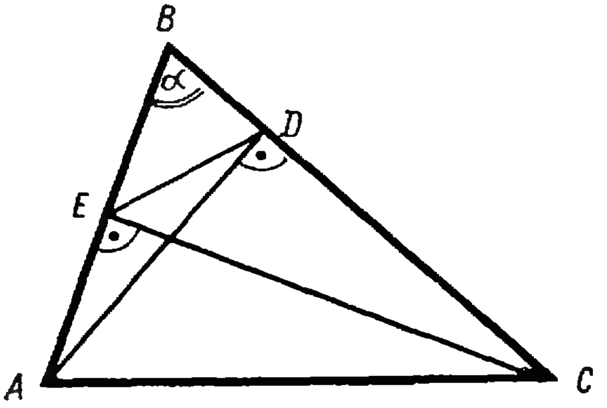


Рис. 1. $BC=a$, $BA=b$, $\frac{DE}{AC}=k$.

Те абитуриенты, которые пытались выражать $\operatorname{tg}3x$ и $\operatorname{tg}5x$ через $\operatorname{tg}x$ и решать полученное уравнение относительно $\operatorname{tg}x$, редко приходили к успеху из-за громоздкости выкладок и сложности полученного уравнения.

3. Обозначим $\measuredangle ABC$ через α, тогда из прямоугольного треугольника ABD (рис. 1)

$$BD=AB\ \cos\alpha=b\cos\alpha,$$

а из прямоугольного треугольника BEC

$$BE=BC\cos\alpha=a\cos\alpha.$$

Из треугольника BDE по теореме косинусов находим длину отрезка ED:

$$ED^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\alpha- \\ -2ab\cos^3\alpha. \quad (1)$$

Из треугольника ABC также по теореме косинусов находим длину отрезка AC:

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

Теперь, используя данное в условии задачи соотношение $\frac{DE}{AC}=k$, из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)\cos^2\alpha}{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}=k^2.$$

Отсюда $\cos^2\alpha=k^2$. Решение $\cos\alpha=k$ соответствует случаю острого угла α, а $\cos\alpha=-k$ — случаю тупого угла α. Осталось подставить найденные значения в уравнение (2),

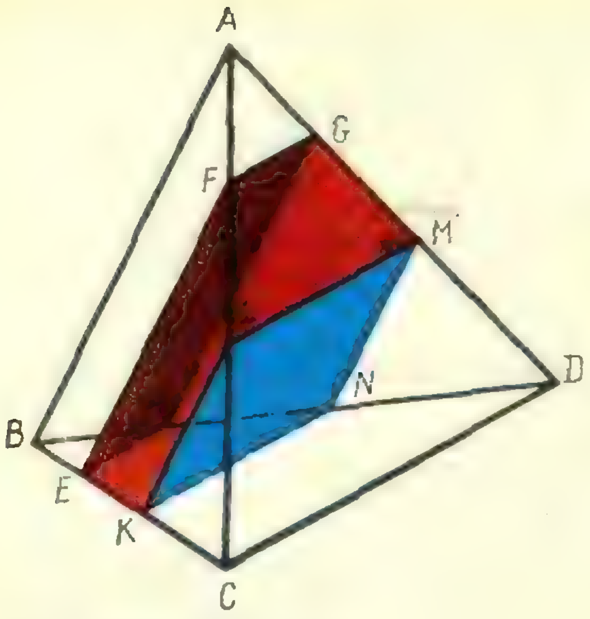


Рис. 2. $S_{EFLK} = S_{FGML} + s.$

чтобы получить оба ответа данной задачи:

$$AC = \sqrt{a^2+b^2+2abk}$$

или

$$AC = \sqrt{a^2+b^2-2abk}.$$

В этой задаче основную трудность составляет удачный выбор неизвестного. Введение угла α в качестве дополнительного неизвестного дает короткое и изящное решение задачи. Если же пытаться использовать в этой роли другой элемент, например, величину отрезка DE, то получается гораздо более сложная система уравнений, решение которой часто оказывалось поступавшим не под силу.

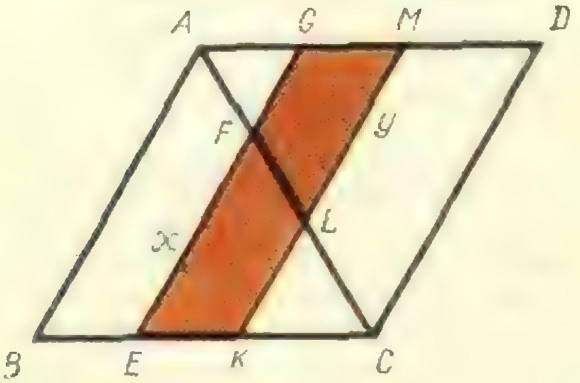


Рис. 3.

4. Рассмотрим многоугольники, получающиеся в сечении (рис. 2) тетраэдра указанными плоскостями. Нетрудно показать, что и четырехугольник $EFGH$ и четырехугольник $KLMN$ являются прямоугольниками. Развернем двугранный угол между плоскостями ABC и ACD на плоскость (рис. 3) и обозначим длину отрезка EF через x, а длину отрезка LM через y. Поскольку оба треугольника ABC и ACD — правильные, а стороны прямоугольников $EFGH$ и $KLMN$ соответственно параллельны ребрам AB и CD, то отрезок KL станет продолжением отрезка LM, а отрезок FG — продолжением отрезка EF. Если обозначить ребро тетраэдра через a, то очевидно, что $FG = a - x$, а $KL = a - y$. У трапеций $EFLK$ и $FGML$, как легко видеть, высоты равны. Найдем их. Высота h трапеции $EFLK$ равна разности высот правильных треугольников EFC и KLC, поэтому

$$h = x\frac{\sqrt{3}}{2} - (a-y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y-a).$$

Найдем площади указанных трапеций. Площадь трапеции $EFLK$ равна

$$\frac{EF+LK}{2}h = \frac{x+a-y}{2}h,$$

а площадь трапеции $FGML$ равна

$$\frac{FG+ML}{2}h = \frac{a-x+y}{2}h.$$

Используя условие, что разность указанных площадей равна s, получаем

$$\frac{x+a-y}{2}h - \frac{a-x+y}{2}h = s$$

или

$$s = h(x-y);$$

подставив вместо h найденное для него выражение, получим

$$s = (x-y)(x+y-a)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вернемся к прямоугольникам $EFGH$ и $KLMN$. Их площади равны соответственно $x(a-x)$ и $y(a-y)$, а разность площадей

$$\sigma = y(a-y) - x(a-x) = $$
$$= (x-y)(x+y-a).$$

Сравнивая выражения для s и σ получаем, что $\sigma = 2s/\sqrt{3}$

В этой задаче выбор неизвестных довольно естествен. Наиболее трудной частью решения является переход от пространственного рисунка 2 к развертке двух смежных граней на плоскость (рис. 3); после этого задача уже решается без особого труда.

5. Сложим первое и третье уравнения с удвоенным вторым. Получим

$$2x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 4xy + 8xz + $$
$$+ 8yz = 0$$

Сократив на 2, видим, что в левой части уравнения стоит полный квадрат выражения $x + y + 2z$, откуда

$$z = -\frac{1}{2}(x+y). \qquad (1)$$

Вычтем из второго уравнения данной системы третье уравнение, получим $x^2 + 4xz - y^2 - 8yz = 0$. Подставим в него найденное значение z (1)

$$x^2 - 2x(x+y) - y^2 + 4y(x+y) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, уравнение приводится к виду $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$. Выразим из него x через y:

$$x = y \pm 2y.$$

Итак, либо $x = -y$, либо $x = 3y$.

Рассмотрим первый случай $x = -y$. Из уравнения (1) получаем $z = 0$. А тогда из третьего уравнения исходной системы следует, что

$$y^2 = 1.$$

Отсюда находим два значения для y: $y = 1$ или $y = -1$.

Таким образом, в первом случае получаем два решения:

$$x_1 = -1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 0,$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = -1,\ z_2 = 0.$$

Рассмотрим второй случай: $x = 3y$. Из того же уравнения (1) следует, что $z = -2y$. Подставляя это значение для z в третье уравнение исходной системы, получаем, что $-7y^2 = 1$. Итак, во втором случае действительных решений нет.

Остается проверить, что найденные в первом случае решения удовлетворяют уравнениям начальной системы. Это оказывается верным. Таким образом, найдены два действительных решения данной системы.

Основная трудность этой задачи — преобразование уравнений данной системы к более простой системе. Те поступавшие, которые пытались «в лоб» решать эту задачу методом исключения неизвестных, наталкивались на непреодолимые трудности. Заметим, что данную систему можно привести к другим системам, отличающимся от разобранных нами, но также допускающим несложное решение.

По имеющимся у нас сведениям, практически все поступавшие решили по крайней мере одну задачу, подавляющее большинство (около 95%) — не меньше двух задач, более половины поступавших — не менее трех задач, треть — не менее четырех задач.

Приводим вариант для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение $\dfrac{\lg(98 - x^3)}{\lg(2-x)} = 3$

2. Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.

3. В $\Delta\, ABC$ внешний угол при вершине A в три раза больше $\angle B$, а стороны AB, BC, AC (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти углы треугольника.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - \dfrac{16}{xz} = -5, \\ xz + \dfrac{8}{yz} = 4, \\ yz - \dfrac{3}{xy} = 1 \end{cases}$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Каждый из плоских углов $\angle CSA$ и $\angle ASB$ равен 45°, а $\angle SAB = \operatorname{arctg} 2$. Через вершину C проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найти двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью сечения. (Найти все решения.)

ЗАДАЧИ НА ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Ю. В. Зайчиков

Задачи подобного типа часто даются на приемных экзаменах в вузы, и поступающему полезно познакомиться с некоторыми общими методами их решения.

Несколько слов о самих законах. Формулировать их можно по-разному, и не в этом суть. Главное — понимать их физическое содержание. Вспомним самое основное.

Первый закон Ньютона утверждает, что тело не имеет ускорения (стоит на месте или движется прямолинейно и равномерно), если на него не действуют силы или их суммарное действие равно нулю. Иными словами, ускорение $\vec a = 0$ и скорость $\vec v$ постоянна, если $\sum \vec F = 0$.

Важен векторный смысл закона: именно векторная сумма сил должна равняться нулю (рис. 1), именно вектор скорости остается в этом случае постоянным: скорость неизменна по величине и направлению.

Если же равнодействующая всех приложенных к телу сил $\bar R = \sum F$ отлична от нуля, то непременно возникает ускорение, пропорциональное этой равнодействующей и обратно пропорциональное массе тела m.

$$\vec a = \frac{\sum \vec F}{m}$$

Это уже второй закон Ньютона. И опять-таки очень существен его векторный характер: векторное равенство $\vec a = \frac{\sum \vec F}{m}$ означает, что суммарное ускорение не только пропорционально равнодействующей сил, приложенных к телу, но и совпадает с ней по направлению. Можно, конечно, считать и так: каждая сила вызывает свое, совпадающее с ней по направлению ускорение, а общее ускорение равно векторной сумме этих ускорений (рис. 2).

Следует помнить, что с силой по направлению совпадает ускорение, а не скорость, которая, вообще говоря, может быть направлена как угодно, в зависимости от того, как двигалось тело раньше. Так, например, при полете камня, брошенного под углом к горизонту, его скорость непрерывно изменяет свою величину и направление, тогда как вызывающая эти изме-

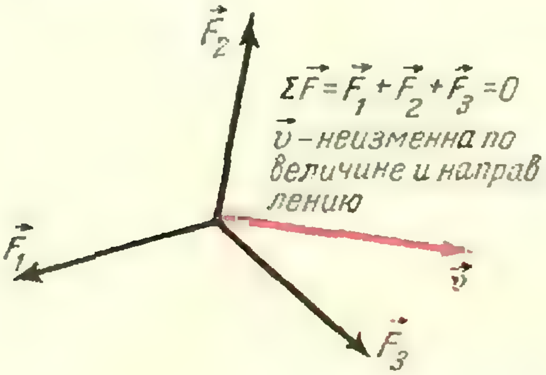

$\vec F_2$
$\Sigma \vec F = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = 0$
$\vec v$ – неизменна по величине и направлению
$\vec F_1$
$\vec v$
$\vec F_3$

Рис. 1

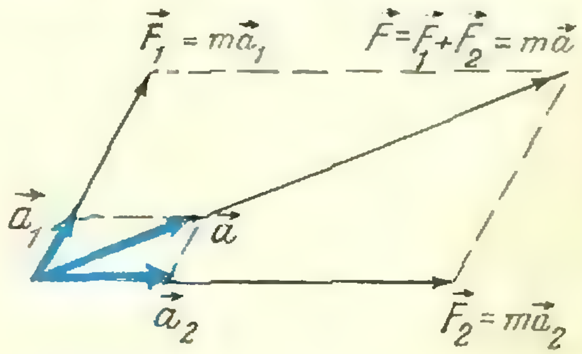


Рис. 2

нения сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и ускорение свободного падения $\vec{g}$ практически неизменны (рис. 3)

Третий закон утверждает, что все силы в механике — это силы взаимодействия между телами, равные по величине, противоположные по направлению и приложенные к разным телам (рис. 4). Последнее иногда забывают утверждая, например, что тело, стоящее на земле, уравновешено согласно третьему закону Ньютона действующими на него силами: силой тяжести $\vec{P}$ и силой реакции опоры $\vec{N}$ (рис 5). На самом деле равенство этих сил никакого отношения к третьему закону Ньютона не имеет и, как мы скоро увидим может вообще не выполняться

Каждая из этих сил, однако, в соответствии с третьим законом Ньютона имеет свою «пару», равную по величине, противоположную по направлению и приложенную к другому телу, в нашем случае — к земле: сила реакции опоры $\vec{N}$ — силу давления тела на землю $\vec{N}'$ сила притяжения тела к земле $\vec{P}$ — силу $\vec{P}'$, притягивающую землю к телу (рис. 6)

Рассмотрим теперь, как же решать задачи

Законы Ньютона обычно используют при расчете сил и ускорений. Для решения этих задач (как, впрочем, и любых других) нет универсальных рецептов, нужно лишь хорошо понимать применяемые законы, правильно разобраться в физической сущности процессов, о которых идет речь в задаче, и знать самые общие пути подхода к ее решению. Можно, например, предложить следующую, разумеется совсем не обязательную, последовательность действий:

первое — изобразить на схеме движущиеся тела и действующие на них силы;

второе — определить направление и характер движения (иногда это, правда, удается сделать лишь в конце);

третье — выбрать для каждого движущегося тела две оси (обычно по предполагаемому направлению движения и перпендикулярно к нему) и разложить по этим осям (спроектировать на них) действующие на тело силы;

четвертое — для каждого тела записать второй закон Ньютона, отдельно для каждой оси. При этом проекции сил и ускорений

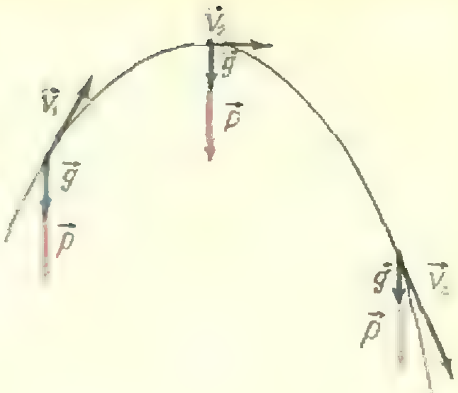


Рис 3

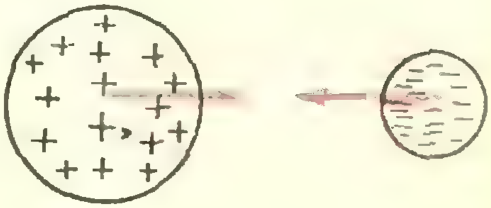


Рис 4.

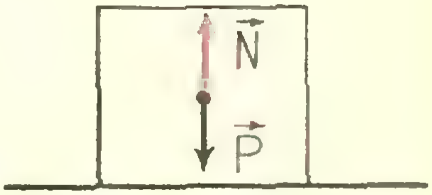


Рис. 5

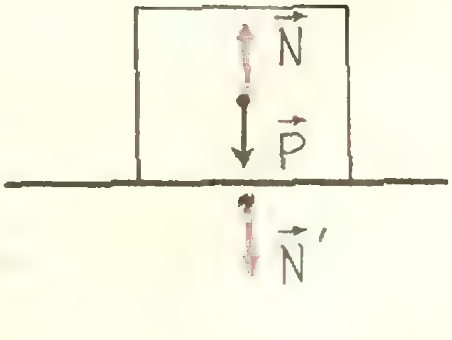


Рис 6

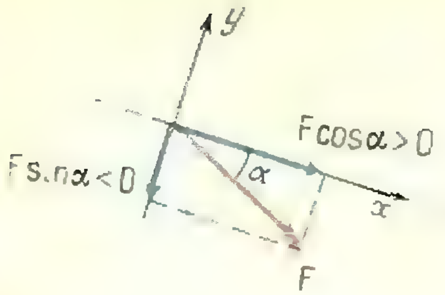


Рис 7

на оси считают положительными, если их направления совпадают с положительным направлением оси, и отрицательными, если они направлены противоположно (рис. 7);

пятое — решив составленные уравнения, найти неизвестные.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти натяжение нитей и ускорение грузов в системе, показанной на рисунке 8. Нить считать нерастяжимой, силы сопротивления, массу блока и нити не учитывать

Рассмотрим прежде всего, какие силы действуют на каждый из грузов. Во-первых, это сила тяжести $P = mg$. Если принять

$$g = 10\ м/сек^2,\ то\quad P_1 = 20\ н,\quad P_2 = 5н,\quad P_3 = 25\ н.$$

Во-вторых, на каждый из грузов действует сила натяжения нити: T_1 — на первый и второй грузы и T_2 — на второй и третий.

Заметим, кстати, что сила T_1 одинакова для первого и второго грузов только в том случае, когда массой блока и нити можно пренебречь. Если бы масса нити не была мала, то ускорение каждому участку нити сообщала бы разность сил натяжения нити. Поэтому силы натяжения нити, действующие на разные грузы, не могли бы быть одинаковыми.

Аналогично и для блока: привести его в движение можно, строго говоря, только в том случае, если с одной стороны нить будет тянуть сильнее, чем с другой.

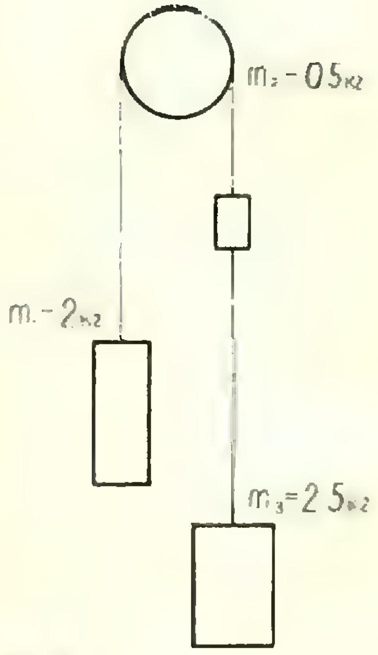


Рис 8

Изобразив на схеме силы, действующие на грузы (рис. 9), попробуем определить направление и характер движения.

Правая часть системы тяжелее, поэтому грузы m_2 и m_3 станут опускаться, а груз m_1 — подниматься. Движение будет равноускоренным с одинаковым для всех грузов ускорением, ибо преобладание веса правой части при отсутствии сил сопротивления и нерастяжимости нити равносильно действию на систему в целом постоянной результирующей силы, что по второму закону Ньютона должно вызывать постоянное ускорение.

Мы можем оценить и относительную величину сил натяжения. Ясно, например, что $T_1 > P_1$, ибо для первого груза ускорение, а значит, и результирующая сила должны быть направлены вверх. Аналогично $T_2 < P_3$, а $P_2 + T_2 > T_1$ (рис. 9).

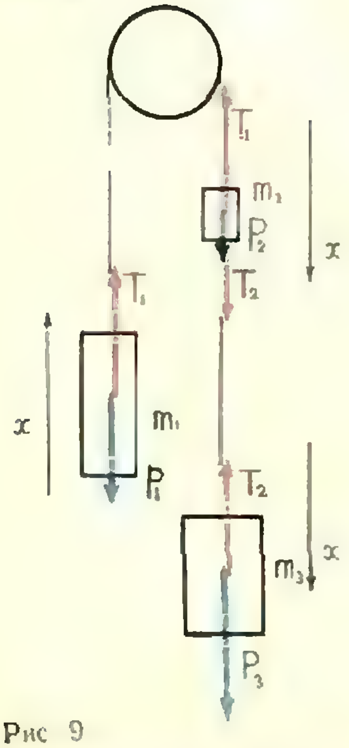


Рис 9

Выбор осей очевиден: для первого груза одну ось удобно направить вверх, для второго и третьего — вниз (по движению). Что касается второй (перпендикулярной) оси, то в этой

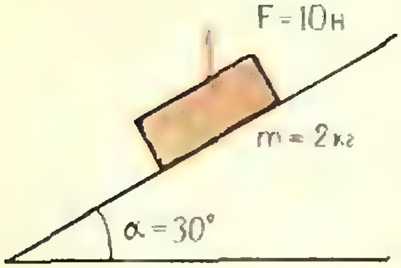


Рис 10

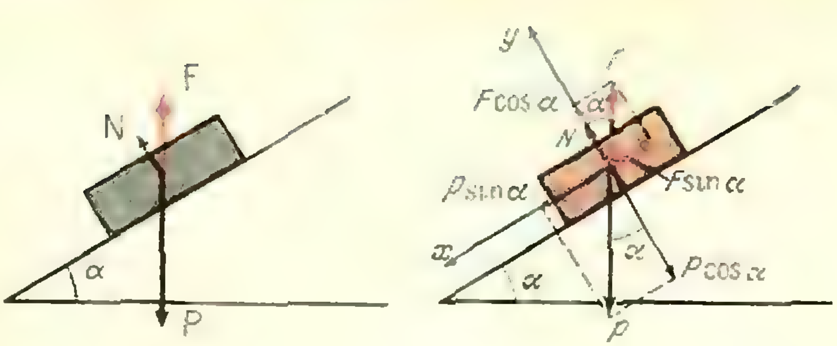


Рис 11а,б

задаче она просто не нужна: ни одна из сил на нее не спроектируется — все они направлены либо вверх, либо вниз и поэтому проектируются целиком только на первую ось.

Теперь уже можно легко написать уравнения движения (уравнения второго закона Ньютона) для каждого из трех грузов:

$$T_1 - P_1 = m_1 a, \quad (1)$$

$$P_2 + T_2 - T_1 = m_2 a, \quad (2)$$

$$P_3 - T_2 = m_3 a. \quad (3)$$

Мы получили три уравнения, из которых без труда можно найти три неизвестных (a, T_1 и T_2).

Подставив, например, T_1 и T_2 из (1) и (3) в (2), получим

$$a = \frac{P_2 + P_3 - P_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 2 \text{ м/сек}^2.$$

Подставив этот результат в уравнения (1) и (3), найдем

$$T_1 = P_1 + m_1 a = 24 \text{ н},$$

$$T_2 = P_3 - m_3 a = 20 \text{ н}.$$

Оси, разумеется, можно было бы направить и по-иному, например для первого груза не вверх, а вниз. Тогда вместо $T_1 - P_1 = m_1 a$ мы записали бы $P_1 - T_1 = -m_1 a$, что нисколько не повлияло бы на конечный результат.

2. Найти ускорение, давление тела на наклонную плоскость и силу трения (рис. 10). Коэффициент трения $k = 0{,}2$. Сила $F = 10$ н направлена вертикально вверх.

На тело действуют четыре силы: сила F — вверх, сила тяжести P — вниз, реакция опоры N — перпендикулярно к наклонной плоскости и сила трения $f_{\text{тр}}$, направление которой можно узнать, лишь определив направление движения тела. В подобных случаях обычно прикидывают, куда бы двигалось тело без трения под действием всех остальных сил, в нашем случае — под действием сил F, P и N (рис. 11а). Сила трения, очевидно, не в состоянии изменить направление движения, а может лишь уменьшить его скорость или даже полностью затормозить тело.

Можно предположить, что тело будет скользить вдоль наклонной плоскости вверх или вниз. Чтобы найти направление движения, выберем две оси: ось x направим вдоль наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно к ней (рис. 11 б). Разложив по этим осям силы F, P и N *), уви-

---

*) Заметим кстати, что, разложив силу по осям, необходимо помнить, что она уже заменена другими, и поэтому ее можно либо перечеркнуть на рисунке, чтобы снова не рассматривать как действующую, либо составить новый рисунок с одними «разложенными» силами.

дим, что по плоскости тело может перемещаться только вниз, так как из двух действующих вдоль нее сил $P\sin\alpha$ больше $F\sin\alpha$. Сила трения, следовательно, может быть направлена только вверх по наклонной плоскости.

В нашем примере мы должны, правда, допустить еще одну возможность сила F может быть настолько велика, что тело вообще не будет скользить по плоскости, а оторвется от нее. Однако, сравнив «прижимающую» силу $P\cos\alpha = 17{,}4$ *н* с силой $F\cos\alpha = 8{,}7$ *н*, увидим, что первая больше второй, и поэтому тело не может оторваться от плоскости.

Надо сказать, что разность этих сил $P\cos\alpha - F\cos\alpha = 8{,}7$*н* дает искомую силу давления тела на плоскость и равную ей по величине реакцию опоры N

Напишем теперь второй закон Ньютона, помня о том, что силы, направленные противоположно положительному направлению оси, считаются отрицательными. Для оси y получим.

$$F\cos\alpha + N - P\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

(ускорения в этом направлении нет, поэтому и сумма сил равна нулю) А для оси x получим:

$$P\sin\alpha - F\sin\alpha - f_{\text{тр}} = ma. \qquad (2)$$

В задачах подобного типа иногда делают ошибки при определении величины силы трения. Привыкнув к задачам с горизонтально двигающимися телами, нередко, недолго думая, вычисляют силу трения как произведение коэффициента трения на вес тела.

На самом же деле $f_{\text{тр}} = k\cdot N$, где N — сила нормального давления (реакция опоры), то есть сила, действующая на тело перпендикулярно плоскости скольжения (или равная ей по величине и противоположная по направлению сила давления тела на плоскость).

В нашей задаче нужно учесть и угол наклона плоскости, и силу F, несколько уменьшающие силу нормального давления:

$$f_{\text{тр}} = k(P\cos\alpha - F\cos\alpha) = k(P - F)\cos\alpha = 0{,}2(20 - 10)0{,}87 = 1{,}74 \text{ н}$$

Теперь из уравнения (2) легко найти ускорение тела:

$$a = \frac{(P - F)\sin\alpha - f_{\text{тр}}}{m} = \frac{(20 - 10)\,0{,}5 - 1{,}74}{2} = 1{,}63 \text{ м/сек}^2.$$

3. В ракете установлены пружинные весы, на которых лежит брусок До вылета весы показывали 10 *н*. В полете весы вначале показывали 30 *н*, затем 10 *н*, 5 *н*, 0 *н* Что можно сказать об ускорении и направлении движения ракеты в эти моменты времени?

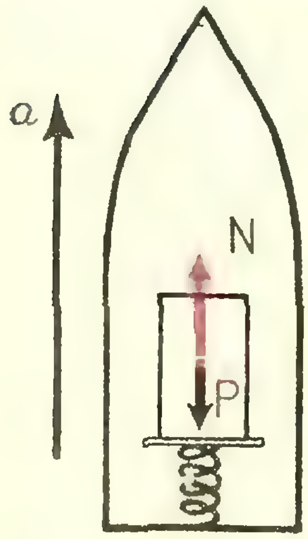


Рис 12

Разберемся прежде всего в силах.

На брусок действуют две силы: сила тяжести P и реакция опоры N (рис. 12). Когда ракета не имеет вертикального ускорения (например, до вылета), эти силы равны. В нашем случае $P = N = 10$ *н*.

Если ракета (а значит, и брусок) движется ускоренно, например, вверх, то равнодействующая этих сил тоже должна быть направлена вверх ($N > P$). Если ускорение направлено вниз, то $P > N$.

Что же показывают весы? Конечно, не силу тяжести, как иногда думают. Весы регистрируют силу, с которой на них давит брусок. Эта сила приложена к весам и в соответствии с третьим законом Ньютона равна по величине и противоположна по направлению реакции опоры N, приложенной к бруску

Из условий задачи видно, что сила реакции опоры N и равная ей по величине сила давления на опору, или вес, заметно меняются в процессе полета и, вообще говоря, не равны силе тяжести $P=mg$, которую практически можно считать постоянной (если пренебречь ее изменением с высотой). Запишем второй закон Ньютона для движения вдоль оси, направленной, например, вверх.

$$N-P=ma$$

Подставив сюда $N_1=30$ *н*, $P=10$ *н*, $m=1$ *кг* $\left(m=\frac{P}{g}=\frac{10}{10}=1\ кг\right)$, получим: $a_1=\frac{N_1-P}{m}=\frac{30-10}{1}=20$ *м/сек*^{2}. Ускорение положительно и направлено, следовательно, вверх.

При $N_2=10$ *н* получим $a_2=0$, при $N_3=5$ *н* $a_3=-5$ *м/сек*^{2}, при $N_4=0$ $a_4=-g$. В последних двух случаях ускорение отрицательно, значит, оно направлено вниз, ибо в нашем уравнении мы считали N и a направленными одинаково (оба положительны).

Что касается направления движения, то тут следует предостеречь от поспешных выводов. Ошибочно, например, утверждать, что ракета двигалась вначале вверх ($a_1>0$), затем остановилась ($a_2=0$), стала двигаться ускоренно вниз ($a_3<0$) и, наконец, перешла в свободное падение ($a_4=-g$). На самом деле ракета могла двигаться и иначе, например все время вверх: ускоренно ($a_1>0$), с постоянной скоростью ($a_2=0$), замедленно ($a_{3,4}<0$). Ускорение, равное ускорению свободного падения, означает лишь, что равнодействующая всех действующих на ракету сил равна силе тяжести; двигаться же она при этом может и вверх — с выключенным двигателем, если не учитывать сил сопротивления, или при такой его работе, когда эти силы полностью уравновешиваются силой тяги. Все тела, находящиеся в ракете, в этом случае будут в состоянии невесомости, то есть их давление на опору и реакция последней будут равны нулю.

Все дело в том, что мы нашли лишь ускорение, а не скорость и не направление движения, о которых в условиях нашей задачи сказать, к сожалению, ничего нельзя.

4. Шарик массы m, висящий на нити длиной R, отводят в сторону до горизонтального положения и отпускают (рис. 13). Определить натяжение нити и ускорение шарика, когда нить окажется под углом α к горизонту. Найти закон изменения силы натяжения нити, скорости и ускорения шарика в зависимости от угла α. Силами сопротивления пренебречь.

Для решения воспользуемся тем же методом, что и раньше: расставим на рисунке силы, прикинем, какими могут быть направление и характер движения, выберем оси и, разложив по ним силы, запишем уравнение движения.

На шарик действуют две силы: сила тяжести P и сила натяжения нити T (рис. 14). Двигаться он будет, очевидно, по дуге радиуса R.

Одну из осей (x) направим по касательной к траектории, вторую (y) перпендикулярно к ней — по радиусу. Разложив по ним силы, увидим, что вдоль оси x действует сила $P\cos\alpha$, вдоль оси y — силы T и $P\sin\alpha$.

Сила $P\cos\alpha$ вызывает так называемое тангенциальное, или касательное, ускорение a_t, изменяющее скорость по величине.

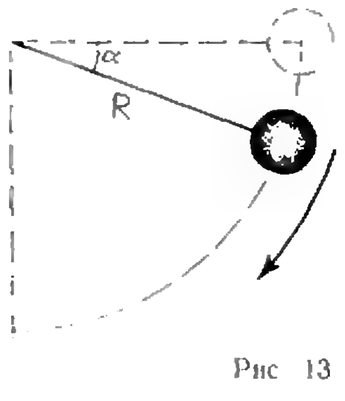


Рис 13

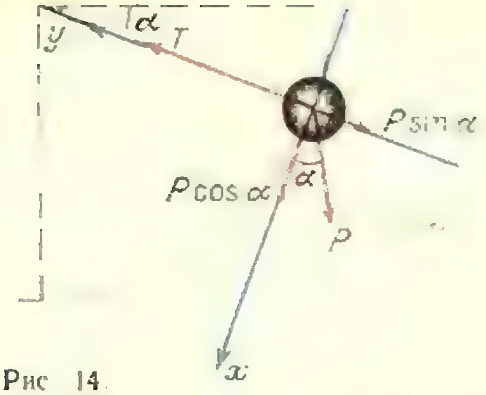
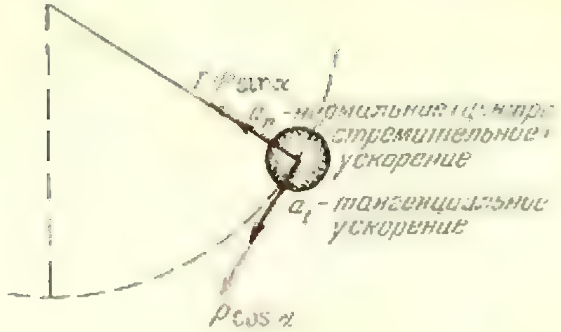


Рис 14



T Psinα
a_n - нормальное (центростремительное) ускорение
a_t - тангенциальное ускорение
Pcos α

Рис 15

a_t является вектором, направленным как и $P\cos\alpha$ по касательной к траектории движения шарика (рис. 15).

. Равнодействующая сил T, $P\sin\alpha$ сообщает шарику центростремительное (нормальное) ускорение, изменяющее скорость по направлению (рис. 16.)

Записав второй закон Ньютона, для движения вдоль осей x и y получим

$$P\cos\alpha = ma_t, \tag{1}$$

$$T - P\sin\alpha = ma_n. \tag{2}$$

Из уравнения (1) сразу найдем тангенциальное ускорение a_t и закон его изменения:

$$a_t = \frac{P\cos\alpha}{m} = \frac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha.$$

Центростремительное ускорение, возникающее при всяком криволинейном движении, так же является вектором. Оно всегда направлено внутрь кривизны траектории вдоль радиуса и вызывается алгебраической суммой радиальных проекций всех действующих на тело сил. Величина центростремительного ускорения, как известно, рассчитывается по формуле $a_n = v^2/R$. R известно, а скорость найдем, записав закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \tag{3}$$

где $h = R\sin\alpha$ (рис. 17). Отсюда $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR\sin\alpha}$ и $a_n = 2gR\sin\alpha / R = 2g\sin\alpha$.

Скорость v и центростремительное ускорение a_n равны нулю в верхнем положении ($\sin\alpha = 0$) и максимальны в нижнем ($\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$).

Тангенциальное ускорение a_t, наоборот, имеет наибольшее значение в начале движения вверху ($\cos\alpha = 1$) и равно нулю, когда нить вертикальна

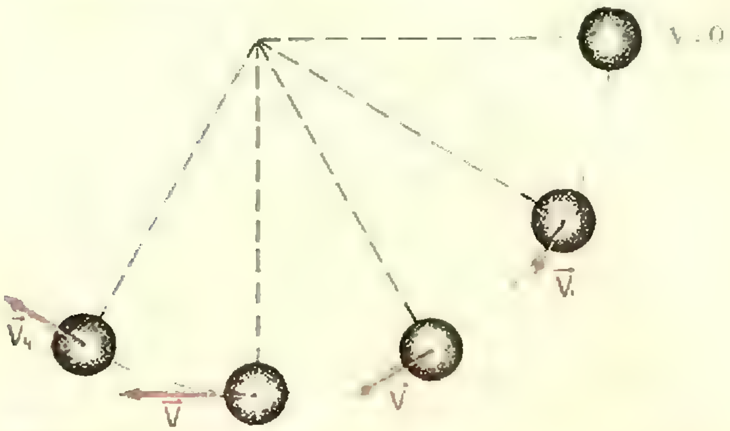


Рис 16

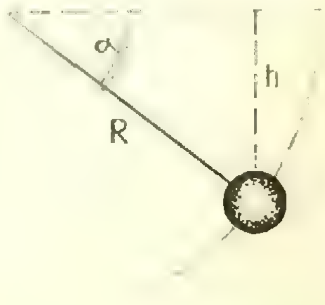


Рис 17

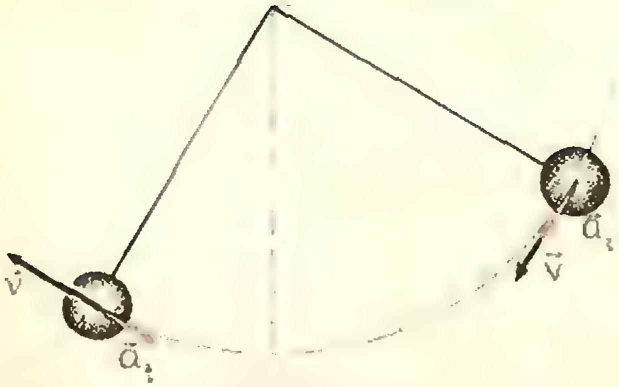


Рис 18

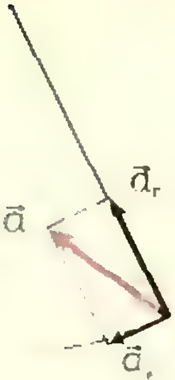


Рис 19

($\cos\alpha > 0$). После прохождения шариком самой нижней точки траектории a_t становится отрицательным ($\cos\alpha < 0$). Оно направлено против скорости (рис 18) и уменьшает ее (это, кстати сказать, ясно и из закона сохранения энергии — h в формуле (3) убывает).

Мы нашли величину скорости, тангенциального и центростремительного ускорений для произвольного угла α, а также закон их изменения в зависимости от изменения этого угла. Известны и их направления для любого момента времени ($\vec{a}_t$ и $\vec{v}$ — по касательной, $\vec{a}_n$ — по радиусу). Теперь можно определить еще полное ускорение, равное векторной сумме тангенциального и центростремительного ускорений ($\vec{a}_t + \vec{a}_n$) (рис. 19).

Силу натяжения нити и закон ее изменения в зависимости от угла нетрудно найти из уравнения (2): $T - P\sin\alpha = ma_n$.

Подставив сюда вместо a_n найденное значение $2g\sin\alpha$, получим

$$T = P\sin\alpha + 2mg\sin\alpha, \text{ или } T = 3P\sin\alpha.$$

Натяжение нити максимально, когда шарик проходит нижнее положение ($\sin\alpha$ имеет наибольшее значение, равное 1).

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. Рассмотрите пример 2 для случая, когда сила F направлена не вверх, а под углом $\beta = 45°$ к наклонной плоскости (рис. 20) и равна: 15 *н*, 20 *н*, 30 *н* (расчет провести для всех трех случаев).
2. Продолжить решение примера 1, определив, как при движении шарика меняются направления равнодействующей сил, приложенных к шарику, и полного ускорения.
3. Найти натяжение нити, ускорение и силу трения груза m_2 о наклонную плоскость (рис. 21) при коэффициенте трения $k_1 = 0.1$ и при $k_2 = 0.2$. Нить считать нерастяжимой, массу блока и нити не учитывать.
4.* Решить задачу, аналогичную третьей, но со следующими изменениями: вместо груза m_2 — два груза $m_2 = 2$ *кг* и $m_3 = 5$ *кг*, связанные нитью (рис. 22); коэффициент трения для второго груза $k_2 = 0{,}1$, для третьего $k_3 = 0{,}05$. Дополнительно требуется определить натяжение нити между вторым и третьим грузами.

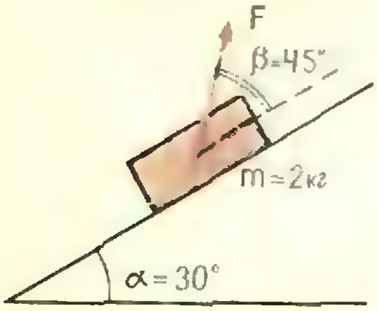


Рис 20

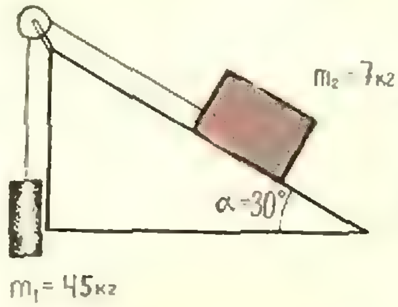


Рис 21

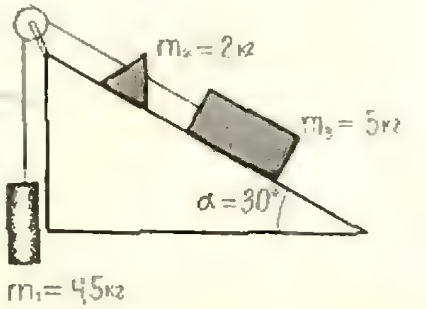


Рис 22

Московский математический...

Математика нужна во всем. Она нужна в естественно научных исследованиях, инженерных расчетах, разнообразных видах систем управления народным хозяйством.

Нужны математики, умеющие решать задачи, связанные с применением математических методов и вычислительной техники в разных областях науки и человеческой деятельности. Таких математиков называют специалистами по прикладной математике.

Быть специалистом по прикладной математике трудно, но интересно и увлекательно. Он должен знать, во-первых, что применять (общематематические науки), во-вторых, как применять (специальные математические науки), и, в-третьих, к чему применять (конкретные вопросы науки и человеческой деятельности).

Таких специалистов готовят в Московском математическом техникуме Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР *).

Московский математический техникум (ММТ) существует с 1967 года и дал уже два выпуска на базе 10-летней школы и один выпуск на базе 8-летней школы.

Срок обучения в ММТ для окончивших 8 классов средней школы — 2 года 10 месяцев, а для окончивших 10 классов — 1 год 10 месяцев. Выпускники получают квалификацию «вычислитель-математик» по специальности «Прикладная математика».

Они подготовлены для работы в вычислительных и научно-исследовательских центрах, отделах и лабораториях, в проектных и конструкторских бюро, на предприятиях

В своей работе вычислитель-математик разрабатывает алгоритмы решения задач на электронно-вычислительных машинах, создает и использует программы решения задач, реализует решение на машине и производит анализ полученного результата. Поэтому он должен обладать высокой математической культурой. Для этого учащиеся изучают в ММТ и общематематические дисциплины (алгебру, геометрию, математический анализ, линейную алгебру и аналитическую геометрию, математическую логику, теорию вероятностей), и специальные математические дисциплины (линейное и нелинейное программирование, вычислительную математику, программирование и алгоритмические языки, исследование операций, применение математических методов в естественно-научных исследованиях, в системах автоматизации и управления, в решении экономических задач). Поступившие после 8 класса получают также общее среднее образование.

Для того чтобы поступить в ММТ после окончания 8 или 10 классов, достаточно сдать устный экзамен по математике и письменный экзамен по литературе.

Каждый билет на экзамене по математике включает в себя как вопросы теоретического характера, так и несколько упражнений. При ответе на вопросы от поступающего требуется четкое и математически правильное изложение вопроса. При решении задач необходимо уметь аккуратно обосновывать каждый шаг решения, приводя все необходимые ссылки на соответствующие определения, аксиомы и теоремы.

---

*) Подготовку специалистов такой специальности начинают также в Ленинграде, Днепропетровске и в Ростове-на-Дону.

На экзамене также задаются дополнительные вопросы по теории и ее применениям в решении задач. содержание билетов и дополнительных вопросов не выходит за рамки школьной программы.

Приводим образцы вариантов экзаменационных билетов 1970 года

Вариант для окончивших 8 классов

1. Извлечение квадратного корня из произведения.

2. Синус, косинус и тангенс острого угла и их значения для угла 60°

3 а) Выполнить действия

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230.04+46.75}{0.01}$$

б) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-20=y^2, \\ x+y=6 \end{cases}$$

в) В равнобедренной трапеции основания равны *k см* и *l см*. Диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Вариант для окончивших 10 классов

1. Показательная функция, ее свойства и график.

2. Признаки параллельности прямых и плоскостей.

3. а) Упростить

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

б) Решить неравенство

$$\log_{2x-3} x>1$$

в) Найти значение $M(x)$, если $M(x)=\operatorname{tg}6x+\sec 6x$, $\operatorname{tg}3x=2$ и $0<x<\frac{\pi}{6}$

Остается лишь сообщить вам адрес ММТ: Москва, Е-43, Нижняя Первомайская, д. 14 (общежития при техникуме пока нет).

А. Г. Терушкин

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см «Квант» № 4, 1971 г. 3-я стр обложки)

1. Заметим, что при каждом разломе мы увеличиваем число кусков на один. Общее число кусков равно $4\times 8=32$. До разламывания мы имели один кусок, после первого разламывания их оказалось два, после второго разламывания три, ..., после 31-го разламывания 32. Таким образом, в каком бы порядке мы ни ломали шоколадку, нам всегда придется ломать ее ровно 31 раз.

2. Шифр заключается в следующем: твердые гласные заменены на соответствующие им мягкие, а мягкие на твердые (*а* на *я*, *у* на *ю* и т. д.); аналогично, звонкие согласные заменены на глухие, а глухие на соответствующие им звонкие (*б* на *п*, *в* на *ф*, *г* на к и т. д.); кроме того, произведена перестановка шипящих и свистящих согласных (*щ—ч*, *х—ц*) и знаков *ъ—ь*.

Ответ

Наша Таня громко плачет,
Уронила в речку мячик.
Тише, Танечка, не плачь,
Не утонет в речке мяч.

3. Требуемый способ изображен на рисунке 1.

4. 7 375 428 413:125 473=58 781.

5. Новое расположение спичек изображено на рисунке 2.

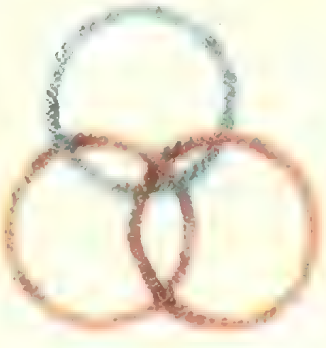


Рис 1

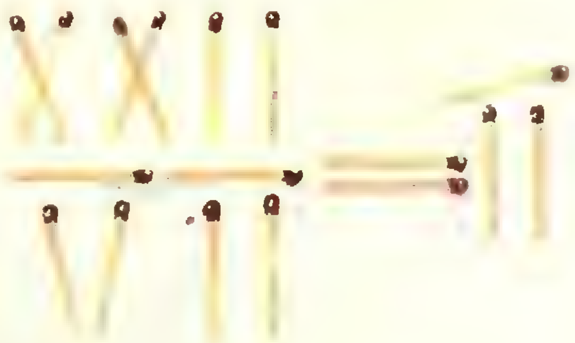


Рис 2. $\pi=3,14...\approx\frac{22}{7}$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Графики потенциальной энергии»

Задача 1

Как показано на рисунке 1, при $E < U_0$ возможно движение в двух областях AB и CD; если $E > U_0$, то область движения одна — NM.

Задача 2

При смещении тела вправо от положения равновесия (точка B на рисунке 13) тангенс угла наклона касательной к графику потенциальной энергии становится отрицательным, т. е. сила положительна и выводит тело из положения равновесия. Точка B называется точкой перегиба; тем самым мы доказали, что равновесие в точке перегиба неустойчиво. Положениями равновесия также являются точки A, C и участки (C, ∞) и $(-\infty, A)$. Точка C и весь участок (C, ∞) соответствуют безразличному равновесию. Если сдвинуть тело из любой точки на прямой потенциальной энергии (C, ∞), то оно остается в равновесии в новом положении. Аналогичная ситуация имеет место на участке $(-\infty, A)$, за исключением самой точки A. Равновесие в точке A является неустойчивым; чтобы в этом убедиться, достаточно чуть-чуть сместить тело вправо; тангенс угла наклона станет отрицательным, т. е. сила положительна, а значит, направлена от положения равновесия (санки скатываются из A вниз). График зависимости силы от координаты показан на рисунке 2.

Задача 3

Изменение потенциальной энергии на постоянную величину C графически соответствует смещению оси абцисс вверх или вниз (в зависимости от знака C) относительно оси ординат. При этом, очевидно, угол наклона касательной к «новой» оси x совпадает с углом наклона к «старой» оси x. Так как сила равна по величине тангенсу этого угла, то и она при таком преобразовании потенциальной энергии остается неизменной.

Задача 4

На кубик, плавающий в жидкости, действуют две силы: сила тяжести и выталкивающая сила. До тех пор, пока глубина погружения кубика h удовлетворяет условию $0 \leqslant h \leqslant a$, суммарная сила равна $F = \rho_к a^3 g - \rho_ж a^2 h g$.

Положим $h = h_0 + x$, где $h_0 = a\dfrac{\rho_к}{\rho_ж}$

Тогда $F = -\rho_ж a^2 g x$, если $-h_0 \leqslant x \leqslant a - h$. После того как кубик полностью погрузится в жидкость ($h > a$), независимо от глубины, на него действует постоянная сила $F = -(\rho_ж - \rho_к)a^3 g$; аналогично и на непогруженный в жидкость кубик действует постоянная по величине сила $F = \rho_к a^3 g$. В результате зависимость силы F от координаты x имеет вид, показанный на рисунке 3. Как и следовало ожидать, $x = 0$ — положение равновесия. Нетрудно непосредственным подсчетом площади убедиться, что

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2} x^2, \text{ если } -h_0 \leqslant x \leqslant a - h_0.$$

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2}(a - h_0)^2 + (\rho_ж - \rho_к) a^3 g x$$

при $x > a - h_0$, и

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2} h_0^2 - \rho_к a^3 g x$$

когда $x < -h_0$

График потенциальной энергии показан на рисунке 4. Постоянную C мы выбрали так, что $U(0) = 0$. Видно, что $x = 0$— положение устойчивого равновесия

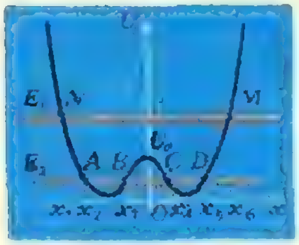


Рис. 1

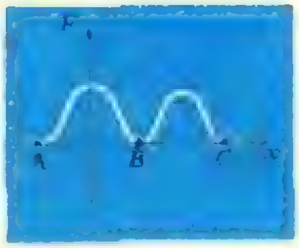


Рис 2

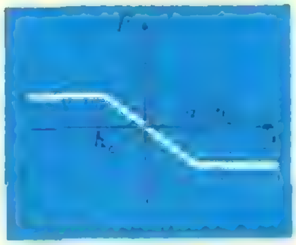


Рис 3

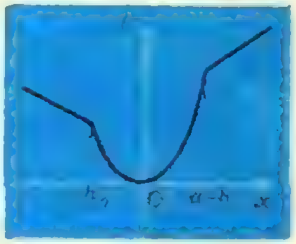
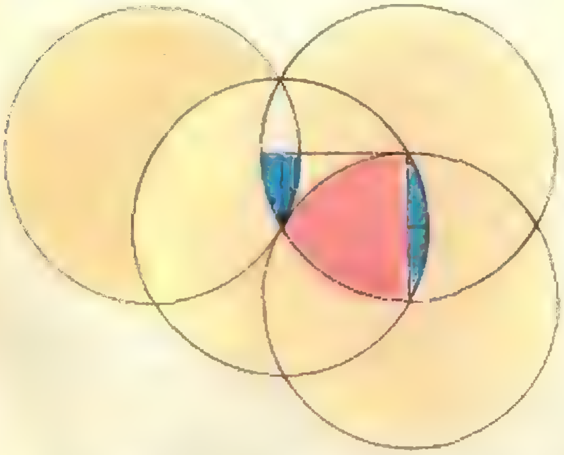


Рис 4

[illegible]
[illegible]чки Гиппократа

Упражнение 1. Ответ ясен из рассмотрения рисунка.



Упражнение 2в. Рассмотрим треугольник BFC. Проводим дополнительные построения — отрезки BD, DC и FD (см. рис. 8 *в*, в статье).

Легко показать, что линии BF и DC параллельны. Вследствие этого площади треугольников BFC и BFD равны. Остается вычислить отношение площади круга, окружность которого проходит через точки B, F и D к площади треугольника BFD.

[illegible] Физика помогает геометрии

1. Поместить в вершины тетраэдра материальные точки одинаковой массы и искать центр тяжести полученной системы.

2. $AL:LB=1:2$. (Поместить в вершину A точку массы $2m$, в вершину B и в вершину C — точки массы m.)

3. Поместив в вершину A точку массы m, в вершину B — точку массы $4m$ и в вершину C — точку массы $2m$, докажем, что $B'L={}^1/_7\,AL$ и, следовательно, площадь $BB'L$ равна ${}^1/_7$ от площади ABL, то есть ${}^1/_{21}$ от площади ABC. Повторив это рассуждение для двух других заштрихованных треугольников, найдем, что площадь трех заштрихованных треугольников составляет ${}^1/_7$ от площади треугольника ABC

[illegible] Первое [illegible] номограммами

1. Парабола $y=ax^2$ получается из параболы $y=x^2$ растяжением по оси Ox с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{a}}$. При этом прямые переходят в прямые, пересекающие ось ординат в той же самой точке (см. рис. 1). Поэтому отметки p можно поставить на той же высоте, что и раньше, то есть в точках с ординатами p^2 и абсциссами соответственно $\pm p/\sqrt{a}$

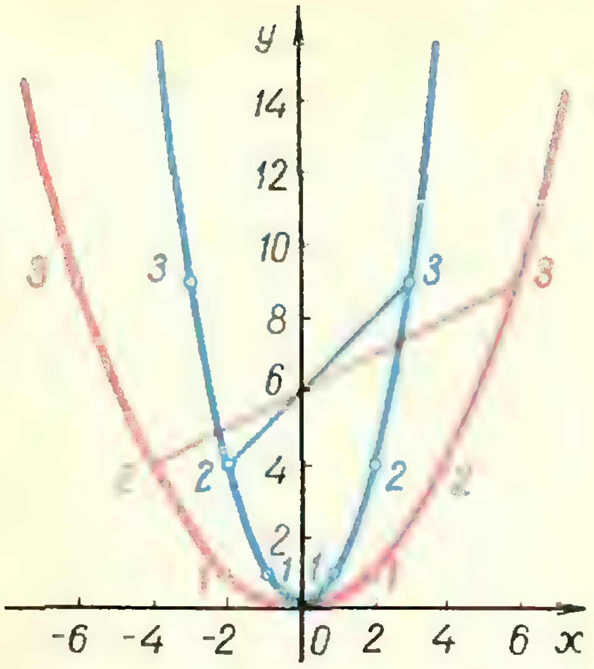


Рис 1

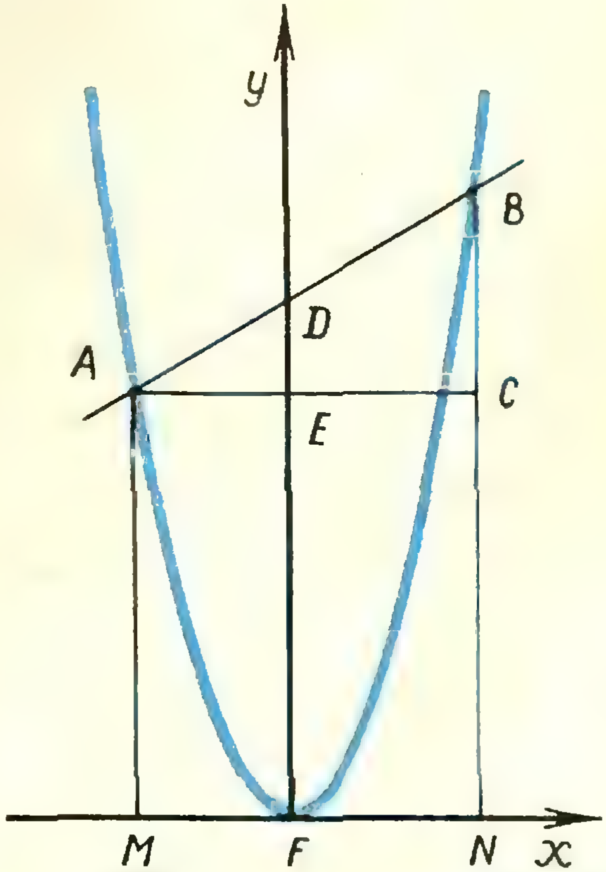


Рис 2

2. Обоснование номограммы для параболы $y=x^2$.

Допустим, что мы хотим узнать, чему равно $m\times n$. Для этого мы соединяем точку A, координаты которой $(-m, m^2)$ (рис. 2), с точкой B, координаты которой (n, n^2). Пусть для определенности $m<n$. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось абсцисс и проведем через точку A прямую, параллельную этой оси. Ясно, что $EF = CN = m^2$, поэтому $BC = BN - CN = n^2 - m^2$. Треугольники ADE и ABC подобны, а коэффициент подобия равен

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE+EC} = \frac{m}{m+n}.$$

Следовательно,

$$DE = \frac{m}{m+n} BC = \frac{m}{m+n}(n^2 - m^2) = \\ = m(n-m) = mn - m^2.$$

Отсюда

$$DF = DE + EF = (mn - m^2) + m^2 = mn.$$

Случай $m>n$ рассматривается аналогично. Случай $m=n$ очевиден.

Аналитическое обоснование номограммы для параболы $y=ax^2$. Прямая, проходящая через точки $\left(-\frac{m}{\sqrt{a}},\ m^2\right)$ и $\left(\frac{n}{\sqrt{a}},\ n^2\right)$, задается уравнением (при $m+n\neq 0$)

$$y = m^2 \frac{x - \frac{n}{\sqrt{a}}}{-\frac{m}{\sqrt{a}} - \frac{n}{\sqrt{a}}} + n^2 \frac{x - \frac{-m}{\sqrt{a}}}{\frac{n}{\sqrt{a}} - \frac{-m}{\sqrt{a}}}.$$

Она пересекает ось ординат в точке

$$y = m^2 \frac{\frac{-n}{\sqrt{a}}}{\frac{-m}{\sqrt{a}} - \frac{n}{\sqrt{a}}} + n^2 \frac{-\frac{-m}{\sqrt{a}}}{\frac{n}{\sqrt{a}} - \frac{-m}{\sqrt{a}}} = \\ = \frac{m^2 n + n^2 m}{m+n} = mn$$

К статье «Что здесь — теряем или находим?»

1. Ответ содержит посторонние корни, например $x = 5\pi/6$; некоторые решения потеряны, например $x = 2\pi/3$ Все это — результат неправильного преобразования выражения $\sqrt{4\sin^2 2x}$. Согласно определению арифметического корня,

$$\sqrt{4\sin^2 2x} = 2|\sin 2x|$$

Правильный ответ: $x = n\pi/2$ и $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$.

2. Ответ содержит посторонние корни. Получились они в результате умножения обеих частей уравнения на функцию $\sin x$. Решениями уравнения $\sin 8x = \sin x$ являются, очевидно, и такие x, при которых $\sin x = 0$, в то время как для исходного уравнения такие x решениями не являются (проверьте). Умножение на функцию может привести и к потере корней, так как это может привести к сужению ОДЗ (приведите пример!). В данном примере этого не происходит, так как функция $\sin x$ всюду определена

Правильный ответ: $x = n\pi/9$, где n — любое нечетное число, не кратное 9, и $x = m\pi/7$, где m — любое четное число, не кратное 7.

3. Найденный корень — посторонний. Неправильно использовано определение $\arccos x$. Число m называется арккосинусом числа x, если $\cos m = x$ и число m удовлетворяет неравенству: $0 \leqslant m \leqslant \pi$. В данном примере $m = 5\pi/2 + 10k\pi$ и ни при каком k этому неравенству не удовлетворяет, а потому уравнение $\arccos x = 5\pi/2 + 10k\pi$ как раз, согласно определению $\arccos x$, решений не имеет.

4. Неправильно найдена ОДЗ. Необходимо еще потребовать, чтобы основание логарифма $x-1$ было отлично от 1, и тогда $x=2$ не входит в ОДЗ *).

5. Корень $x=0$ — посторонний. Получен он в результате замены в преобразованном уравнении выражения, представляющего собой левую часть исходного уравнения, его правой частью. К потере корней такое преобразование привести не могло. Действительно, последнее уравнение в «решении» примера 5 является следствием исходного, если удовлетворяется исходное уравнение, то удовлетворяется и последнее. Обратное, как показывает этот пример, неверно.

6. Ответ неточный. В самом деле, пусть $c=-1$, $a=-2$, $c=2$, $b=c^2=1$. Тогда уравнение имеет вид

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} + \sqrt{x} = -1$$

и вопреки ответу, совсем решений не имеет (левая часть его при любом допустимом x положительна). Далее, пусть $c=1$, $a=-2$, $b=1$. Тогда уравнение имеет вид

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + \sqrt{x} = 1,$$

и например, число $x=4$, опять же вопреки ответу, не является решением. Дело в том, что при решении «способом возведения в квадрат» получается уравнение, не равносильное данному, а являющееся его следствием. Полученный ответ необходимо проверить

Проверка. Подставив найденные значения параметров в уравнение, получим

$$\sqrt{x - 2c\sqrt{x} + c^2} = c - \sqrt{x}$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x} - c)^2} = c - \sqrt{x}$$

Отсюда

$$|\sqrt{x} - c| = c - \sqrt{x}.$$

---

*) Заметим, что этот корень забыли исключить из ответа и авторы школьного учебника (Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, М., «Просвещение», 1969, часть 2, задача 1460,*в*).

Ясно, что при $c<0$ это уравнение вообще решений не имеет, а при $c=0$ имеет единственное решение. Пусть $c>0$. Рассмотрим такие значения неизвестного, которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant c^2$. Тогда $\sqrt{x}\leqslant c$, $|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}$, и уравнение, очевидно, обращается в тождество. Так что в этом случае уравнение действительно имеет бесконечно много решений: $0\leqslant x\leqslant c^2$. Легко заметить, что никакие другие значения неизвестного ему не удовлетворяют.

Правильный ответ: уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a=-2c$, $b=c^2$ и $c>0$ (и решениями являются числа $0\leqslant x\leqslant c^2$) *).

7. Ответ содержит посторонние корни. Дело в том, что хотя все решения уравнения $[f(x)]^{\varphi(x)}=1$ содержатся среди решений уравнений $|f(x)|=1$ и $\varphi(x)=0$, однако среди последних могут быть корни, посторонние для исходного уравнения. Ведь вполне возможно, что при $x=a$ $f(a)=1$, а $\varphi(x)$ не существует или $\varphi(a)=0$, а $f(x)$ не существует. Поэтому необходимо проверить, лежат ли найденные выше корни в ОДЗ.

Проверка. Так как показатель степени в уравнении принимает действительные значения лишь при $x\geqslant\pi$ и $x\leqslant-7$, то при $k=0$ и $k=-1$ числа $x=2k\pi$ не входят в ОДЗ. Не входит в ОДЗ и $x=\pi$, поскольку в этом случае и основание степени, и показатель обращаются в нуль. Все остальные из найденных решений входят в ОДЗ.

8. Ответ содержит посторонние решения. Получены они в результате неправильного использования метода подстановки. Найдя из второго уравнения, что $x=\varphi(y)$, и подставив вместо x в первое уравнение $\varphi(y)$, мы перешли от системы

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

к системе

$$\begin{cases} f[\varphi(y), y]=0, \\ f(x, y)=0, \end{cases}$$

вместо того, чтобы перейти к системе

$$\begin{cases} f[\varphi(y), y]=0, \\ x=\varphi(y) \end{cases}$$

(здесь $x=\varphi(y)$ — уравнение, равносильное уравнению $g(x,y)=0$). Другими словами, найдя y из первого преобразованного уравнения, мы находили x из первого же исходного уравнения, а следовало это делать из второго уравнения. Тогда бы мы получили правильный ответ: если $y=4$, то $x=5$, если

$$y=\frac{112}{5},\ \text{то}\ x=-\frac{113}{5}.$$

9. Ответ неверен в случае $a=1$. Действительно, при $a=1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1, \end{cases}$$

и хотя имеет бесконечно много решений, все-таки не любая пара чисел ей удовлетворяет. Например, пара $x=3$, $y=4$ не является решением системы. Решениями этой системы будут пары чисел вида $x=t$, $y=1-t$, где t — любое действительное число.

Посторонние решения получились в результате неосторожного использования метода алгебраического сложения. Система

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} a_1f(x, y)+b_1g(x, y)=0, \\ a_2f(x, y)+b_2g(x, y)=0, \end{cases}$$

если $a_1b_2\neq a_2b_1$ (докажите это). В противном случае, как показывает наш пример, возможно приобретение посторонних решений. Потери корней не будет (почему?).

10. Ответ верен для $a\neq0$. При $a=0$ уравнение имеет бесконечно много решений: они заполняют целую прямую $y=-x$. Потеря решений произошла за счет деления уравнений друг на друга.

К статье «Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1970 году»

1. $-3\leqslant a\leqslant-2$,

$$x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+k\pi,$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2.$$

2. $x\geqslant\dfrac{1}{6}$.

3. $30<v<33{,}6$

4. $$B=\frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),$$

$$C=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right);$$

$$0<\alpha\leqslant2\operatorname{arctg}\frac{2}{\pi}.$$

5. $$\arccos\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2}}\right).$$

---

*) Условие задачи не требует такого полного ответа. Достаточно было бы найти какие-нибудь конкретные значения параметров, для которых получается положительный ответ, и сделать это совсем нетрудно. Однако такое полное решение является типичным (и хорошим!), поэтому мы его и привели.

К статье «Вступительный письменный экзамен по математике в МФТИ в 1970 году»

1 $x=-3$ 2. $h=\sqrt{S}$

3. $\measuredangle A=\pi-3\arccos 3/4$.

$B=\arccos 3/4$, $\measuredangle C=2\arccos 3/4$

4. Четыре решения:

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y_1=\sqrt{2},\quad z_1=2\sqrt{2};$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2=-\sqrt{2},\ z_2=-2\sqrt{2}$$

$x_3=2$, $y_3=-1/2$, $z_3=4$; $x_4=-2$, $y_4=1/2$, $z_4=-4$.

5 Два решения: $\operatorname{arctg} 2$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$.

К статье «Задачи на законы Ньютона»

1. Во всех трех случаях проекция силы F на направление возможного движения $F\cos\beta$ больше $P\sin\alpha$, и, следовательно, тело может двигаться по плоскости только вверх.

В первом случае давление на плоскость $N=P\cos\alpha-F\sin\beta=6{,}8$ *н*. Сила трения скольжения $f_{тр}=kN=1{,}36$ *н* больше результирующей двух остальных сил, действующих вдоль плоскости, $R=F\cos\beta-P\sin\alpha=0{,}6$ *н*, поэтому тело неподвижно, а сила трения покоя ($f_{тр.п}$) равна по величине и противоположна по направлению силе R.

Во втором случае давление на плоскость $N=3{,}3$ *н* и $f_{тр}=0{,}66$ *н*. Тело двигается с ускорением

$$a=\frac{F\cos\beta-P\sin\alpha-f_{тр}}{m}=1{,}72\ м/сек^2$$

В третьем случае $F\sin\beta$ больше $P\cos\alpha$, тело оторвется от плоскости и начнет двигаться под углом 19° к ней с ускорением $a=5{,}9$ *м/сек²* (во всех задачах мы принимаем $g=10$ *м/сек²*).

2. Полное ускорение $\left(a_{полн}=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\right)$ и равнодействующая сил T и P направлены под таким углом β к касательной к траектории, что

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{a_n}{a_t}=\frac{2g\sin\alpha}{g\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha$$

(в частности, в верхнем положении — по касательной, в нижнем — по радиусу).

3. В первом случае:

$$f_{тр}=kN=k_1P_2\cos\alpha=6{,}1\ н,$$

$$a=\frac{P_1-P_2\sin\alpha-f_{тр}}{m_1+m_2}=0{,}34\ м/сек^2,$$

$$T=P_1-m_1a=43{,}5\ н.$$

Во втором случае тело неподвижно. $T=45$ *н*. Сила трения покоя $f_{тр.п}=T-P_2\sin\alpha=10$ *н* (сила трения скольжения $f_{тр}=k_2P_2\cos\alpha=12{,}2$ *н*.).

4. $f_{тр_2}=1{,}74$ *н*, $f_{тр_3}=2{,}17$ *н*, $a=0{,}53$ *м/сек²*. Сила T_1 натяжения нити (между первым и вторым грузами) равна 42,6 *н*, а T_2 (между вторым и третьим грузами) равна 29,8 *н*

К заметке «Московские математические»

Вариант для окончивших 8 классов

3. а) 10000.

б) $x_1=4$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=4$.

в) $(k+l)^2/4$

Вариант для окончивших 10 классов

3. а) $\frac{(x+y)^2}{4xy}$.

б) $2<x<3$.

в) $M(x)=-3$.

К задаче «К чему приводит нерешительность?»
(см. «Квант» № 4, стр. 7)

Нам потребуется лишь один факт из аналитической геометрии: если концы отрезка имеют координаты (a_1, b_1) и (a_2, b_2), то середина этого отрезка имеет координаты

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right).$$

Пусть Петя в точке (a, b) повернул к стадиону, затем в точке (c, d) — к дому Люси, в точке (e, f) — к магазину и в точке (a_1, b_1) — опять к стадиону. Найдем координаты всех этих точек, являющихся серединами отрезков, соединяющих последнюю точку поворота с соответствующей вершиной квадрата

$$c=\frac{a}{2},\quad d=\frac{b+1}{2},\quad e=\frac{a}{4},$$

$$f=\frac{b+1}{4};$$

$$a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}+1\right)=\frac{1}{8}(a+4)$$

$$q_1=\frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{4}+1\right)=\frac{1}{8}(b+5)$$

Проверьте, что тогда

$$a_1-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(a-\frac{4}{7}\right),$$

$$b_1-\frac{5}{7}=\frac{1}{8}\left(b-\frac{5}{7}\right).$$

Таким образом, расстояния от точек поворота к стадиону до точки (4/7, 5/7) образуют геометрическую прогрессию и уменьшаются в 8 раз после каждого «обхода» по направлениям стадион — дом Люси — магазин. Значит, Петя приближается к треугольнику с координатами вершин

$$\left(\frac{4}{7},\ \frac{5}{7}\right),\quad \left(\frac{2}{7},\ \frac{6}{7}\right),\quad \left(\frac{1}{7},\ \frac{3}{7}\right)$$

Уголок коллекционера

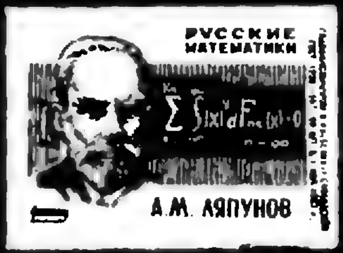
Марки и спичечные этикетки, посвященные русским математикам

В 1946 году к 125-летнему юбилею со дня рождения великого русского математика и механика Пафнутия Львовича Чебышева по рисунку художника Е. Булановой была выпущена серия почтовых марок, состоящая из двух миниатюр. Одну из них мы приводим на рисунке.

Над портретом ученого помещена надпись «Великий русский математик», которая, однако, не отражает полностью роли П. Л. Чебышева в развитии отечественной науки. Кроме гениальных математических достижений П. Л. Чебышев оставил ряд выдающихся исследований и изобретений по механике, относящихся преимущественно к теории и практике шарнирно-рычажных механизмов, переводящих круговое движение в прямолинейное.

П. Л. Чебышев был основателем и вдохновителем Петербургской математической школы. Выдающимися ее представителями были академики А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов. В 1967 году появилась серия спичечных этикеток с портретами знаменитых русских физиков и математиков, среди которых мы видим главу Петербургской математической школы и виднейших его учеников. А. М. Ляпунов был не только гениальным математиком, но и великим механиком. В 1967 году к 100-летию со дня его рождения также по рисунку Е. Булановой вышла марка с портретом ученого. Под ним изображена формула, дающая уравнение поверхности фигуры равновесия вращающейся жидкости. Кстати, исследования А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются по закону всемирного тяготения, были предприняты по инициативе его учителя П. Л. Чебышева.

РУССКИЕ МАТЕМАТИКИ
П.Л. ЧЕБЫШЕВ



РУССКИЕ МАТЕМАТИКИ
А.А. МАРКОВ

РУССКИЕ МАТЕМАТИКИ
В.А. СТЕКЛОВ

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), В. П. Лишевский, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректоры Т. С. Вайсберг,
В. П. Сорокина
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 27/I 1971 г.
Подпис. в печать 25/III 1971 г.
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,55
Тир. 287 380 экз. Т-03991.

Цена 30 коп. Заказ 167

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 5

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на второе полугодие 1971 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

НОМЕР
6

Обеспечить в новом пятилетии:

дальнейшую разработку проблем теоретической и прикладной математики и кибернетики...

развитие исследований по ядерной физике, физике твердого тела и полупроводников, квантовой электронике, физике плазмы, физике низких температур...

Директивы XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 годы

В номере:

О наилучших приближениях *1* *Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс*

Полупроводниковые диоды и триоды *8* *М. А. Федоров*

Рост кристаллов *16* *Р. Фуллман*

Снежные заносы *23* *Л. Г. Асламазов*

Математический кружок

Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ *25* *А. Л. Тоом*

Лаборатория «Кванта»

Странный маятник *30* *Н. А. Минц*

Задачник «Кванта»

Задачи *33*

Решения задач М34—М38, Ф52—Ф58 *35* *А. К. Толпыго, А. Г. Кушниренко, Н. Б. Васильев, Л. М. Лоповок, И. Ш. Слободецкий*

Практикум абитуриента

Логарифмические уравнения *46* *В. В. Гольдберг*

Задачи по геометрии *52* *Ю. В. Сидоров*

Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году *56* *Н. Н. Колесников, В. М. Тихомиров*

Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году *60* *В. Е. Белонучкин, С. М. Козел*

Ответы, указания, решения *63*

Уголок коллекционера

Марки, посвященные Галилею *3-я стр. обложки* *А. В. Алтыкис*

Игра Эскотта *4-я стр. обложки*

Д. Б. Фукс
М. Б. Фукс

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Как выбрать наилучшее рациональное приближение для иррационального числа? Какое, например, из приближений числа $\sqrt{2}$ лучше: $^3/_2$, $^7/_5$ или 1,41? Казалось бы, ответ прост: чем меньше погрешность, тем лучше и приближение. Но все же, видимо, это не совсем так; иначе, почему же, прекрасно зная пять десятичных знаков числа π, мы упорно пишем $\pi \approx 3{,}14$? Дело, конечно, в том, что, подбирая приближение, мы хотим уменьшить не только погрешность, но и знаменатель: чем меньше знаменатель, тем менее громоздка дробь и тем удобнее обращаться с ней — запоминать, подставлять в различные формулы и т. д.

Этому и посвящена наша статья: определить, в какой степени можно удовлетворить два явно противоречащих друг другу требования — найти по возможности более точное и по возможности менее громоздкое рациональное приближение для данного иррационального числа.

§ 1. Коэффициент качества приближения

Прежде всего желательно научиться оценивать качество приближения одним числом (а не двумя: погрешностью и знаменателем). Поскольку мы стремимся уменьшить и погрешность, и знаменатель, то естественно взять за показатель качества приближения их произведение: малость произведения в какой-то степени говорит о малости сомножителей. Так что примем за основу такое определение.

Коэффициентом качества приближения $\frac{p}{q}$ иррационального числа α называется произведение знаменателя q на погрешность $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ *).

---

*) Сравните со статьями Н. М. Бескина в «Кванте» № 1, 8 за 1970 год, где принята несколько другая терминология.

Итак, мы считаем, что чем меньше коэффициент качества, тем лучше приближение. (Нулю коэффициент качества равняться не может, так как α иррационально и не равно $\frac{p}{q}$.)

Найдем для примера коэффициенты качества трех упоминавшихся приближений числа $\sqrt{2}$. Получим:

$$2\left|\sqrt{2}-3/2\right| \approx 2\times 0{,}086 = 0{,}17,$$
$$5\left|\sqrt{2}-7/5\right| \approx 5\times 0{,}014 = 0{,}07,$$
$$100\left|\sqrt{2}-1{,}41\right| \approx 100\times 0{,}0042 = 0{,}42,$$

так что по нашему критерию самым лучшим является приближение 7/5 *).

Попытаемся доказать теперь какие-нибудь общие теоремы. Совсем легко показать, например, что *для любого q существует приближение $\frac{p}{q}$ числа α с коэффициентом качества, меньшим $^1/_2$*. В самом деле, подберем такое число p, что

$$\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p+1}{q}.$$

Так как α иррационально, оно не является серединой отрезка $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$ (см. рис. 1). Значит, или $\alpha-\frac{p}{q}$, или $\frac{p+1}{q}-\alpha$ меньше половины длины отрезка $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$, то есть меньше $\frac{1}{2q}$.

Таким образом наше утверждение доказано.

Значительно более глубоким фактом является

Теорема 1. *Для любого иррационального числа α и для сколь угодно большого N существует бесконечно много различных дробей $\frac{p}{q}$ с коэффициентом качества, меньшим $\frac{1}{N}$*, то есть с $q\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N}$.

Эта теорема составляет главный результат нашей статьи. Ее доказательство будет завершено в § 4. Наше доказательство, вероятно, не самое короткое, но мы предпочли его за геометрическую наглядность, а также за то, что оно основы-

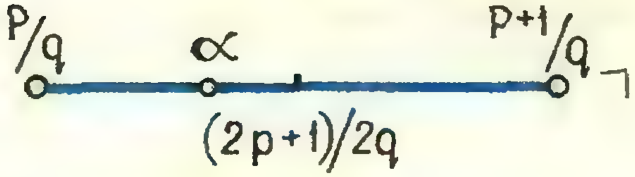


Рис. 1.

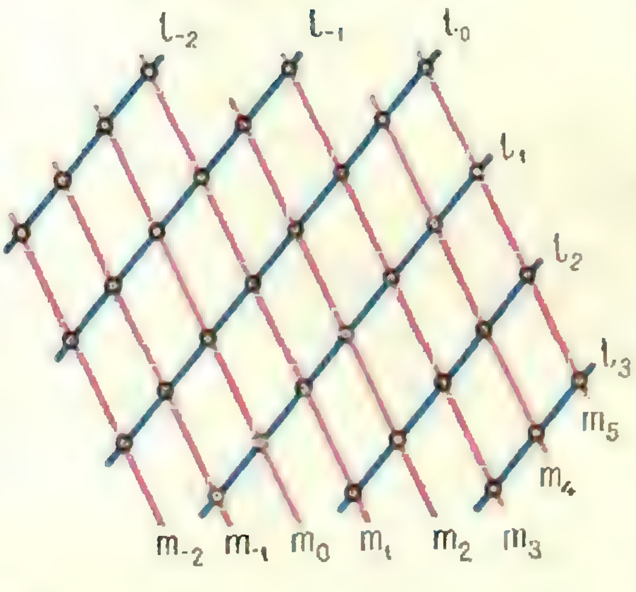


Рис. 2.

---

*) Мы пренебрегаем, конечно, тем обстоятельством, что обычно в качестве приближений для иррациональных чисел предпочитают десятичные дроби, так как над ними удобнее производить арифметические операции. Именно поэтому столь употребительно, несмотря на большой коэффициент, приближение 1,41.

вается на идеях, которые интересны сами по себе.

Мы докажем эту теорему с помощью так называемых решеток.

§ 2. Решетки

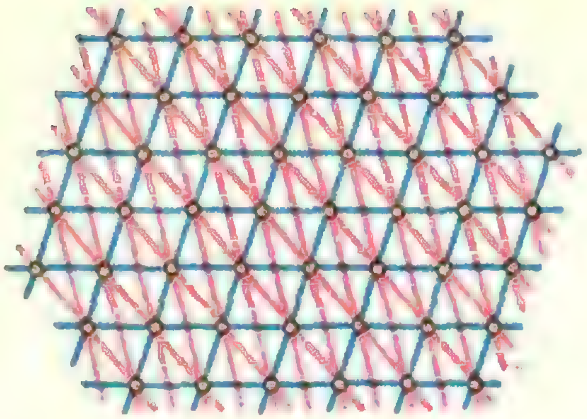


Рис. 3.

Предположим, что на плоскости заданы две пересекающиеся прямые: l_0 и m_0 и, кроме того, зафиксированы два масштабных отрезка: a и b. По обе стороны от прямой l_0 проведем параллельные прямые $l_{\pm 1}$, $l_{\pm 2}$ ... на расстоянии a, $2a$, ... от нее. Аналогично по обе стороны от m_0 на расстоянии b, $2b$, ... проведем прямые $m_{\pm 1}$, $m_{\pm 2}$, ... Отметим все точки пересечения прямых l_i с прямыми m_j. Множество этих точек и называется *решеткой* (рис. 2).

Подчеркнем, что решеткой мы называем множество точек пересечения прямых, не относя к ней самые прямые. Это важно, потому что одна и та же решетка может быть получена из совершенно различных семейств прямых. Так, решетка, изображенная на рисунке 3, получается как при пересечении синих прямых, так и при пересечении красных прямых.

За примерами решеток далеко ходить не надо. Точки пересечения линий в тетрадях «в клеточку» составляют решетку. А такие же точки в тетрадях, в которых пишут первоклассники, решетки не составляют — не одинаковы расстояния между соседними горизонтальными линиями (рис. 4).

Зафиксируем на плоскости семейства прямых l_i, m_j и построенную с их помощью решетку обозначим через R.

Теорема 2 (свойство параллелограмма). *Если $ABCD$ — параллелограмм и точки A, B, C принадлежат решетке R, то и точка D принадлежит этой решетке.*

Доказательство. Мы должны доказать, что точка D лежит на одной из прямых l и на одной из прямых m. Оба утверждения доказываются совершенно одинаково, и мы ограничимся доказательством первого.

Поскольку точки A, B, C принадлежат решетке, то каждая из них лежит на одной из прямых l, скажем, A лежит на l_i, B — на l_j, C — на l_k (см. рис. 5). Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую l_j, из точки D — перпендикуляр DF на прямую l_k. Так как $BA \parallel CD$, $l_j \parallel l_k$ и $AE \parallel DF$ (как перпендикуляры к параллельным прямым), то треугольники BAE и CDF подобны. Так как, кроме того, $BA = CD$, то эти треугольники равны. Следовательно, $AE = DF$. Но длина отрезка AE есть расстояние между

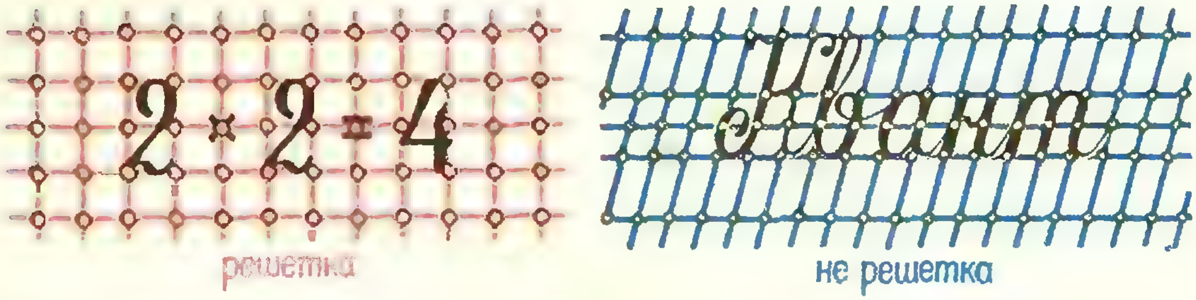


Рис. 4.

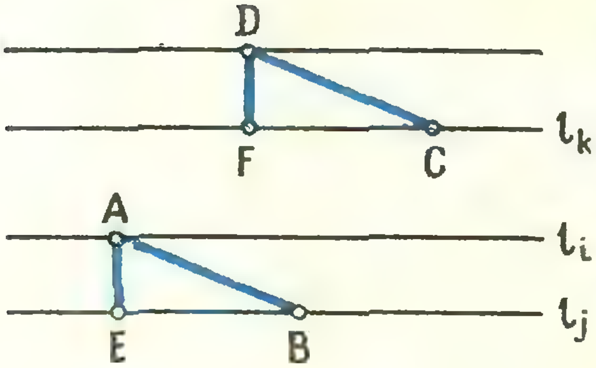


Рис. 5.

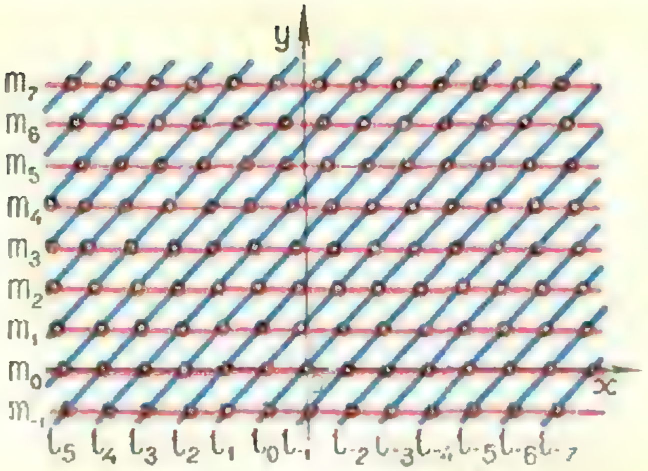

y
x
m_7
m_6
m_5
m_4
m_3
m_2
m_1
m_0
m_{-1}
l_5 l_4 l_3 l_2 l_1 l_0 l_{-1} l_{-2} l_{-3} l_{-4} l_{-5} l_{-6} l_{-7}

Рис. 6.

прямыми l_i и l_j, то есть $AE = a|i-j|$. Следовательно, прямая, проведенная через точку D параллельно прямым l, находится от l_k на расстоянии $DF = AE = a|i-j|$, кратном a, и эта прямая есть одна из прямых l (более точно — прямая l_{k+i-j}).

Теорема доказана.

Другие свойства решеток нам не понадобятся. Мы приведем некоторые из них без доказательств — для самостоятельного обдумывания.

1. *Если вершины параллелограмма принадлежат решетке R, то площадь этого параллелограмма кратна произведению ab.*

Определение. Параллелограмм, вершины которого принадлежат решетке R, а площадь равна ab, называется *основным параллелограммом* решетки R.

Например, основными являются все параллелограммы, на которые разбивают плоскость прямые l_i, m_j.

2. *Для того чтобы параллелограмм, вершины которого принадлежат решетке, был основным, необходимо и достаточно, чтобы внутри этого параллелограмма и на его ребрах не лежало ни одной точки решетки, кроме вершин параллелограмма.*

3. *Всякий параллелограмм на плоскости служит основным для одной и только одной решетки.*

§ 3. Связь между решетками и рациональными приближениями

Обратимся теперь к нашей исходной цели: нахождению приближений для иррационального числа α. Сначала мы свяжем с числом α некоторую специальную решетку.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат. В качестве прямых m_0, $m_{\pm 1}$, $m_{\pm 2}$, ... мы возьмем прямые, параллельные оси Ox и проходящие через точки $(0,0)$, $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 2)$,... (уравнение прямой m_q: $y = q$). В качестве прямой l_0 мы возьмем прямую, проходящую через точки $(0,0)$ и $(\alpha, 1)$; ее уравнение: $x = \alpha y$. Наконец, в качестве прямых $l_{\pm 1}$, $l_{\pm 2}$, ... мы возьмем прямые, параллельные прямой l_0 и проходящие через точки $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2, 0)$, ... (уравнение прямой l_p: $x = \alpha y - p$). Эта решетка изображена на рисунке 6. Закрепим за этой решеткой обозначение «R».

Оказывается, что вопрос о том, насколько хорошим приближением для числа α является $\frac{p}{q}$, можно свести к вопросу о том, где расположена на плоскости точка пересечения прямых l_p и m_q. В самом деле, найдем координаты этой точки. Это можно сделать как элементарно-геометрическими средствами, так и решая совместно уравнения этих прямых:

$$\begin{cases} x=\alpha y-p & (l_p), \\ y=q & (m_q). \end{cases}$$

Получаем, что координаты точки пересечения таковы: $\alpha q-p$, q. Мы видим, что ордината этой точки равна знаменателю дроби $\frac{p}{q}$. Абсцисса же ее равна $\alpha q-p=q\left(\alpha-\frac{p}{q}\right)$. Таким образом, модуль абсциссы совпадает с коэффициентом качества приближения, и она положительна, если $\alpha>\frac{p}{q}$ (или $\frac{p}{q}$ — приближение «с недостатком»), и отрицательна, если $\alpha<\frac{p}{q}$ (или $\frac{p}{q}$ — приближение «с избытком»). Заметим, что так как α иррационально, то заведомо $\alpha\neq\frac{p}{q}$, и, значит, ни одна точка решетки, кроме точки (0,0), на ось Oy не попадает.

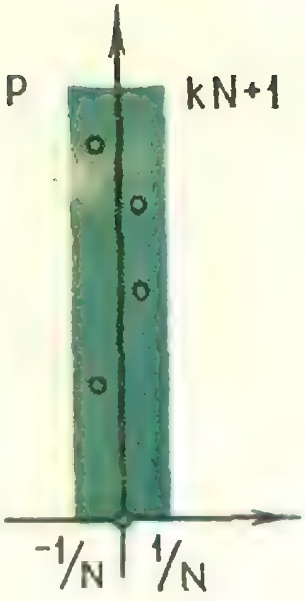


Рис. 7.

Итак, *каждой точке нашей решетки, лежащей выше оси Ox (мы ограничиваемся случаем* $q>0$), *отвечает некоторое рациональное приближение числа* α; *при этом расстояние этой точки от оси Ox есть знаменатель приближения; расстояние ее от оси Oy есть коэффициент качества приближения; если точка лежит правее (левее) оси Oy, то отвечающее ей приближение есть приближение с недостатком (с избытком).*

§ 4. Доказательство основной теоремы

Мы докажем более сильное предложение, чем основная теорема.

Теорема 3. *Для любых натуральных чисел N, k существует по крайней мере k различных дробей* $\frac{p}{q}$ *таких, что*

$$\text{а) } q\leqslant Nk, \qquad \text{б) } q\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{N}.$$

(То, что из теоремы 3 следует теорема 1, очевидно: k может быть сколь угодно большим, так что всего приближений с коэффициентом качества, меньшим $1/N$, существует бесконечное множество).

Доказательство. Посмотрим, что означает наше утверждение для решетки R, построенной в § 3. Как мы видели, приближениям отвечают точки этой решетки, причем знаменатели равны ординатам, а коэффициенты качества — модулям абсцисс этих точек. Итак, нам нужно доказать, что существуют k точек решетки R, содержащихся внутри прямоугольника P, заданного неравенствами: $-\frac{1}{N}<x<\frac{1}{N}$, $0<y<kN+1$ (см. рис. 7).

Для доказательства рассмотрим более широкий прямоугольник $\tilde{P}$: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, $0<y<kN+1$ (рис. 8). Внутри этого прямоугольника

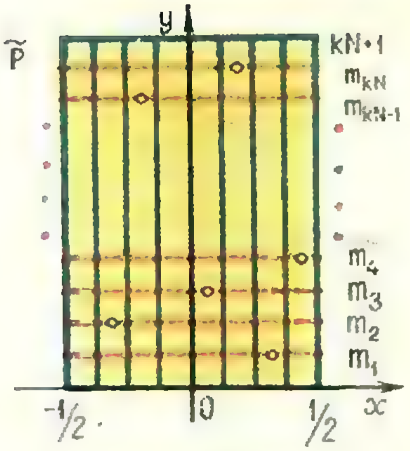


Рис. 8.

лежат kN точек решетки R. В самом деле, на каждой из прямых $y=1$, $y=2, \dots, y=kN$ точки решетки лежат с промежутками, равными 1; поэтому ровно по одной точке решетки лежит на отрезке каждой из этих прямых, заключенном в прямоугольнике $\tilde{P}$ (на вертикальные стороны прямоугольника $\tilde{P}$ точки решетки не попадают, так как их абсциссы иррациональны). Разобьем прямоугольник $\tilde{P}$ на N равных прямоугольников $p_1, p_2, \dots, p_N$ с основанием $\frac{1}{N}$. Ясно, что либо в каждом из них лежит ровно k точек решетки, либо в одном из них (скажем, в p_m) лежит по крайней мере $k+1$ точек решетки (скажем $A_0, A_1, \dots, A_k$).

В первом случае доказываемая теорема получается сразу: прямоугольник P содержит, очевидно, один из прямоугольников p_i, а значит, в нем имеются k точек решетки.

Во втором случае проделаем следующее построение (рис. 9). Для определенности предположим, что A_0 — самая нижняя из точек $A_0, \dots, A_k$. Соединим точку A_0 с точкой O и проведем из точек $A_1, \dots, A_k$ отрезки, равные и параллельные A_0O.

Пусть это будут отрезки $A_1B_1, \dots, A_kB_k$.

Точки $B_1, \dots, B_k$ принадлежат решетке R; в самом деле, фигура $A_0OB_iA_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$—параллелограмм (так как $A_0O \parallel A_iB_i$, $A_0O = A_iB_i$) и точки A_0, O, A_i принадлежат R; значит, по свойству параллелограмма (теорема 2) и B_i принадлежит R.

Точки $B_1, \dots, B_k$ лежат в прямоугольнике P. В самом деле, при $1 \leqslant i \leqslant k$ отрезки A_0A_i и OB_i равны и параллельны, и, значит, имеют равные проекции на ось Ox. Но отрезок A_0A_i лежит в прямоугольнике p_m и его проекция на ось Ox меньше $\frac{1}{N}$. Значит, абсцисса точки B_i по модулю меньше $\frac{1}{N}$, то есть B_i лежит в P. Итак, $B_1, \dots, B_k$ суть k точек решетки, лежащих в прямоугольнике P. Теорема доказана.

§ 5. Заключение

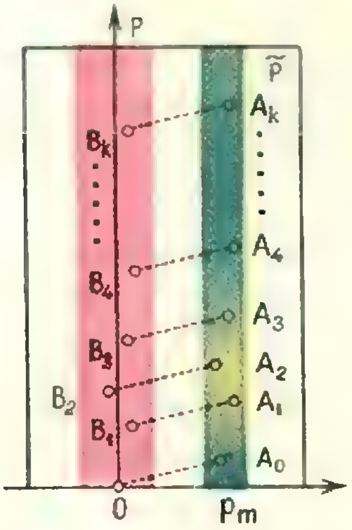


Рис. 9.

Из теоремы 3 можно получить и другие весьма любопытные следствия.

Например, такое:

Теорема 4. *Существует бесконечное множество дробей $\frac{p}{q}$ таких, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Доказательство. В теореме 3 примем $k=1$. Тогда, согласно этой теореме, для каждого N существует приближение $\frac{p}{q}$ числа α такое, что $q \leqslant N$ и

$$q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N}.$$

Раз $q \leqslant N$ и, следовательно, $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{N}$, то $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$, поэтому

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Осталось убедиться в том, что таких дробей бесконечно много. Если бы их было лишь конечное число, то мы могли бы выбрать из них ближайшую к α, то есть была бы такая дробь $\frac{p_0}{q_0}$, что $\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right| < \frac{1}{q_0^2}$, но ни для какой дроби, более близкой к α, чем $\frac{p_0}{q_0}$, подобное неравенство уже не имело бы места. Тогда мы бы взяли число N большим, чем $\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right|^{-1}$ и нашли бы, как и выше, с помощью теоремы 3 такое приближение $\frac{p}{q}$ числа α, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

и в то же время

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N} < \left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right|.$$

Мы пришли к противоречию.

Доказанная теорема приводит к мысли, что, может быть, мы можем оценивать качество приближений более строго, приняв за коэффициент качества приближения $\frac{p}{q}$ число $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Как видно из теоремы 4, любая иррациональность допускает бесконечно много приближений, у которых такой коэффициент качества меньше единицы.

Однако аналог теоремы 1 при таком определении коэффициента качества уже неверен. Наиболее сильным результатом, которого удается здесь достичь, является классическая теорема Гурвица — Бореля. Она формулируется так:

для любого иррационального числа α существует бесконечно много приближений $\frac{p}{q}$ с

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

При этом число $\sqrt{5}$ не может быть в этой формулировке увеличено: существуют иррациональные числа, для которых есть лишь конечное число приближений с коэффициентом качества (в новом смысле), меньшим $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Возникает интересный вопрос: что же это за иррациональные числа, которые хуже других приближаются рациональными? Оказывается, что таких чисел бесконечно много; например, одно из них равно $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доказательство теоремы Гурвица — Бореля и ее уточнений производится теми же средствами, что и доказательство нашей теоремы 1, только требуется чуть более тонкий анализ решетки R. Мы расскажем об этом в нашей следующей статье.

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ И ТРИОДЫ

М. А. Федоров

В этой статье рассказывается о работе полупроводниковых диодов и триодов (транзисторов), замечательных электронных устройств, изобретение которых стало возможным только после кропотливого изучения свойств определенного типа веществ — полупроводников. Сконструированные несколько десятков лет назад, эти устройства в настоящее время стали незаменимыми элементами огромного количества физических и радиотехнических приборов.

Проводники, полупроводники и диэлектрики

Прежде чем говорить о полупроводниковом диоде и транзисторе, мы расскажем о том, что такое полупроводники, какова их внутренняя структура и какими они обладают свойствами.

Из большого числа известных в природе полупроводников наиболее изучены кремний и германий. Это элементы, стоящие в таблице Менделеева под номерами 14 и 32.

Если говорить строго, то полупроводники — это диэлектрики, только очень слабые диэлектрики. Слабые в том смысле, что их нетрудно превратить в проводники. Для этого существует несколько способов. Основные из них: облучение, бомбардировка полупроводников быстрыми частицами, нагревание и добавление в полупроводник соответствующих примесей.

Как известно, диэлектрики не проводят электрического тока, то есть являются изоляторами. Если на концах диэлектрического образца создать разность потенциалов и измерить ток, то он будет равен нулю. Это объясняется тем, что внутри образца нет свободных заряженных частиц, например, электронов, которые под действием электрического поля перемещались бы с одного конца образца на другой и таким образом создавали бы ток. Атомы диэлектрика прочно удерживают все свои электроны и уж если отпускают их от себя, то только поменявшись с соседом на другой электрон.

Иное дело в металлах. Основная масса электронов и там ведет себя подобно электронам в диэлектрике. Но некоторые из них, те, которые находятся далеко от положительно заряженных ядер и потому слабо с ними связаны, при образовании кристалла получают такую свободу, что могут бродить по всему кристаллу. Эти электроны называются свободными электронами, или электронами проводимости. Если поместить металл в электрическое поле, то эти свободные электроны (поскольку они обладают отрицательным зарядом) движутся в сторону, противоположную направлению электрического поля. Электрическое поле, словно ветер, сдувает их на границу образца. Гальванометр, подключенный к такому образцу, зарегистрирует электрический ток.

Итак, диэлектрик потому не проводит электрический ток, что в нем нет свободных носителей заряда, которые могли бы под действием электрического поля свободно двигаться по образцу.

Но такие заряды мы сами можем создать. Один из способов — подействовать на атом диэлектрика каким-нибудь подходящим «инструментом», например, квантом света — фотоном. Мы облучаем диэлектрик обычным светом, а еще лучше — рентгеновскими лучами, так как они обладают большей энергией, и выбиваем электроны из атомов, образующих кристалл. Таким путем в диэлектрике можно создать свободные электроны и превратить его в проводник. Ясно, что энергия, нужная для освобождения электрона, зависит прежде всего от того, из каких атомов образован кристалл и как эти атомы расположены в кристалле. Другими словами, эта энергия различна для различных кристаллов. Минимальная энергия, необходимая для того, чтобы оторвать электрон от атома и превратить его в свободный, называется энергетической щелью данного диэлектрика. Если на кристалл падает излучение, энергия квантов которого ниже, чем минимальная энергия, необходимая для освобождения электрона, то ни один из электронов не будет выбит и диэлектрик так и останется изолятором.

Различие между диэлектриками и полупроводниками как раз и заключается в величине энергетической щели. Диэлектрики с достаточно малой энергетической щелью называются полупроводниками. Энергетическая щель у полупроводников примерно в 10 раз меньше, чем у ярко выраженных диэлектриков, таких, как, например, алмаз. Ширина энергетической щели для алмаза равна 7 *эв*, тогда как для германия мы имеем 0,72 *эв*, а для кремния 1,1 *эв* *). Таким образом, чтобы полупроводник превратить в проводник, достаточно сообщить его электронам относительно небольшую энергию.

Теперь представьте себе, что мы нагреваем диэлектрик. При повышении температуры средняя энергия электронов увеличится, и многие из них будут иметь энергию, достаточную для преодоления энергетической щели. В результате становится все больше свободных электронов, причем появление свободных электронов происходит тем чаще, чем выше температура, и уж, конечно, чаще всего у тех кристаллов, у которых меньше энергетическая щель, то есть у полупроводников. Потому полупроводники и называют полупроводниками, что при достаточно высоких температурах (например, комнатных $\sim 300^\circ$ K) они являются проводниками, а при понижении температуры превращаются в диэлектрики. Транзисторный приемник перестает работать в трескучий мороз, так как полупроводники, использованные в его транзисторах, превращаются в самые настоящие изоляторы.

Электроны и дырки

Пусть каким-либо образом мы выбили электрон из атома диэлектрика и он улетел от этого атома. В кристалле в этом месте образуется нехватка электрона или, как говорят, дырка. Интересно то, что дырка не стоит на месте, а начинает двигаться и вообще ведет себя подобно положительно заряженной частице. Вот как это происходит.

Когда у какого-то атома не хватает электрона, то электрон может перескочить с соседнего атома, имеющего ровно столько электронов, сколько нужно (рис. 1, *а*). Но тогда нехватка электронов обнаруживается на соседнем атоме, то есть дырка перемещается к соседнему атому (рис. 1, *б*). Конечно, на самом деле это электроны с заполненных атомов перескакивают на соседние незаполненные, но удобнее говорить о движении дырки. Дырка все-таки одна, а отражает движение многих электронов. Движение дырки подобно движению положительно заряженной частицы, потому что, если под действием электрического поля электроны движутся в одну сторону, то их «нехватка» движется в другую.

---

*) 1 электрон-вольт (1 *эв*) — энергия, приобретаемая электроном при прохождении разности потенциалов в 1 вольт. 1 *эв* = $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

Будет полезно подчеркнуть разницу между поведением металлов и полупроводников в электрическом поле. Ток в металле создается только свободными электронами. Металл так устроен, что в нем всегда имеется то или иное их количество. В полупроводнике же при достаточно низких температурах свободных электронов нет. Эти свободные электроны можно создать. Но при этом, отрывая электрон от атома и предоставляя ему свободу, мы создаем и дырку. В дальнейшем эти электроны и дырки движутся независимо друг от друга. Получается так, что ток в полупроводнике складывается из тока электронов и тока дырок.

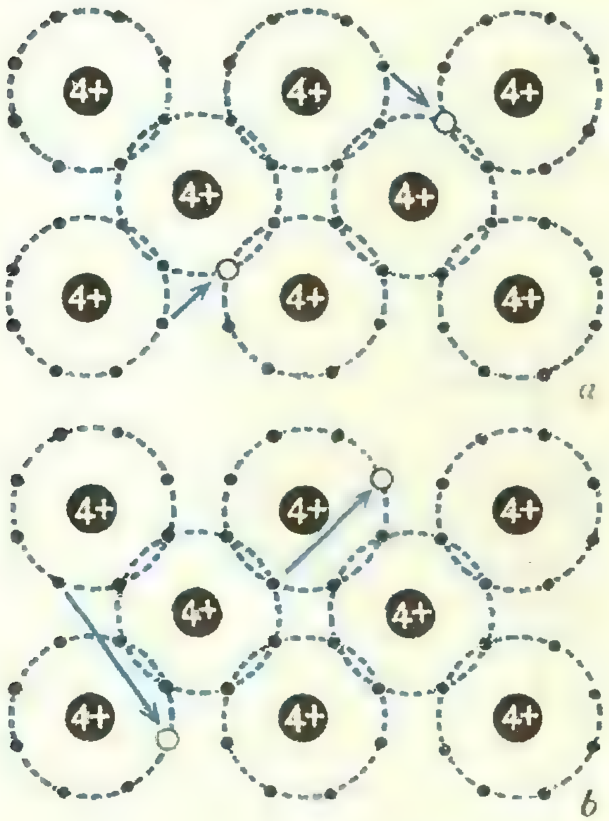


Рис. 1.

Может случиться так, что свободный электрон и дырка встретятся, то есть что электрон при своем движении по кристаллу встретит атом, у которого как раз не хватает электрона. Он займет это свободное место, и в этот момент и электрон, и дырка исчезнут. В этом случае говорят, что произошла рекомбинация. Вы вправе спросить, а зачем же тогда создавать электроны и дырки, если они рано или поздно вот так просто друг друга уничтожат? Во-первых, при наложении электрического поля электроны и дырки как частицы, имеющие разные заряды, движутся в противоположные стороны, и мы можем зарегистрировать ток, который они создают еще до того, как рекомбинируют. Во-вторых, мы не из каждого атома выбиваем электроны, а, например, из каждого тысячного. Мы создаем при этом значительный ток (поскольку в каждом кубическом сантиметре кристалла примерно 10^{23} атомов) и оставляем достаточную свободу для движения электронов и дырок.

Полупроводниковые кристаллы выращиваются чрезвычайно чистыми. Это тоже делается для того, чтобы движению электронов и дырок ничего не мешало.

Доноры и акцепторы

Существует и такой способ создания свободных электронов в полупроводнике. Представим себе кристалл германия, в котором один из атомов германия заменен атомом мышьяка. У атомов германия валентность равна 4, а у атомов мышьяка — 5. Когда атом мышьяка оказывается в окружении атомов германия, пятый

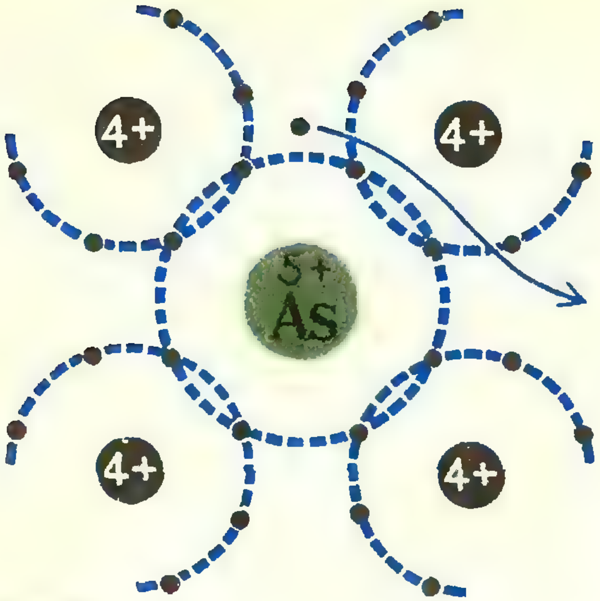


Рис. 2.

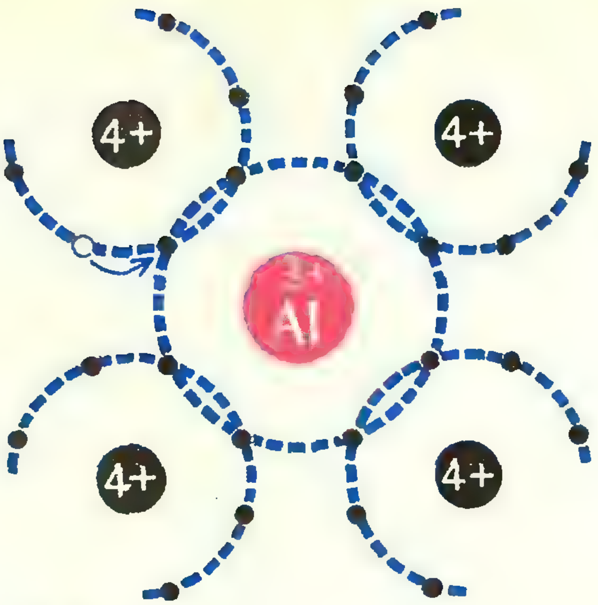


Рис. 3.

электрон мышьяка связан с ним очень слабо (рис. 2). Чтобы его оторвать, достаточно энергии 0,1 *эв*, которая не превышает тепловой энергии кристалла. Таким образом, один из электронов атома мышьяка становится свободным и странствует по кристаллу. Вводя в полупроводник примеси, имеющие более высокую валентность, мы всегда можем получить достаточное количество отрицательных носителей тока. В этом случае примесные атомы называются донорами, а сами полупроводники, содержащие примеси донорного типа, называют полупроводниками n-типа.

Можно внедрить в кристалл германия трехвалентные атомы, например, алюминия. Атому алюминия, для того, чтобы прочно сидеть в кристалле германия, необходимо иметь четыре внешних электрона, поэтому он захватывает недостающий электрон у соседних атомов германия (рис. 3). В кристалле образуется дырка. Примесные атомы такого типа называются акцепторами *), а полупроводники — полупроводниками p-типа.

Полупроводники n- и p-типа имеют соответственно избыточное количество отрицательных или положительных носителей тока. Избыточное — по сравнению с теми электронами и дырками, которые создаются тепловыми возбуждениями. Однако общий заряд каждого из полупроводников, конечно, равен нулю, поскольку их кристаллы образуются из нейтральных атомов. Отрицательный заряд электронов в полупроводнике n-типа компенсируется положительно заряженными донорными центрами, закрепленными в узлах кристаллической решетки, например, атомами мышьяка. В полупроводнике p-типа положительный заряд дырок гасится отрицательным зарядом акцепторных центров.

Переходы между полупроводниками

Возьмем два различных образца германия (p- и n-типа) и приложим их друг к другу *). Нас интересует, что будет происходить на границе раздела (рис. 4).

До тех пор, пока не был создан контакт между образцами, электроны в n-области и дырки в p-области, подходя к границе образца, отражались от поверхности и возвращались в глубь полупроводника. Как

---

*) От корня «акцепт» — принимать.

*) В таком случае говорят, что создан p — n-переход.

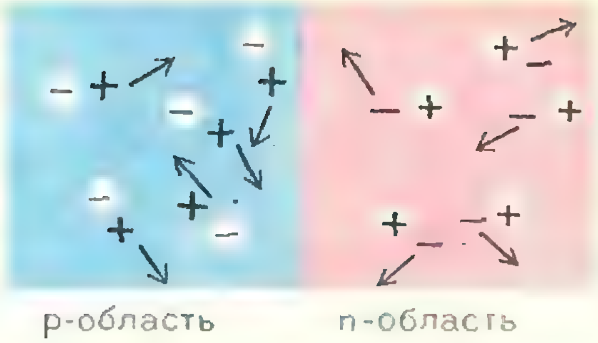


Рис. 4.

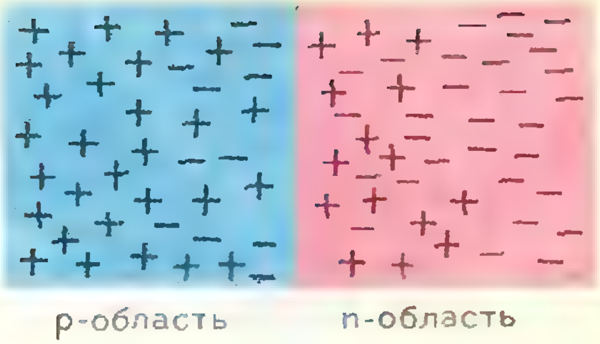


Рис. 5.

только образовался переход, ситуация изменилась. Электроны из *n*-области, движущиеся по направлению к границе раздела, имеют возможность перескочить в *p*-область. Аналогично дырки из *p*-области просачиваются в *n*-область. Оба эти процесса действуют в одном направлении: они стремятся зарядить германий *n*-типа положительно, а германий *p*-типа отрицательно. В самом деле, *n*-область, полный заряд которой до образования перехода был равен нулю, теперь заряжается положительно, отдавая отрицательно заряженные электроны в *p*-область. Положительно заряженные дырки, приходя из *p*-области, только способствуют этому. Германий же *p*-типа и за счет прихода электронов, и за счет ухода дырок приобретает отрицательный заряд.

Однако весь этот процесс рано или поздно должен остановиться. Когда германий *n*-типа зарядится положительно, а германий *p*-типа — отрицательно, то образуется как бы конденсатор, и на границе возникнет электрическое поле, направленное из *n*-области в *p*-область (рис. 5). А это значит, что, например, электроны из *n*-области уже не смогут больше уходить в *p*-область. Сильное электрическое поле на границе заставит их повернуть обратно. То же самое можно сказать и в отношении дырок. Возникшее электрическое поле понизит их шансы уйти в *n*-область. Итак, наступит равновесие, при котором германий *n*-типа будет заряжен положительно, германий *p*-типа — отрицательно, а на границе будет сильное электрическое поле, направленное из *n*-области в *p*-область.

Если принять потенциал электрического поля на границе за нуль, то потенциал *n*-области больше нуля, а потенциал *p*-области меньше нуля (рис. 6), как будто это пластины заряженного конденсатора. Потенциал резко изменяется в той области, где существует электрическое поле, т. е. на границе раздела между германием *p*- и *n*-типа. Разность потенциалов в *p*—*n*-переходе равна той энергии, которую необходимо иметь электрону для перехода из *n*-области в *p*-область, или дырке для перехода из *p*-области в *n*-область. Что касается дырок в *n*-области и электронов в *p*-области, то если им посчастливится случайно попасть на границу раздела, электрическое поле только подтолкнет их в другую область. Однако если такое случается, то это приводит к уменьшению заряда и *n* и *p*-областей, т. е. к уменьшению пере-

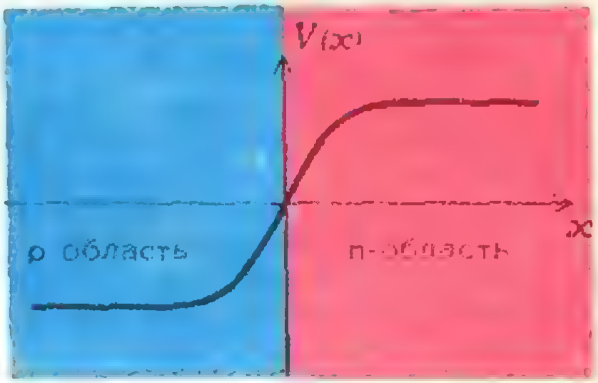


Рис. 6.

пада потенциала на границе и к уменьшению электрического поля. Но тогда найдутся электроны в n-области и дырки в p-области, которые обладают достаточной энергией для преодоления уменьшившегося потенциального барьера *). Они проскочат через барьер, и равновесие будет восстановлено. Мы видим, что равновесие между p- и n-областями динамическое. Между ними все время происходит обмен электронами и дырками, но этот обмен эквивалентен: средний заряд p- и n-областей остается неизменным и, следовательно, остаются неизменными перепад потенциала и электрическое поле на границе. Однако суммарный ток через границу равен нулю. Это равновесие можно нарушить, только создавая на концах p—n-перехода внешнюю разность потенциалов. Рассмотрим теперь этот случай.

Полупроводниковый диод

Образец с p—n-переходом обладает одним важным свойством: он может работать в качестве диода, то есть системы, пропускающей ток только в одном направлении.

Посмотрим, что происходит, если мы включаем p—n-переход в электрическую цепь, то есть создаем на концах образца внешнюю разность потенциалов. Возможны два случая. Либо перепад потенциала на границе p—n-перехода увеличивается, либо уменьшается. Равновесие между p- и n-областями, осуществляемое при помощи обмена электронами и дырками, нарушается, и средний ток через границу раздела отличен от нуля. Величина этого тока будет зависеть от того, увеличивает или уменьшает внешнее напряжение тот перепад потенциала, который существует в переходе сам по себе.

Если внешнее напряжение увеличивает скачок потенциала на границе, то ясно, что ток через переход чрезвычайно мал. Например, в p-области дырочный ток равен нулю, так как увеличивается величина потенциального барьера, который нужно преодолеть дыркам. Другими словами, увеличивается работа, которую им нужно совершить против сил электрического поля при переходе через границу раздела. Электронный ток в p-области тоже очень мал из-за малого количества электронов. В n-области, где преобладают отрицательные носители, ситуация аналогичная: электрическое поле, отталкивающее электроны от границы, возросло, а дырки не могут обеспечить достаточного тока, поскольку в n-области их ровно столько, сколько электронов в p-области, то есть очень мало.

Если же внешнее напряжение уменьшает величину скачка потенциала, то в p-области найдется большое число дырок, обладающих энергией, достаточной для преодоления ступеньки потенциала, и дырочный ток будет пропорционален числу дырок в p-области, которое очень велико. Точно так же электронный ток будет пропорционален числу электронов в n-области. В результате ток через переход будет очень большим.

Все эти процессы в целом легко понять следующим образом. При смещении равновесия, то есть при увеличении или уменьшении перепада потенциала, обмен электронами и дырками между p- и n-областями нарушается и возникает отличный от нуля суммарный ток через p—n-переход. Этот ток во всех случаях стремится восстановить равновесие, то есть уменьшить перепад потенциала, если он возрос, и наоборот. Однако этого ему не удается сделать, так как переход включен в электрическую цепь. Средний заряд, переносимый с одной стороны p—n-перехода на другую, не задерживается в образце, а уходит дальше по цепи. Равновесие так и остается нарушенным.

Итак, при включении p—n-перехода под напряжение, обмен заря-

---

*) См. «Квант» № 5, 1971 г., стр. 8—16.

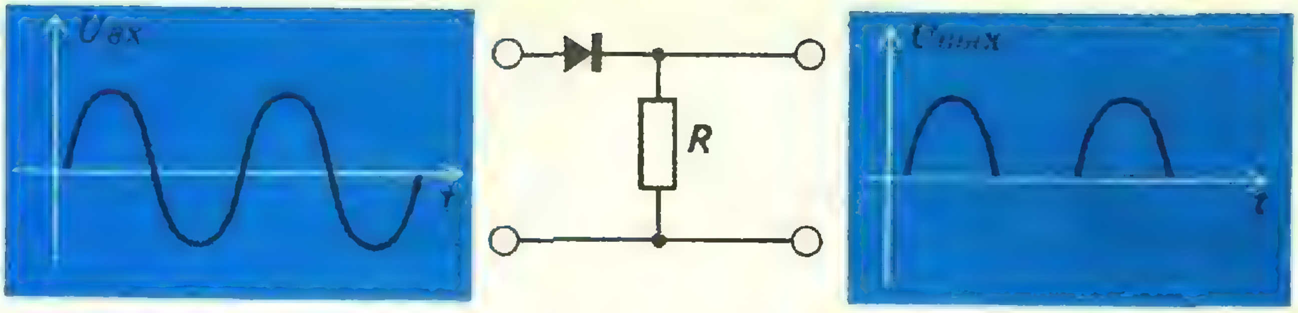


Рис. 7.

дами между p- и n-областями изменяется и через переход протекает ток. Этот ток очень велик при одном знаке внешнего напряжения и очень мал при другом.

Свойство полупроводникового диода пропускать ток только в одном направлении используется, например, для создания выпрямителей — устройств, преобразующих переменный ток в постоянный.

Простейшая схема такого выпрямителя изображена на рисунке 7. Для анализа работы этой схемы нам важен только тот факт, что при одном знаке напряжения сопротивление диода (R_D) практически равно нулю (когда он пропускает огромный ток), а при другом знаке напряжения диод практически не проводит тока и, следовательно, его сопротивление очень велико.

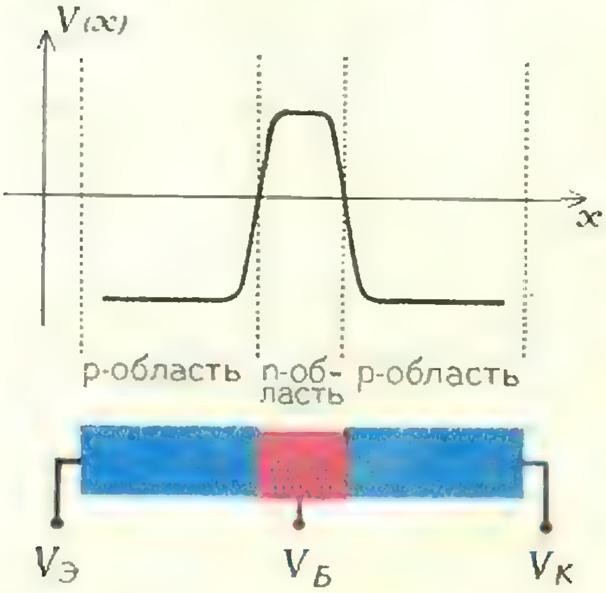


Рис. 8.

Предположим теперь, что диод пропускает ток только слева направо, то есть он открыт, когда напряжение на входе больше нуля, и закрыт, когда оно отрицательно.

При $U_{вх}>0$ общее сопротивление цепи

$$R_D+R\approx R,$$

и напряжение на выходе будет практически равно входному.

При $U_{вх}<0$ сопротивление диода бесконечно ($R_D\gg R$), и, следовательно, падение напряжения на сопротивлении R практически равно нулю. Напряжение на выходе равно нулю. Таким образом, наша система преобразовывает знакопеременное напряжение в знакопостоянное.

Транзистор

Теперь мы можем рассмотреть транзистор — систему, которая объединяет в себе два только что рассмотренных перехода. p—n—p-транзистор — это изготовленный, например, из германия небольшой брусок, составленный из трех участков: p-область, n-область и опять p-область (рис. 8). Каждый переход в транзисторе ведет себя так, как описано выше. В частности, в каждом переходе должен наблюдаться перепад потенциала — падение из n-области в каждую из p-областей, так что общее распределение потенциала будет таким, как показано на рисунке 8.

В работающем транзисторе каждая из трех областей подключена к источнику внешнего напряжения. К *n*-области, которая называется базой, подведен небольшой отрицательный потенциал, а правая *p*-область (коллектор) подключена к значительно большему отрицательному потенциалу. На рисунке 9 распределение потенциала в работающем *p*—*n*—*p*-транзисторе изображено сплошной линией.

Рассмотрим сначала, что происходит с положительными носителями тока — дырками, потому что именно их поведение управляет работой *p*—*n*—*p*-транзистора. Легко понять, что из левой *p*-области (эмиттера) на базу пойдет ток положительных носителей, поскольку потенциал базы будет теперь уменьшен на величину $V_\text{Б}$ и дыркам нужно преодолеть меньший потенциальный горб, чем это было раньше. Таким образом, дырки будут «эмиттироваться» из *p*-области в *n*-область. Что будет с ними дальше? Могло бы показаться, что этот ток вытечет из *n*-области через контакт, подключенный к базе. Но этого не произойдет, поскольку *n*-область делается достаточно узкой для того, чтобы дырки проскакивали в правую *p*-область на коллектор; тем более, что при переходе с базы на коллектор потенциал резко падает и на дырки действует сильное электрическое поле, направленное в сторону коллектора. Обратный путь дыркам закрыт. При переходе с коллектора на базу им нужно было бы преодолеть слишком высокий барьер.

Итак, почти весь дырочный ток, вышедший из эмиттера, собирается в области коллектора и только небольшая его часть (доли процента) идет на базу. Естественно, ток через эмиттер равен сумме токов базы и коллектора. Если теперь слегка менять потенциал $V_\text{Б}$, то ток через эмиттер будет меняться очень сильно, следовательно, очень сильно будет меняться и ток через коллектор, ведь они примерно равны с точностью до мизерного тока базы. Перед нами усилитель: при помощи небольшого тока $I_\text{Б}$, проходящего через электрод базы, мы получим примерно в 100 раз больший ток через коллекторный электрод.

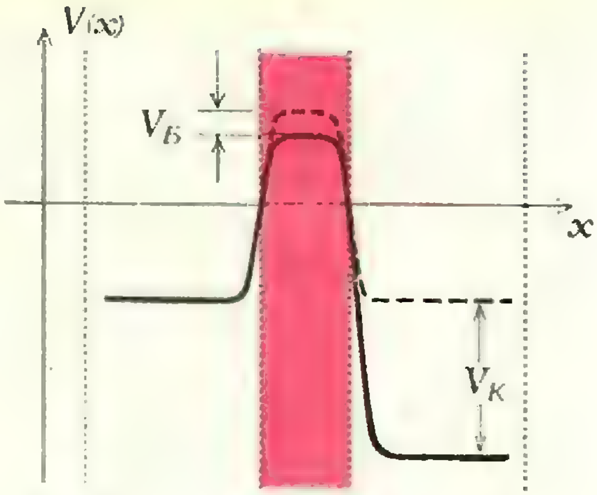


Рис. 9.

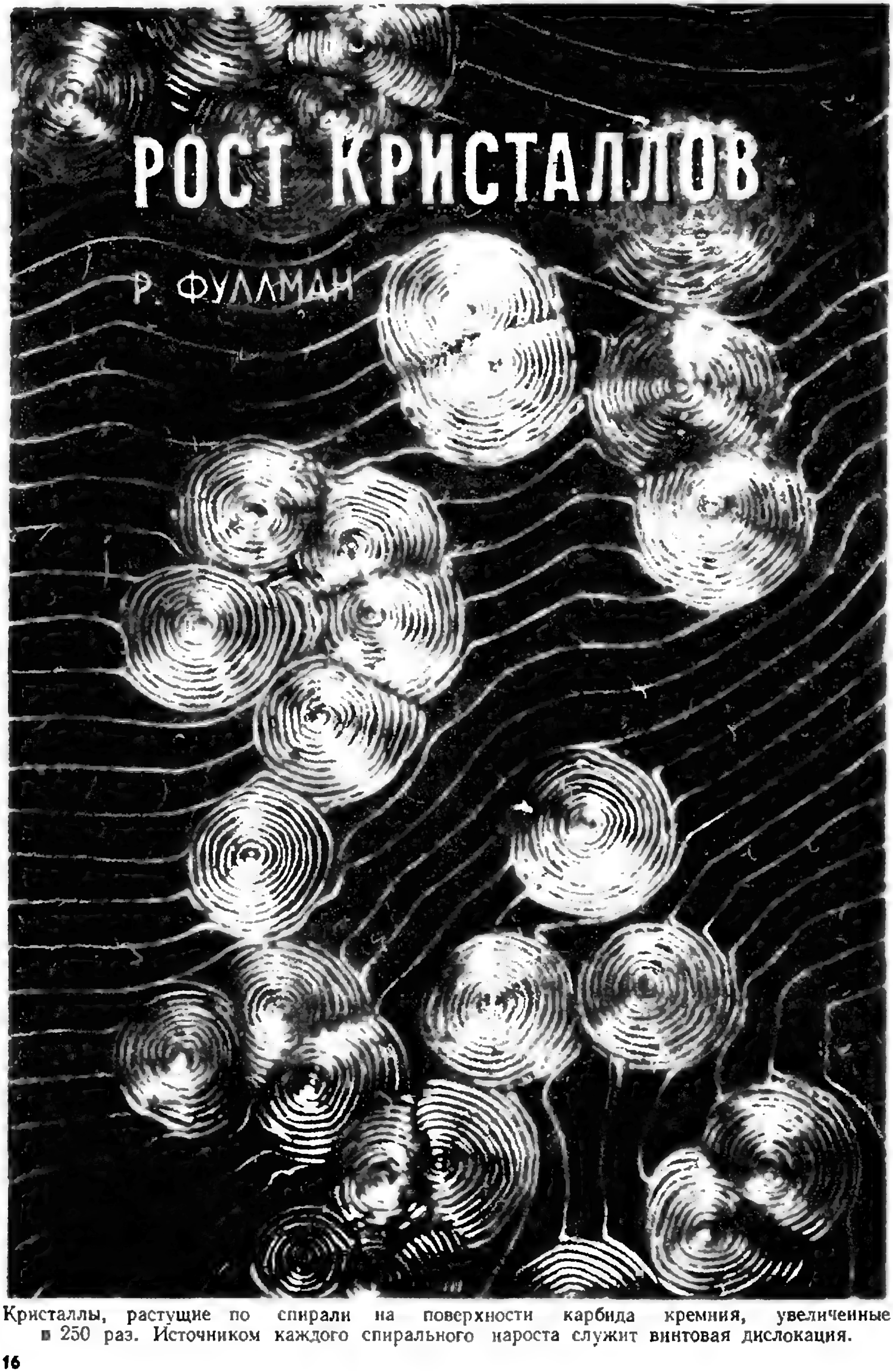
Остается рассмотреть, что происходит с электронами. Электронный ток с базы на коллектор очень мал, поскольку в этом направлении электронам приходится преодолевать очень высокий потенциальный барьер. Но зато при переходе электронов с базы на эмиттер существует подталкивающее электрическое поле, и электронный ток в этом направлении может достигать заметной величины. Это обстоятельство работает против нас, поскольку увеличивает полный ток через базу при заданном коллекторном токе, в результате чего уменьшается усиление. Поэтому транзистор конструируется так, чтобы уменьшить этот ток до минимума.

Все, что рассказано о *p*—*n*—*p*-транзисторе, в равной мере применимо к *n*—*p*—*n*-транзистору, если только переменить знаки потенциалов электродов.

В заключение нужно сказать, что применение полупроводников, конечно, не ограничивается только диодами и транзисторами. Существует очень много других устройств, работа которых основана на тех или иных свойствах полупроводников.

РОСТ КРИСТАЛЛОВ

Р. ФУЛЛМАН



Кристаллы, растущие по спирали на поверхности карбида кремния, увеличенные в 250 раз. Источником каждого спирального нароста служит винтовая дислокация.

Известно, что кристаллы можно выращивать. Но как они растут? Что заставляет присоединяться к ним новые частицы? В каком направлении растут кристаллы? Теории роста кристаллов посвящена статья, помещенная ниже. Она была опубликована в журнале «Scientific American». Перевод сделан В. К. Федякиным.

Каким образом атомы или молекулы пара либо раствора образуют строгую архитектуру твердого тела? Многое может быть понято, если предположить, что они ведут себя при этом как кирпичи, укладываемые по спиральному скату.

Все металлы и почти все основные твердые материалы, используемые в современной технике, построены из кристаллов. Следовательно, понимание, каким образом строятся кристаллы — как они растут, является существенным аспектом науки о материалах.

Устройство кристалла не так безупречно, как это выглядит на первый взгляд. Двадцать пять лет назад физики думали, что имеют ясные представления о том, как растут кристаллы. Но потом простые опыты посеяли в них сомнения. Это привело к серии неожиданных открытий и к новой картине устройства кристаллов.

Само построение кристалла ничем не отличается от построения стенки из кирпичей. Из кучи атомов или молекул, собранных совершенно беспорядочно (то есть в виде газа или жидкости), берут один за другим подходящие кирпичи и складывают их в упорядоченную структуру. Если изобразить эти единицы (атомы или молекулы) маленькими кубиками и предположить, что они выстраиваются друг за другом, а затем остаются неподвижными на своих местах, то идеальный кристалл в процессе построения будет выглядеть так, как это изображено на рис. 1, *а*.

Однако атомы и молекулы при обычных условиях имеют кинетическую энергию и находятся в беспорядочном тепловом движении. Они могут

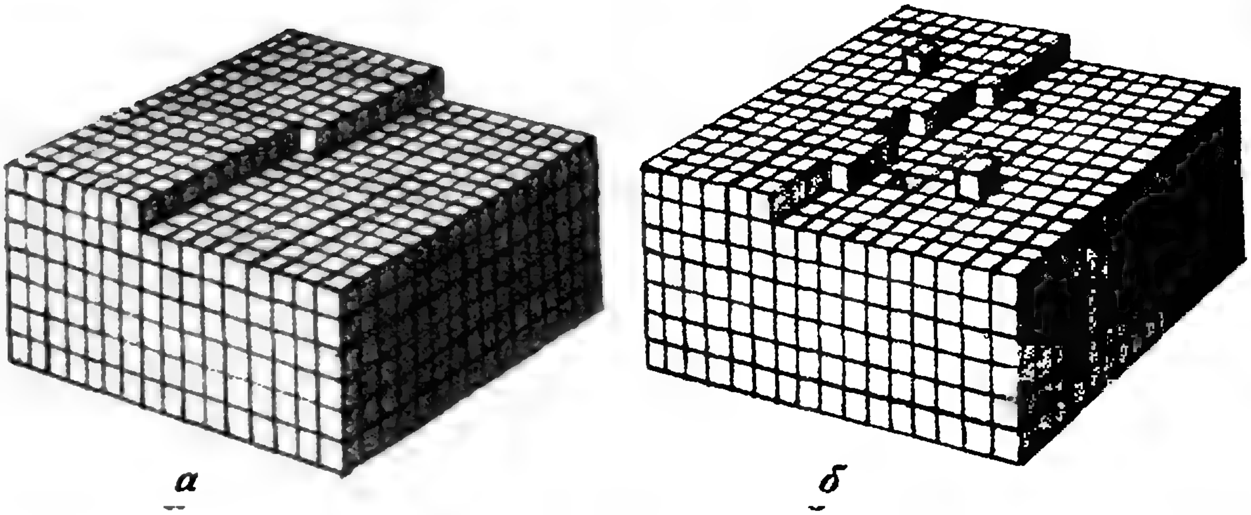


Рис. 1. На левом рисунке изображен растущий идеальный кристалл в некоторый момент времени. Здесь полностью игнорируется тепловое движение его молекул. Правый рисунок дает представление о влиянии такого движения. Каждый кубик на этих весьма схематичных рисунках представляет отдельную молекулу.

прилипнуть к поверхности кристалла и тотчас же вновь ее покинуть. Таким образом, даже в идеализированной картине рост кристаллов происходит совсем не так упорядоченно, как укладка кирпичей. Рост кристаллов должен идти примерно так, как показано на рисунке 1, *б*. Кубик, опускающийся на поверхность кристалла, связывается с ней прочно только в том случае, когда по меньшей мере три из его шести граней сцепляются с кубиками, уже сидящими на кристалле. Более того, чтобы можно было гарантировать рост какого-либо слоя, он должен состоять из определенного минимального числа кубиков.

В том случае, когда слишком большая часть составляющих его кубиков находится у углов или на краях, они не смогут удерживать новые кубики, опускающиеся на поверхность.

Скорость перехода молекул из твердого тела в окружающий его пар зависит от интенсивности молекулярного движения — то есть от температуры. Скорость возвращения из пара в твердое тело зависит от концентрации молекул в паре, то есть от давления пара. Для каждой температуры имеется некое «давление насыщенного пара», при котором скорости перехода из твердого тела в пар и обратно уравновешиваются. В этих условиях кристалл не будет расти. Он может расти только в том случае, когда пар перенасыщен.

Далее эта модель роста кристалла предполагает, что после того, как заполнен слой на поверхности, дальнейший рост кристалла затрудняется: нужна более высокая степень перенасыщенности, чтобы начать заполнять новый слой.

Именно в этом пункте и потерпела крах классическая теория роста кристаллов. Расчеты показали, что образование достаточно больших островков центров конденсации, чтобы началось построение новых слоев и кристалл мог продолжать расти, требует давлений, превышающих давление насыщенного пара на величину от 25 до 50 процентов. Однако в 1931 году физики М. Волмер и В. Шультце сумели вырастить кристаллы при пересыщенности пара всего лишь в один процент. Теория предсказывала, что при такой степени пересыщенности кристалл мог бы расти лишь со скоростью в 10^{1000} раз меньшей той, с которой он рос на самом деле. Это, по-видимому, одно из самых рекордных расхождений между теорией и экспериментом.

Каким же образом начинается и продолжается такая сравнительно легкая застройка новых кристаллических плоскостей? Физики проделывали расчеты вновь и вновь, но прийти в рамках старой модели к результатам, имеющим какой-то смысл, они, как ясно теперь, и не могли. Это продолжалось до 1949 года, пока английский физик Ф. Франк не предложил новую модель. Франк заметил, что рост кристалла можно довольно просто понять, если предположить, что в процессе застройки его кристаллические плоскости не располагаются независимо одна над другой, а образуют спиральную структуру. Это было бы возможно, если бы кристалл обладал таким отклонением от идеальной структуры, которое называется «винтовой дислокацией».

Представим себе кристаллическую решетку из двух примыкающих секций, в которой по всей глубине кристалла кристаллические слои одной из частей (правой на рис. 2) находятся ниже соответствующих слоев другой части. Почему такое нарушение структуры мы называем винтовой дислокацией? Пусть крошечный наблюдатель обходит внутренний край разреза по поверхности кристалла, начиная свой путь на верхнем его конце. Он закончит его уровнем ниже. И это происходило бы при каждом последующем обходе, перемещающем таким образом нашего наблюдателя по спирали в глубь кристалла. Модель, которую мы описали, называется правой винтовой дислокацией, потому что путь по спирали в глубь кристалла все время заставляет поворачивать вправо.

Как только Франк уяснил себе картину кристалла с дислокацией, он сразу же понял, что наличие дислокации постоянно создает на поверхности открытую ступеньку. Атомы и молекулы всегда могут с легкостью пристроиться к ней и продолжать строить кристалл, никогда не начиная нового ряда. Эта ступенька, по мере прибавления новых строительных единиц, распространяется по поверхности кристалла. Однако при этом она загибается (рис. 2). Чтобы понять причину этого, рассмотрим цепочку конькобежцев, которая поворачивается вокруг одного из своих концов. Если они хотят сохранить строй, то тем конькобежцам, которые находятся ближе ко второму концу цепочки, придется бежать быстрее, чем тем, которые находятся ближе к центру вращения. Ведь они должны бежать по кругу большего радиуса. В нашем случае со ступенькой на поверхности кристалла существенно то, что ее внешний край застраивается не быстрее области в центре. Кирпичи укладываются с более или менее постоянной скоростью вдоль всей длины ступеньки. В этом случае по мере застройки вращение внешней части ступеньки вокруг центра происходит недостаточно быстро и ступенька изгибается, образуя спираль.

Была ли правильной новая картина роста кристаллов? Подтверждение не заставило себя долго ждать. На одной из конференций, где обсуждались вопросы этой теории, были продемонстрированы микрофотографии поверхности кристалла, на которых обнаруживались предсказанные картины спиральных ступенек. Это вполне отвечало на вопрос. Последовавшие затем интенсивные обследования кристаллов под микроскопом обнаружили разнообразные картины роста, которые могли быть объяснены лишь

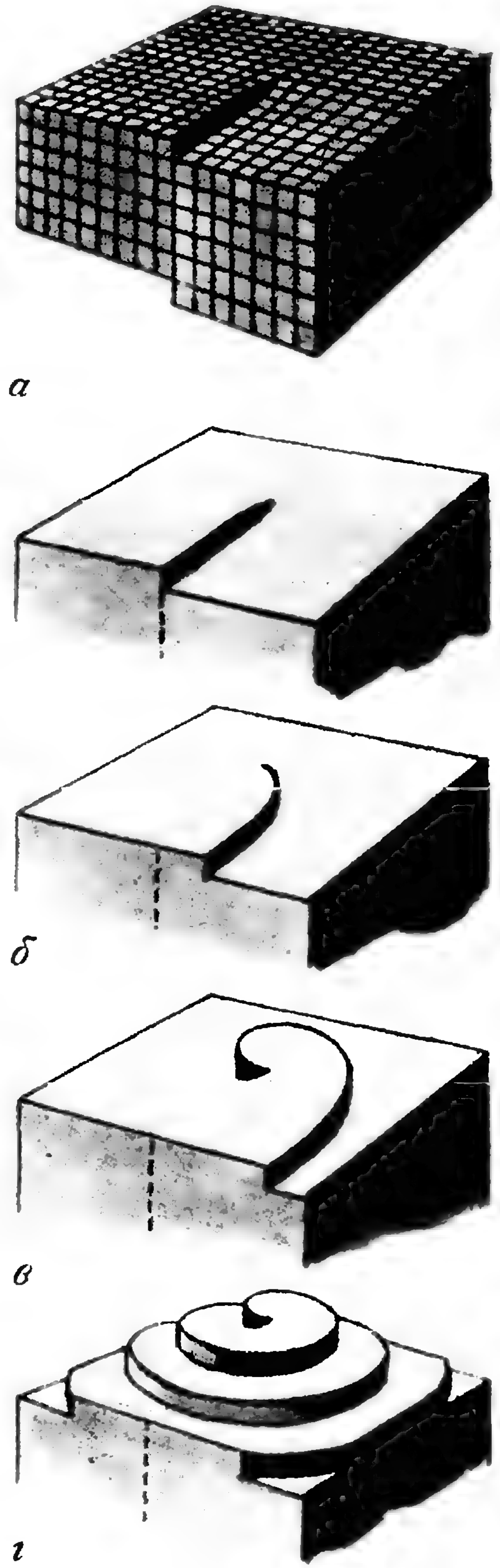


Рис. 2. На рисунке *а* показано возникновение винтовой дислокации, которая приводит к спиралевидному росту кристалла, проиллюстрированному на последующих рисунках *б, в, г*.

теорией винтовых дислокаций и были до этого ею предсказаны.

В природе редко возникают идеально правильные кристаллы. Они содержат обычно по меньшей мере одну дислокацию. Это необходимое условие роста при небольшом пересыщении. В общем же случае кристалл имеет много дислокаций. Присутствие различных дислокаций усложняет картину роста. Так, например, две близко расположенные дислокации, одна из которых правая, а другая левая, могут привести к ступеньке, закрепленной на обоих своих концах (рис. 3, *а*). По мере того, как на такую ступеньку садятся новые кирпичи, она приобретает полукруглую форму (рис. 3, *б*). В итоге мы придем к кольцеобразной ступеньке (рис. 3, *в*). Это и есть полностью застроенная кристаллическая поверхность на таком кристалле. Однако тем временем на верхушке исходной ступеньки образуется новая ступенька, которая служит ядром для застройки нового ряда (рис. 3, *г*). По мере того, как этот процесс повторяется, кристалл разрастается в набор плотноупакованных кругов, а не спиралей, как это было при наличии одной винтовой дислокации. Фотографию такого кристалла вы видите на рисунке 4. Ступеньками здесь являются прямоугольники, а не круги, по той причине, что условия роста этого кристалла на периферии и в центре слегка различны.

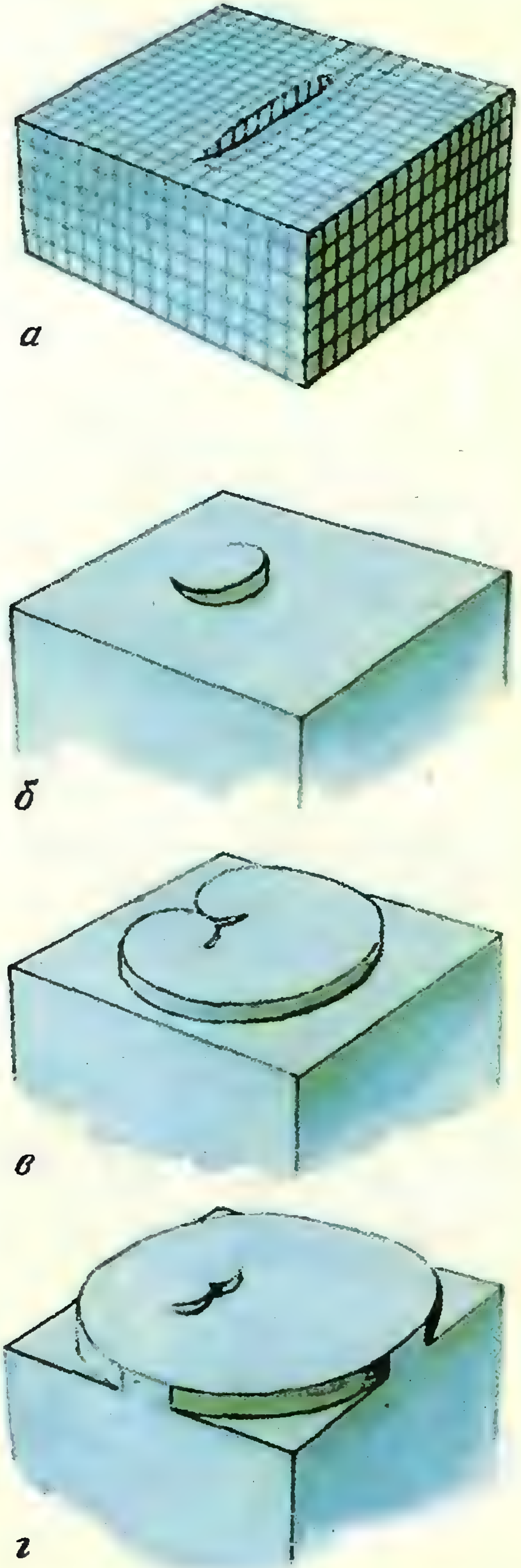


Рис. 3. Замкнутые петли могут возникнуть из таких ступенек, которые начинаются и кончаются на поверхности кристалла (рисунок *а*) и которые обусловлены соседством двух дислокаций: правой и левой. Такая ступенька закреплена на обоих своих концах и может расти только разбухая. Рисунок *б* показывает начинающую выворачиваться разбухающую ступеньку. На следующем рисунке показан тот момент роста, когда левая и правая выступающие части сомкнулись. На последнем рисунке видно, как внутренние части отделились от заполненного слоя. Видна вмятина в этой ступеньке, которая будет заполнена, как только начнет заполняться молекулами площадка, образовавшаяся наверху выросшей из первоначальной площадки петли.

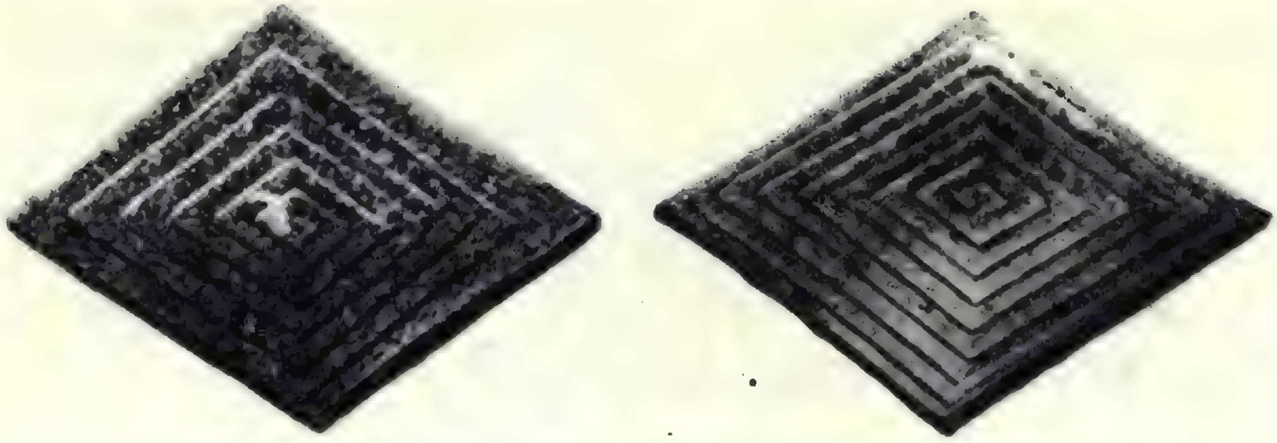


Рис. 4. Четырехрядная ступенька, образовавшаяся из-за присутствия четырех очень близко располагающихся друг к другу дислокаций одного и того же типа. Серия из большего числа дислокаций дает многослойные ступеньки.

Высоту кристаллической ступеньки можно измерить. Оказалось, что некоторые кристаллы имеют ступеньки высотой во много рядов атомов (рис. 5). Теория объясняет появление таких многорядных ступенек наличием группы близко расположенных дислокаций, которые к тому же либо все правые, либо левые. От каждой дислокации ступенька получает по одному ряду атомов. На рисунке 6 показан кристалл иодистого кадмия со ступенькой высотой во много рядов. Короткая прямая линия у центра спирали — это совокупность винтовых дислокаций.

Теория помогла разобраться и в других особенностях кристаллической структуры, которые долго мистифицировали кристаллографов. Речь идет об упаковке кристаллических плоскостей кристалла. Чтобы разобраться в этом, нужно несколько уточнить форму строительных единиц кристалла, которые до сих пор мы полагали просто кирпичиками. Эти стро-

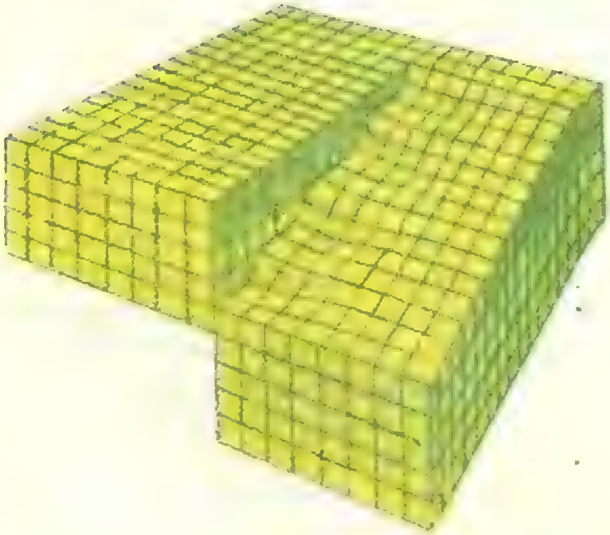


Рис. 5. Микрофотографии позволяют выявить ступеньки роста на поверхности кристалла парафина.

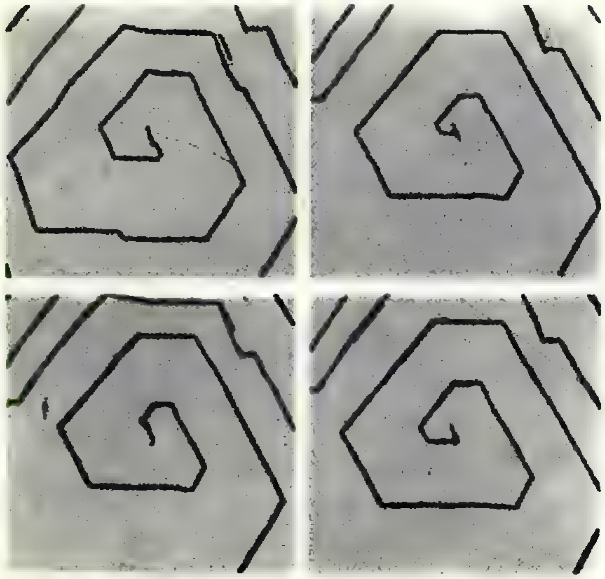


Рис. 6. Раскручивающаяся спираль в четырех последовательных положениях на поверхности кристалла иодистого кадмия. Такая ступенька, высота которой составляет много слоев, порождена большой группой плотноупакованных дислокаций.

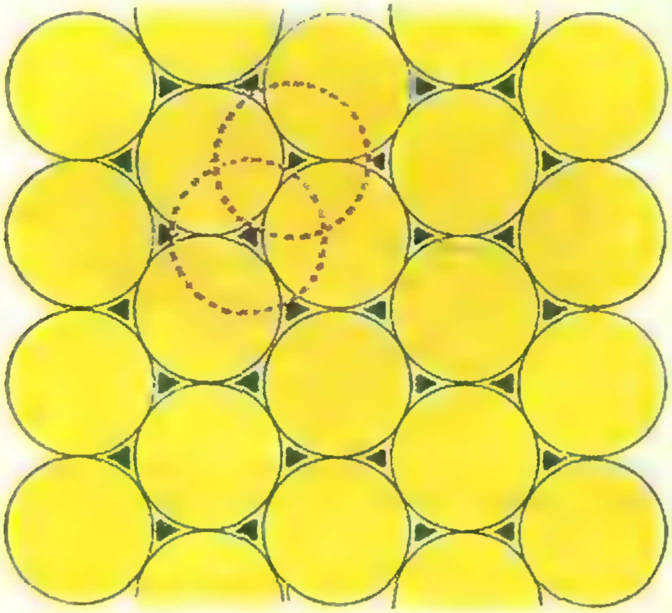


Рис. 7. На диаграмме плотноупакованные молекулы представлены кругами. Треугольники указывают две возможные позиции для молекул следующего слоя.

ительные блоки кристалла — атомные или молекулярные ячейки — не кирпичики, а скорее похожи на шарики. Определенные кристаллы обладают плотноупакованной структурой, что означает, что эти сферические блоки располагаются не непосредственно один над другим, а наподобие пушечных ядер (или биллиардных шаров) в пирамиде, в которой каждый шар попадает в углубление между ближайшими соседями. Ясно, что каждый последующий слой в такой пирамиде может плотно подгоняться к предыдущему при двух возможных положениях шаров. На рисунке 7 эти позиции шаров верхнего слоя указаны символами ▲ и ▼. Когда один слой кладется на другой, условия плотной упаковки требуют, чтобы все шарики этого слоя располагались либо в положениях, помеченных индексом ▲, либо в положениях, помеченных индексом ▼. Следующий за ним слой опять может подгоняться так, что его шары располагаются либо в одной, либо в другой позиции. Пусть слои уложены так, что их шарики располагаются последовательно, то в одном, то в другом положениях. Такая последовательность слоев обозначается символически ▲▼. Однако кристаллы зачастую упаковываются намного более сложным образом. Так, например, одна из разновидностей кристалла карбида кремния характеризуется следующим расположением: ▲▲▼▼▼▲▲▼▼▼ и так далее. Здесь повторяется группа, состоящая из пяти слоев. В некоторых типах кристаллов карбида кремния повторяется группа, состоящая из 29 слоев.

Каким образом можно передать информацию о нужном расположении шариков в слое на такое большое расстояние? Каким образом каждый шарик в тридцатом слое попадает в то же самое положение, что и соответствующий шарик первого слоя? Классическая кристаллография не могла предложить какое-либо объяснение и постулировала наличие неких неизвестных дальнодействующих сил между молекулами. Теория роста кристаллов, использующая теорию дислокаций, предложила простой, хотя и неполный ответ. Наличие серии винтовых дислокаций может привести к появлению ступеньки высотой во много слоев. Эта ступенька и становится той единицей повторения в структуре кристалла, которая все время воспроизводится по мере его роста. Теория не объясняет лишь одного существенного аспекта реальной ситуации: в случае карбида кремния найдено всего лишь 14 вариаций картины кристаллической структуры, тогда как теория приводит к возможности возникновения почти неограниченного числа таких структур.

Каким образом возникает начальная винтовая дислокация? Ответ на этот вопрос пока еще весьма не однозначен. Почти все кристаллы начинают вырастать из малого инородного ядра. Некоторые из этих ядер могут иметь поверхностные неоднородности, на которых возникает винтовая дислокация, распространяющаяся на весь растущий кристалл. Другие кристаллы могут приобрести дислокации по мере своего роста. Дислокации могут возникнуть и на захваченных частичках грязи.

Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Снежные заносы

Участки железных или шоссейных дорог, проходящие в ложбинах, заносятся снегом, даже если нет снегопада. Почему это происходит? На первый взгляд ответ ясен: снег переносит ветер. Однако, чтобы детально разобраться в механизме этого процесса, потребовалось целое исследование.

В 1936 году английский физик Бэнгольд изучал перенос песка ветром в аэродинамической трубе.

Оказалось, что если скорость ветра меньше некоторой скорости v_1, то песок не движется. При скорости ветра, большей чем v_1, но меньшей некоторой другой скорости v_2, песок также может оставаться в покое. Но если при этом в неподвижную массу песка откуда-нибудь падает песчинка, от ее удара подскакивает вверх несколько других песчинок. Эти песчинки увлекаются ветром, падают, приводят в движение другие песчинки, и в результате песок переносится по ветру. При скорости ветра, большей чем v_2, песчинки поднимаются вверх, образуя песчано-воздушный поток довольно значительной, но уменьшающейся кверху плотности. О траекториях песчинок дает представление рисунок 1.

Теперь можно объяснить, почему снег в ветреную погоду заполняет выемки. В месте углубления поток расширяется (это сразу становится видным по картине линий тока на рисунке 2), и поэтому скорость его падает. В результате равновесие между увлекаемыми вверх и падающи-

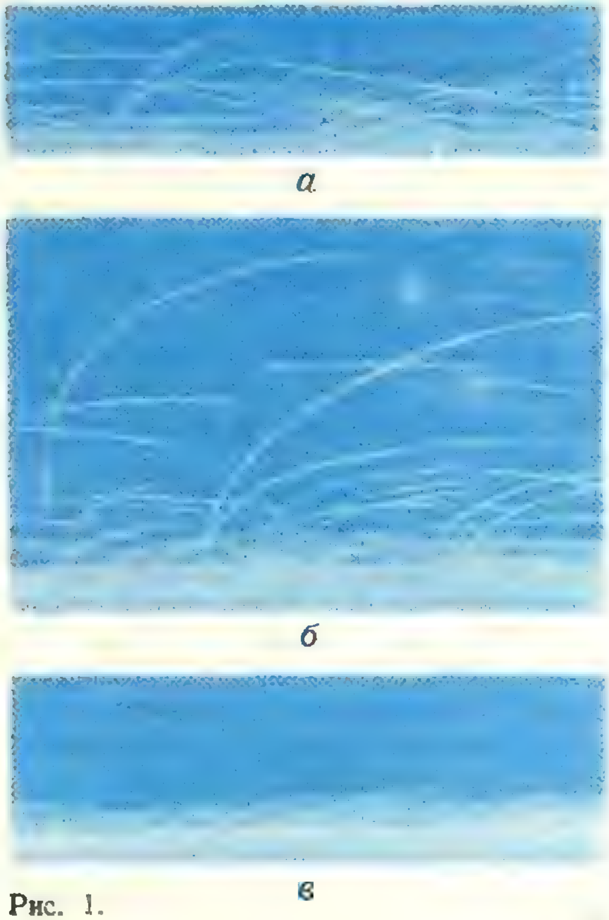

а
б
в

Рис. 1.

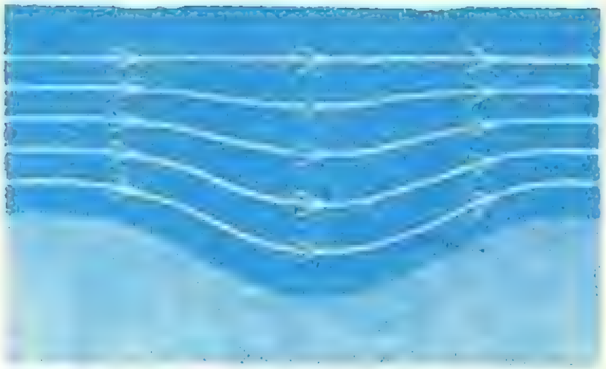


Рис. 2.

ми вниз частицами нарушается: падает больше частиц, чем поднимается, и углубление постепенно заполняется снегом.

Аналогичные процессы происходят и в том случае, когда снег, переносимый ветром, встречает на своем пути какое-нибудь препятствие, например дерево. Перед стволом дерева с той его стороны, откуда дует ветер, возникает восходящее движение воздуха. Оно приводит к тому, что с наветренной стороны ствола и с боков на поверхности снега образуется глубокая выемка. Перед этой выемкой и немного позади ствола, где скорость ветра меньше, образуется, наоборот, возвышение.

Описанное явление используют для защиты участков дорог, проходящих в ложбинах, от заноса. На определенном расстоянии перед выемкой или ложбиной с той стороны, откуда дует ветер, устанавливают забор из дощатых щитов. За щитами образуется спокойная зона с равномерным слабым ветром, в которой полностью отлагается весь увлекаемый ветром снег.

Так же объясняется и движение песчаных дюн. Ветер достаточной силы, набегающий на песчаную дюну, поднимает песок с наветренной стороны. На подветренной стороне, где скорость ветра меньше, песок падает вниз. В результате с течением времени дюны постепенно перемещаются в направлении ветра — «кочуют».

НЕ ВЕРЬ ГЛАЗАМ СВОИМ

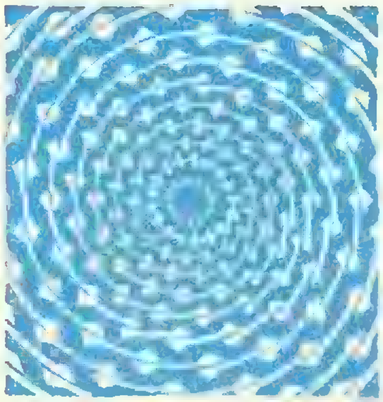
На страницах нашего журнала («Квант» № 10, 1970) мы уже писали о зрительных иллюзиях.

А вот еще один любопытный пример такого обмана зрения. На обложке журнала нарисованы концентрические окружности. Однако из-за фона, состоящего из цветных спиралей, линии окружностей, местами прерванные, воспринимаются глазом как спирали.

Воспользовавшись циркулем, вы без труда убедитесь, что здесь действительно изображены окружности.

Любопытно, что если освещать рисунок короткими вспышками света, то при определенной продолжительности вспышки иллюзия пропадает.

Такая же иллюзия возникает и при разглядывании рисунка, помещенного внизу. Окружности, изображенные здесь, также выглядят спиралями.



Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ

А. Л. Тоом

В первом номере «Кванта» были опубликованы задачи вступительной контрольной работы в Заочную математическую школу. ЗМШ получила около 6000 писем от восьмиклассников. Около 2500 из приславших решения приняты в ЗМШ и ее филиалы.

В этом номере мы публикуем решения наиболее трудных задач.

Условия задач

5. О треугольнике ABC были сделаны 4 утверждения:
1) треугольник ABC прямоугольный;
2) $\angle A = 30^\circ$; 3) $AB = 2BC$; 4) $AC = 2BC$.

Известно, что два из этих утверждений верны, а два других — неверны. Найти периметр треугольника ABC, если $BC = 1$.

6. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить, какой знак имеет число c.

7. Про точки A, B, C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC.

9. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

10. Можно ли выписать девять чисел 1,2,3,..., 9 по кругу в таком порядке, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Жители города Правдин всегда говорят правду, а жители города Лгунов всегда лгут.

В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

А (обращаясь к *Б* и *В*): «Я не был на матче. Скажите, кто выиграл?»

Б: «*Г* сказал мне, что их команда проиграла».

В: «Наша команда выиграла».

Г (садясь в автобус, идущий в другой город, и обращаясь к *А*): «Поедем вместе, *А*, ведь мы из одного города».

А: «Вы ошибаетесь, *Г*. Я живу здесь. Это *В* из вашего города».

Определить, кто из какого города, где происходит матч и какая команда выиграла.

12. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 *км*, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 *км*, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 *км*. Сколько автобусов при этом его обогнало? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.)

Решения задач

5. Нам сказано, что из четырех утверждений какие-то два верны, а другие два неверны, но не сказано, какие именно верны, а какие — нет. Поэтому рассмотрим несколько случаев. В каждом таком случае мы будем предполагать, что какие-то два определенные утверждения верны, а другие два неверны. Чтобы не пропустить какой-нибудь случай, сначала выясним,

сколько их, пользуясь схемой на рисунке 1. На этой схеме каждые две из четырех цифр 1,2,3,4 соединены.

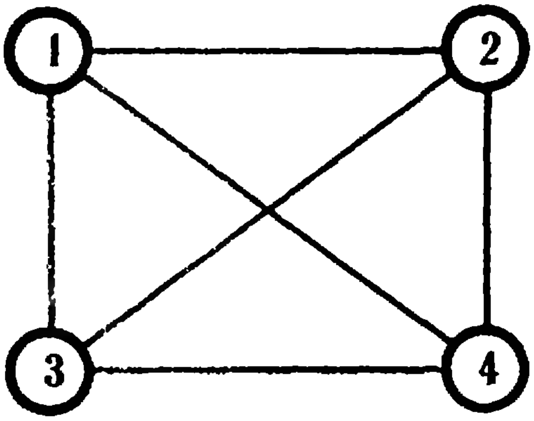


Рис. 1.

Ясно, что случаев ровно столько, сколько отрезков, соединяющих цифры, то есть шесть. Рассмотрим их все по порядку.

Чтобы указать, какой случай мы рассматриваем; будем называть только номера верных утверждений. Например, «случай 1.2» здесь означает: случай, в котором предполагается, что утверждения 1 и 2 верные (а 3 и 4 неверные).

Случай 1.2. Поскольку $\angle A=30^\circ$, то прямой угол — либо B, либо C. Если $\angle B$ прямой, то $AC=2BC$, чего не должно быть, так как утверждение 3 в этом случае неверно. Если $\angle C$ прямой, то $AB=2BC$, что также противоречит условию. Итак, случай 1.2 невозможен.

Случай 1.3. Угол A не может быть прямым, так как против него лежит не наибольшая сторона. Если $\angle C=90^\circ$, то $\angle A=30^\circ$, чего не может быть в этом случае. Значит, $\angle B=90^\circ$. Тогда утверждения 2 и 4 неверны. Значит, такой случай возможен. Тогда по теореме Пифагора $AC=\sqrt{5}$, а периметр равен $3+\sqrt{5}$.

Случай 1.4. Разбирается аналогично случаю 1.3. Возможен, если $\angle C=90^\circ$. Периметр равен $3+\sqrt{5}$.

Случай 2.3. Если $\angle A=30^\circ$ и $AB=2BC$, то $\angle C=90^\circ$, что противоречит условию.

Случай 2.4. Аналогично случаю 2.3 невозможен.

Случай 3.4. Утверждения 1.2 неверны. Значит, этот случай возможен. Периметр равен 5.

Ответ. а) $3+\sqrt{5}$; б) 5.

6. Поскольку квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, то $b^2-4ac<0$, откуда $ac>\frac{b^2}{4}$. Докажем, что $c(a+b+c)>0$.

Действительно,

$$c(a+b+c)=ac+bc+c^2>\frac{b^2}{4}+bc+c^2=\left(\frac{b}{2}+c\right)^2\geqslant 0.$$

Поскольку в положительном произведении один множитель $a+b+c$ отрицателен, то и другой множитель c отрицателен. Итак, $c<0$.

Вариант решения. Известно, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c ни при каком x не равен нулю, то его знак — один и тот же при всех x. Заметим, что число $a+b+c$ — это значение нашего трехчлена при $x=1$, а число c — это его значение при $x=0$. Значит, эти два числа имеют один и тот же знак. Поскольку $a+b+c<0$, то и $c<0$.

7. Докажем требуемое от противного. Предположим, что точка A не лежит на отрезке BC, и придем к противоречию с условием. То есть докажем, что тогда неверно, что «для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM». Иными словами, найдем такую точку M на плоскости, что отрезок AM не меньше каждого из отрезков BM и CM. Рассмотрим два случая.

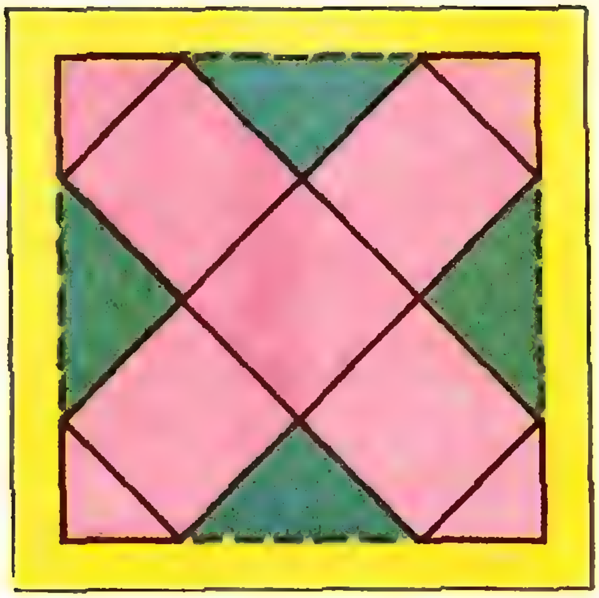


Рис. 2.

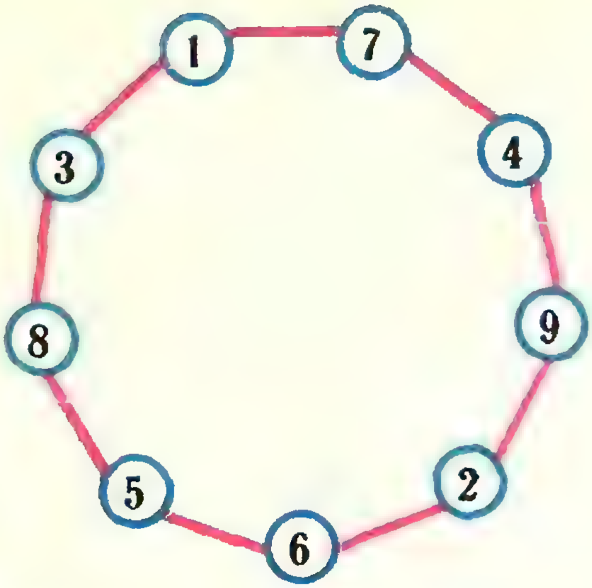


Рис. 3.

а) Точка *A* лежит на прямой *BC*, но вне отрезка *BC*. Расположим точку *M* на прямой *BC* так, чтобы отрезок *BC* лежал внутри отрезка *AM*. Тогда, очевидно, будут выполняться неравенства: $AM > BM$, $AM > CM$, что противоречит условию.

б) Точка *A* не лежит на прямой *BC*. Тогда можно построить треугольник *ABC* и описать около него окружность. Поместим точку *M* в центр этой окружности. Тогда $AM = BM$, $AM = CM$, что противоречит условию.

9. Ответ. Можно. Опишем, как это сделать.

На рисунке 2 закрашена розовым фигура, состоящая из пяти квадратиков 1×1 и четырех треугольников, получающихся от разрезания такого же квадратика по диагоналям. Эта фигура — выкройка куба с ребром 1. Это значит, что, согнув ее по начерченным линиям, можно получить такой куб. Вместе с четырьмя зелеными прилегающими треугольниками, ограниченными пунктиром, она образует квадрат со стороной $2\sqrt{2}$. Поскольку $2\sqrt{2} < 3$, то такую фигуру можно поместить внутри квадрата 3×3, что и сделано на чертеже. Сгибая теперь весь квадрат и как угодно приминая лишние (не розовые) части, мы обернем куб.

10. Ответ. Можно. Как это сделать, показано на рисунке 3.

На этом решение можно было бы и закончить, но мы объясним, как его получили, и попутно докажем, что ответ в этой задаче единственный. Постараемся наглядно зафиксировать на бумаге, какие цифры могут стоять рядом, а какие — нет. С этой целью составим изображенную справа таблицу. В этой таблице строки и

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		−	+	−	−	−	+	−	−
2	−		−	−	−	+	−	−	+
3	+	−		−	+	−	−	+	−
4	−	−	−		−	−	+	−	+
5	−	−	+	−		+	−	+	−
6	−	+	−	−	+		+	−	−
7	+	−	−	+	−	+		−	+
8	−	−	+	−	+	−	−		+
9	−	+	−	+	−	−	+	+	

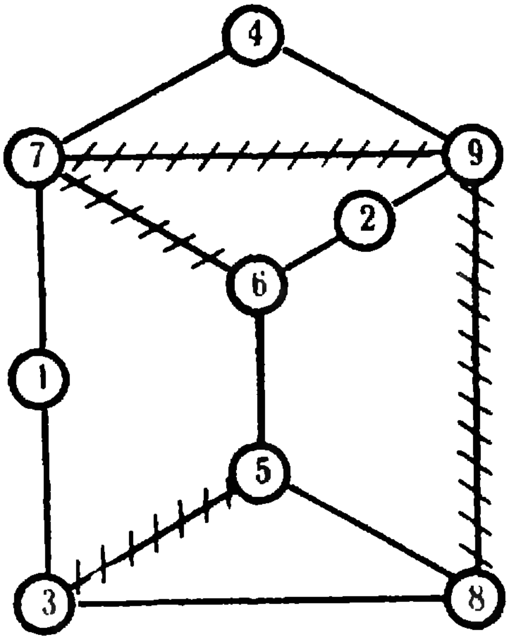


Рис. 4.

столбцы пронумерованы цифрами от 1 до 9. Если две цифры могут стоять рядом, то на пересечении строки и столбца с этими номерами стоит плюс, а если не могут, то минус. Можно поступить иначе. Нарисуем девять кружков и расставим в них цифры от 1 до 9. Соединим линией всякие два кружка, цифры в которых могут стоять рядом. А если две цифры не могут быть соседними, то мы их соединять не будем. Полученную схему перерисуем, чтобы по возможности «распутать» ее. Результат изображен на рисунке 4. Раз такой рисунок построен, вопрос можно сформулировать так: можно ли, идя только по линиям, обойти все кружки этой фигуры по одному разу и вернуться на прежнее место? Будем решать задачу, глядя на этот чертеж, хотя точно так же можно было бы пользоваться и таблицей.

Поскольку 4 связано только с 7 и 9, значит, 7 и 9 и есть ее соседи по расположению на окружности. Аналогично соседи 2—цифры 6 и 9. Значит, 2 и 4 — соседи 9, а 7 и 8 — заведомо не соседи 9. Значит, связи 9 с 7 и 8 можно зачеркнуть (что и сделано на рисунке). Аналогично 1 имеет соседями 3 и 7. Значит, соседи 7 — цифры 1 и 4, а связь 7 с 6 можно зачеркнуть. Теперь 8 связано только с 3 и 5, значит, связь между 3 и 5 можно зачеркнуть. Оставшиеся линии образуют замкнутый путь, который и составляет единственное (с точностью до направления обхода) решение.

11. Составим табличку:

А из Правдина?		*Г* из Правдина?	
Б из Правдина?		Матч происходил в Правдине?	
В из Правдина?		Выиграла команда Правдина?	

Решить задачу — значит заполнить пустые графы этой таблички словами «да» или «нет» так, чтобы не вступить в противоречие с условием. Точнее, надо найти все такие способы заполнения, так как их может быть больше одного. На худой конец можно перебрать все возможные способы заполнения (их всего 64) и для каждого проверить, противоречит он условию или нет. Но это, конечно, некрасивый способ решения. Будем решать иначе.

1) Из заявления *В* следует, что выиграла команда Правдина. Докажем это. Если *В* из Правдина, то сказанное им — правда, и выиграла команда Правдина. Если *В* из Лгунова, то сказанное им — неправда, и выиграла опять-таки команда Правдина.

2) Из заявления *Б* следует, что *Б* из Лгунова, так как его заявление заведомо неверно. Докажем это. Мы уже знаем, что выиграла команда Прав-

дина. Если Г из Правдина, то он не мог сказать, что их команда проиграла, так как это была бы ложь. Если Г из Лгунова, то он тоже не мог этого сказать, так как это была бы правда.

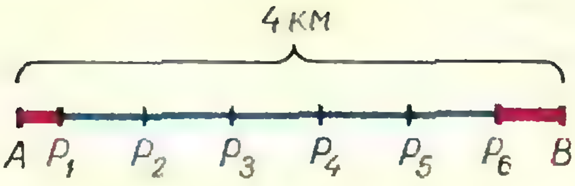


Рис. 5.

3) Из заявления Г следует, что А из Правдина. Докажем это. Если Г из Правдина, то А действительно с ним из одного города, то есть из Правдина. Если Г из Лгунова, то А с ним не из одного города, то есть А снова из Правдина.

4) Теперь легко ответить на все вопросы. Из последнего заявления А следует, что дело происходит в Правдине, В и Г — из Лгунова.

Ответ. А — из Правдина, Б, В, Г — из Лгунова, матч происходил в Правдине, выиграла команда Правдина.

12. Ясно, что автобусы обгоняют человека через равные промежутки времени. (Всякий такой промежуток равен $\frac{v_1 t}{v_1 - v_2}$, где t—интервал времени между автобусами, v_1 — скорость автобусов, v_2 — скорость человека. Впрочем, мы этой формулой пользоваться не будем.) Поэтому между теми моментами, когда его обгоняют автобусы, человек успевает пройти всякий раз одинаковое расстояние. Обозначим это расстояние через x.

На рисунке 5 отрезок AB, отмеченный фигурной скобкой, изображает те 4 *км*, которые человек прошел в первый раз. Отметим на нем те 6 точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, в которых его обогнали автобусы. Промежутков между ними 5, и длина каждого равна x. Остаются два куска пути по концам AP_1 и P_6B, которые человек прошел до того, как его обогнал первый автобус, и после того, как его обогнал последний автобус (на рисунке проведены красной линией). Длина каждого из этих отрезков меньше x. Докажем это. Допустим, например, что $P_6B \geqslant x$. Тогда на отрезке P_6B поместится еще одна точка P_7 такая, что $P_6P_7 = x$. В этой точке человека, конечно, тоже обгонит автобус, а всего на этих 4 *км* человека обгонит более шести автобусов, что противоречит условию. Тот факт, что $AP_1 < x$, доказывается аналогично. Учитывая все это, мы можем написать:

$$5x \leqslant 4 < 7x. \qquad (1)$$

Аналогично, поскольку на отрезке в 7 *км* расположатся 8 точек, отстоящих на x друг от друга, а концевые отрезки снова будут меньше x:

$$7x \leqslant 7 < 9x. \qquad (2)$$

Из (1) мы получаем, что $x \leqslant {}^4/_5$, а из (2) получаем, что $x > {}^7/_9$.

Теперь мы должны определить, сколько точек, отстоящих друг от друга на x *км*, можно расположить на отрезке в 17 *км*.

Поскольку $\frac{17}{4/5} = 21\frac{1}{4}$, а $\frac{17}{7/9} = 21\frac{6}{7}$, то $21\frac{1}{4} \leqslant \frac{17}{x} < 21\frac{6}{7}$ или

$$21\frac{1}{4}x \leqslant 17 < 21\frac{6}{7}x. \qquad (3)$$

Докажем, что на отрезке в 17 *км* человека обогнали 21 или 22 автобуса. Действительно, если человека обогнали 20 автобусов (или меньше), то промежутков длины x между ними будет 19 (или меньше), откуда $17 < 21x$, что противоречит (3). Если человека обогнали 23 автобуса (или больше), то $17 > 22x$, что тоже противоречит (3).

Ответ. 21 или 22 автобуса.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

СТРАННЫЙ МАЯТНИК

Н.А. МИНЦ

Обычный, хорошо знакомый вам математический маятник не меняет плоскости своих колебаний.

На этом свойстве маятника основана известная демонстрация вращения Земли — опыт Фуко. Маятник на длинном подвесе совершает колебания. Под ним размечен круг, напоминающий циферблат. Благодаря тому, что плоскость колебаний маятника относительно неподвижных звезд не меняется, а Земля вращается вокруг своей оси, с течением времени маятник проходит последовательно над всеми отметками круга. На полюсе за сутки круг под маятником совершит полный оборот. Впервые такой опыт был проведен французским физиком Л. Фуко в 1851 году под куполом Пантеона в Париже с маятником длиною 67 *м*.

Но всякий ли маятник обязательно сохраняет плоскость колебаний? Ведь нить подвеса позволяет ему колебаться в любой вертикальной плоскости.

Попробуйте сделать такой маятник, как показано на рисунке 1. Для этого возьмите нитку, сложите ее пополам, а к середине привяжите еще одну нитку. К другому концу этой второй нитки прикрепите ложку, ножницы или какой-нибудь другой предмет — и маятник готов. (Вертикальная нить подвеса должна быть достаточно длинной. По крайней мере не меньше, чем нить наклонного подвеса.)

Подвесьте маятник за оба конца сложенной пополам нитки на кнопках или гвоздиках (например, в дверной проем). Если теперь отклонить маятник от положения равновесия и затем отпустить, то вы увидите любопытную картину. Маятник будет двигаться по эллипсу, причем этот эллипс будет постоянно меняться, вытягиваясь то в одну, то в другую сторону. Почему это происходит?

У маятника с одной точкой подвеса (рис. 2) плоскость колебаний ничем не выделена. Каким бы ни было

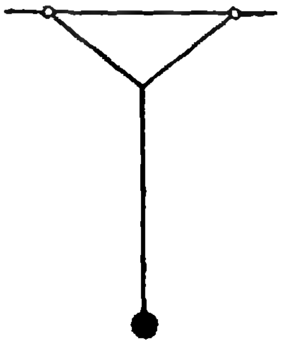


Рис. 1.

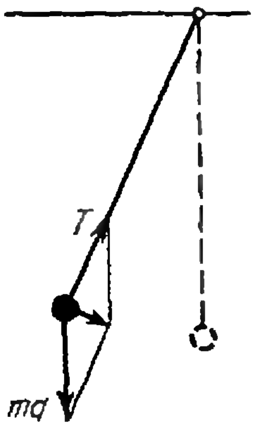


Рис. 2.

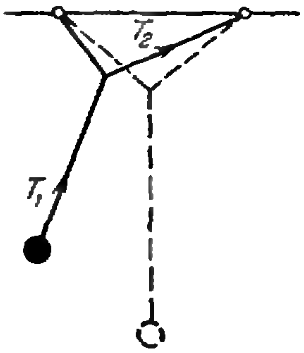


Рис. 3.

первоначальное отклонение маятника, все силы, действующие на него, лежат в одной плоскости. Нужно только, отпуская маятник, не толкнуть его вбок.

Действительно, проведем плоскость через первоначальное и отклоненное положения маятника. Очевидно, в этой плоскости будут лежать как сила тяжести mg, так и сила натяжения нити T. Следовательно, равнодействующая этих сил, которая, собственно, и заставляет маятник колебаться, при любом отклоненном положении маятника также лежит в той же плоскости. Это означает, что нет сил, которые могли бы вывести маятник из этой плоскости. Потому-то маятник и сохраняет плоскость своих колебаний.

Другое дело наш маятник. Здесь точками закрепления и линией отвеса строго фиксирована первоначальная плоскость. Поэтому с самого начала маятник отклонен так, что он не лежит в этой плоскости *). Сила натяжения (рис. 3) имеет составляющую, перпендикулярную первоначальной плоскости. Благодаря этой составляющей движение маятника выходит из первоначальной плоскости. При этом, поскольку сила натяжения не постоянна, меняется и ее перпендикулярная составляющая. Далее, отклоняясь в противоположную сторону, маятник натягивает другую из закрепленных нитей. Это приводит к появлению силы, действующей в другом направлении. При этом, как показывает опыт, и возникает движение по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

Кривые, которые описывает наш маятник, называются фигурами Лиссажу. Фигуры Лиссажу получаются при сложении двух взаимноперпендикулярных колебаний. Они могут быть довольно сложными, особенно при близких частотах продольных и поперечных колебаний. Если частоты одинаковы, траекторией движения будет эллипс. Фигура, показанная на рисунке 4, описывается маятником, уравнения движения которого выглядят следующим образом: $x=\sin 3t$, $y=\sin 5t$. Рисунок 5 соответствует колебаниям $x=\sin 3t$, $y=\sin 4t$.

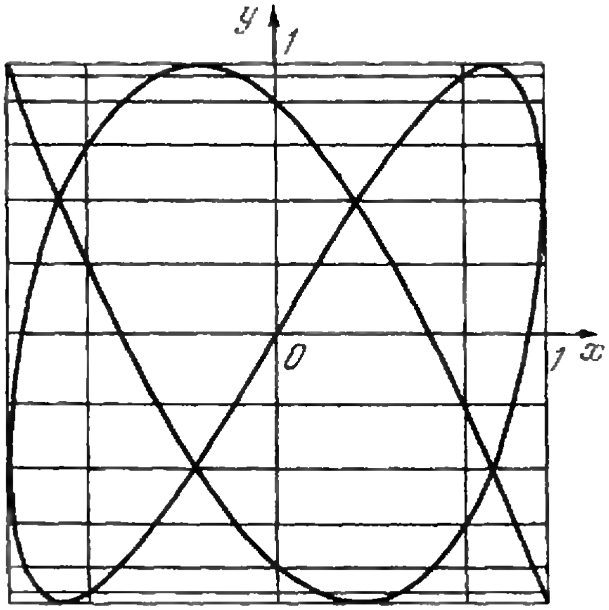


Рис. 4.

Соотношение частот можно варьировать, меняя отношение длин

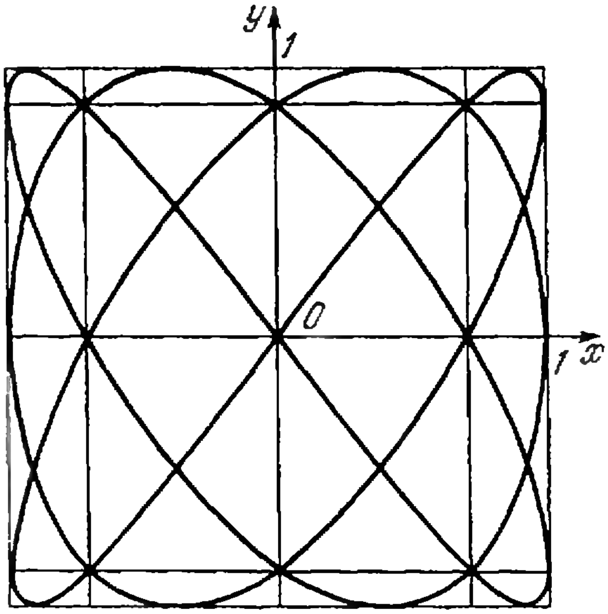


Рис. 5.

---

*) Конечно если отклонить маятник строго перпендикулярно плоскости подвеса, он будет совершать колебания в одной плоскости, перпендикулярной плоскости подвеса. Но практически всегда существуют отклонение от перпендикуляра и скорость, не лежащая в плоскости первоначального отклонения.

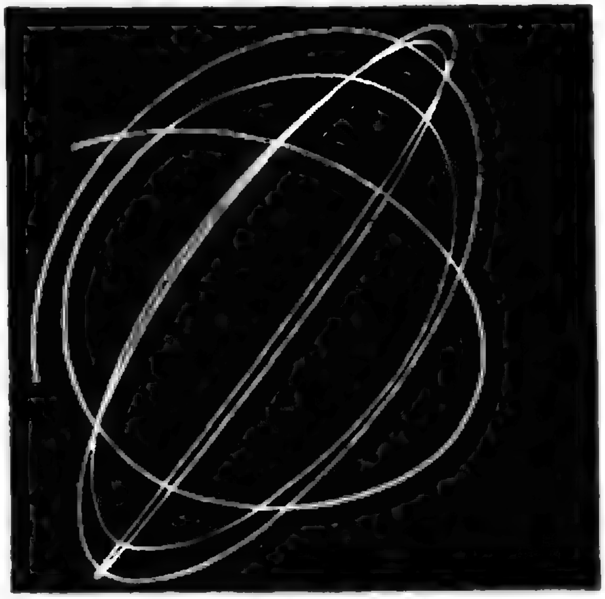


Рис. 6.

вертикальной и наклонной нитей подвеса. При этом вычислить частоты колебаний маятника довольно сложно, а вот увидеть фигуры, вычерчиваемые им, значительно проще.

Для того чтобы увидеть фигуры Лиссажу, можно к подвесу нашего маятника прикрепить ведерко с дырявым дном, наполненное песком, а на пол положить кусок картона, окрашенный в темный цвет. Тогда маятник «нарисует» отчетливую траекторию своего движения.

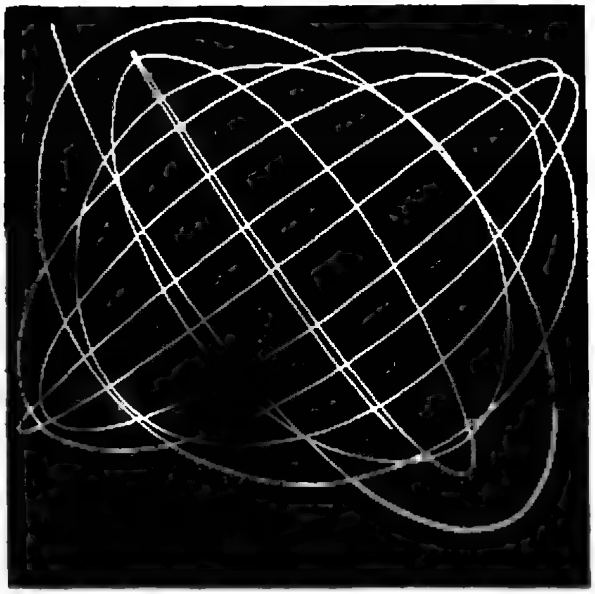


Рис. 7.

Можно получить фотографии траекторий движения маятника. Возьмите грузило или тяжелый маленький шарик и покрасьте его белой краской. Сделайте из темных ниток такой же подвес, как у маятника, изображенного на рисунке 1. Под маятник подложите лист черной матовой бумаги. Гладкая бумага может отсвечивать, а это будет мешать наблюдениям. Фотографировать надо сверху. Установите фотоаппарат так, чтобы плоскость объектива была горизонтальна. При достаточно большой выдержке на фотоснимках можно увидеть четкие траектории.

На рисунках 6 и 7 приведены фотографии траекторий, полученные таким способом. Видно, как маятник изменял направление колебаний. На фигуре рисунка 6 это изменение произошло более резко. Время экспозиции этих двух фотографий различно. Это видно хотя бы из того, что длина траекторий неодинакова.

Получившиеся кривые как бы вписаны в параллелограмм. На самом деле они должны быть вписаны в прямоугольник. То, что у нас не получился прямоугольник, объясняется просто: плоскость объектива была не строго горизонтальна.

В опытах с маятником следует учитывать, что более или менее правильная траектория получается только в том случае, когда нет сильных затуханий. Колебания маятника с малой массой груза и достаточно большим объемом будут быстро затухать. Такой маятник качнется несколько раз, быстро уменьшая амплитуду. Естественно, при движении с сильным затуханием увидеть и сфотографировать изменение направления колебаний маятника не удастся.

С фигурами Лиссажу приходится встречаться довольно часто в тех случаях, когда колебания взаимно перпендикулярны. Так, они неизбежно появляются при настройке осциллографа.

ЗАДАЧНИК Кванта

ЗАДАЧИ

М86. Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размера 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2. Вместо нее удалось достать плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

Л. Г. Лиманов

М87. Докажите, что если три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса (рис. 1).

М88. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

М. Ф. Безбородников

М89. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать такие три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. (Например, на рисунке 2, где многоугольник обведен черной линией, три красные прямые удовлетворяют требуемому условию, а три синие — нет.)

И. М. Яглом

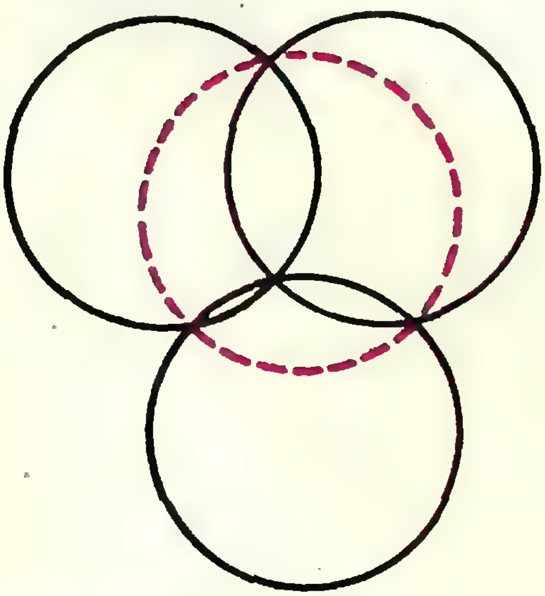


Рис. 1.

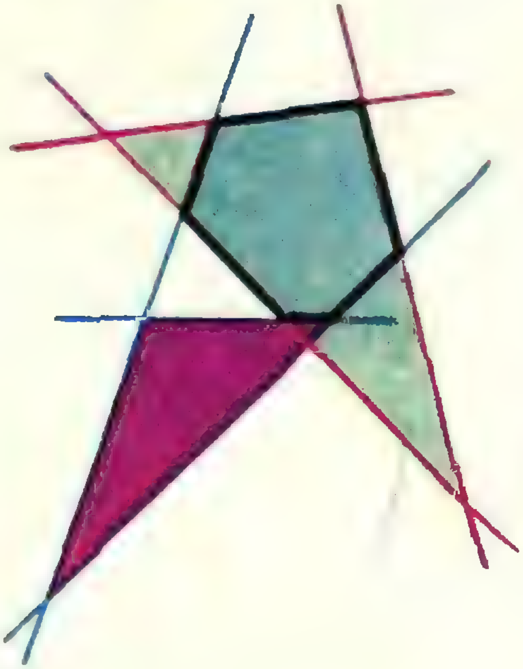


Рис. 2.

М90. Докажите, что если $x_1<x_2<x_3<\ldots$ — натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\ldots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}.$$

Г. И. Натансон

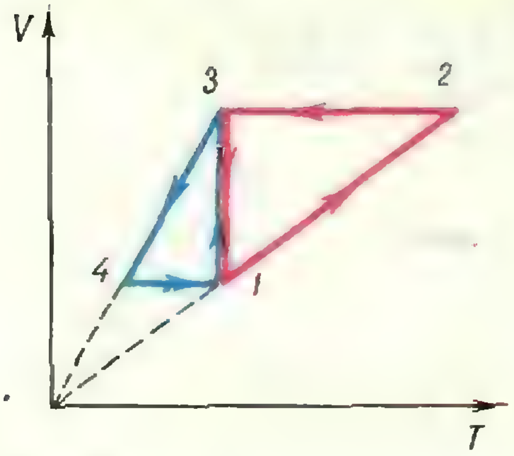


Рис. 3.

Ф98. Какую максимальную разность потенциалов можно получить, имея в своем распоряжении источник с э. д. с. E и n одинаковых конденсаторов с емкостью c каждый?

Л. Г. Асламазов

Ф99. На рисунке 3 показаны $V—T$ диаграммы для двух круговых процессов. При каком из них газ совершает бóльшую работу: при процессе 1→2→3→1 или при процессе 1→3→4→1?

И. Ш. Слободецкий

Ф100. На высоте 200 *км* плотность атмосферы равна $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ *кг/м*^{3}. Оцените силу сопротивления, испытываемого спутником с поперечным сечением 0,5 *м*^{2} и массой 10 *кг*, летящим на этой высоте.

Ф101. К висящей очень легкой пружине с жесткостью k подвешен шарик. Вначале пружина не растянута. Затем шарик отпускают. Какой максимальной скорости достигнет шарик при своем движении? Масса шарика m.

С. А. Беляев

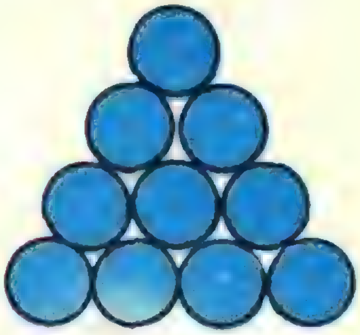
Ф102. В герметически закрытом сосуде смешали поровну кислород и гелий. Затем в стенке сосуда сделали небольшое отверстие. Каков состав молекулярного пучка, выходящего из него?

И. Ш. Аввербух

В этом номере мы помещаем несколько задач из журнала «Scientific American» из раздела «Математические игры». Бессменным редактором «Математических игр» является Мартин Гарднер. Задача на четвертой странице обложки тоже взята из этого раздела. (Перевод выполнен И. Н. Мороз).

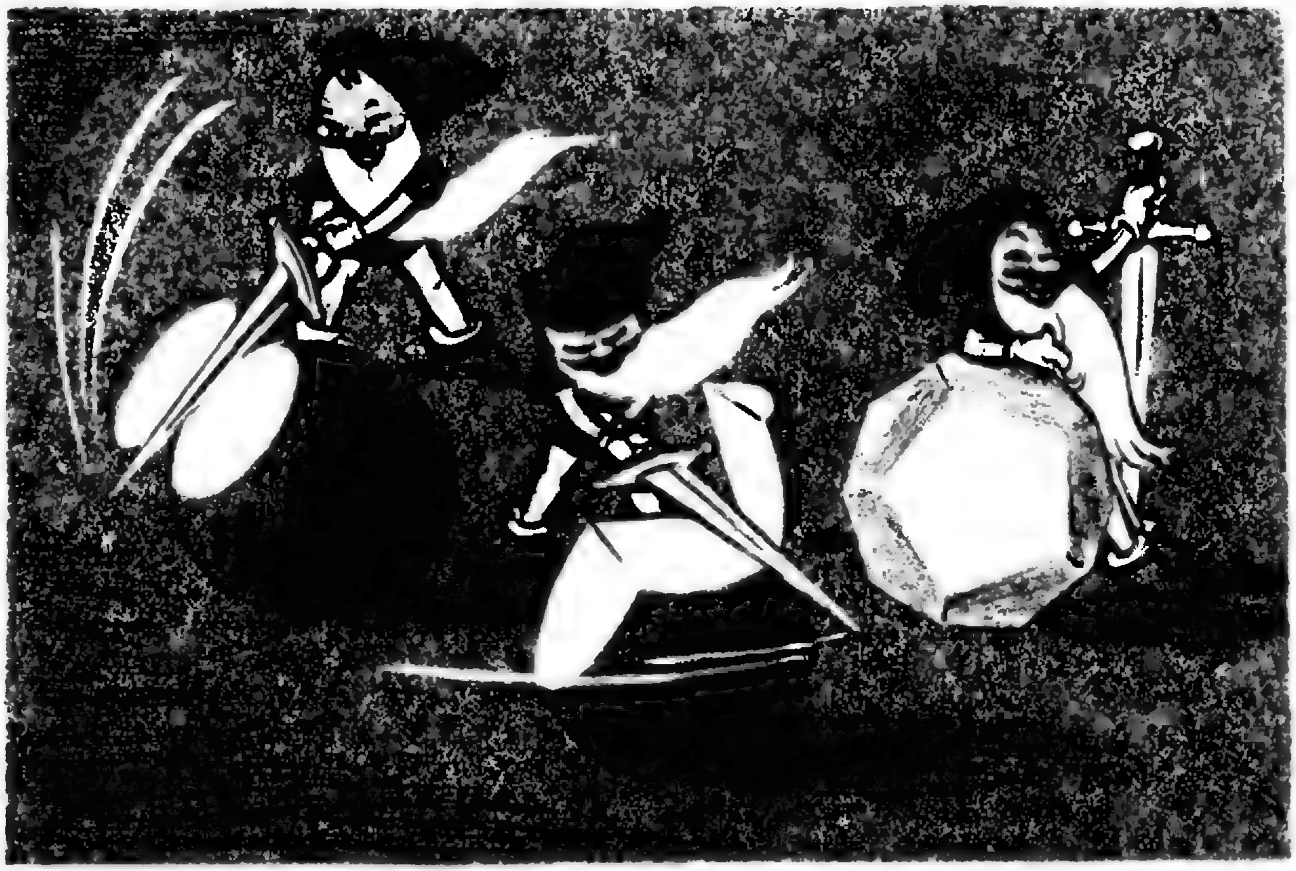
УЛОЖИТЕ МОНЕТЫ

Эта небольшая задача придумана Кобоном Фуджимура из Японии. Уложите десять монет так, как показано на рисунке. Какое наименьшее число монет вы должны убрать, чтобы не нашлось ни одного равностороннего треугольника (любых размеров) с вершинами в центрах оставшихся монет?



СТРАННОЕ ЧИСЛО

Найдите такое десятизначное число, в котором его первая цифра обозначает общее количество нулей в числе, вторая — общее количество единиц и так далее до последней цифры, обозначающей количество девяток в числе (разумеется, нуль — цифра). Решение только одно.



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М34—М38.

М34

Доказать, что если натуральное число делится на 10 101 010 101, то в его десятичной записи по крайней мере шесть цифр отличны от нуля.

Задача решается очень легко, если число A, делящееся на 10 101 010 101, имеет не более 12 цифр; тогда оно обязательно имеет вид *абабабабабаб*, и задача решена.

Остается придумать какой-нибудь способ свести задачу к этому случаю.

Число 10 101 010 101 мы обозначим через M. Докажем, что если число A делится на M, то найдется двенадцати- (или менее) значное число C, также делящееся на M и имеющее не больше ненулевых цифр, чем A.

Лемма. Если A делится на M и имеет больше 12 цифр (считая нули), то найдется число B, также делящееся на M, меньшее чем A и имеющее не больше ненулевых цифр, чем A.

Докажем это. Пусть $A=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$; вычеркнем его первую цифру a_1 и прибавим ее же на 12 разрядов ниже, например:

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,123\,456 \rightarrow 23\,456\,789\,123\,456 \\ +\quad\quad\quad\quad 1 \\ \hline 23\,456\,789\,123\,556 \end{array}$$

Полученное число будет, безусловно, меньше исходного: легко проверить, что мы просто вычли из числа A число $a_1\cdot(10^{n-1}-10^{n-13})$. В скоб-

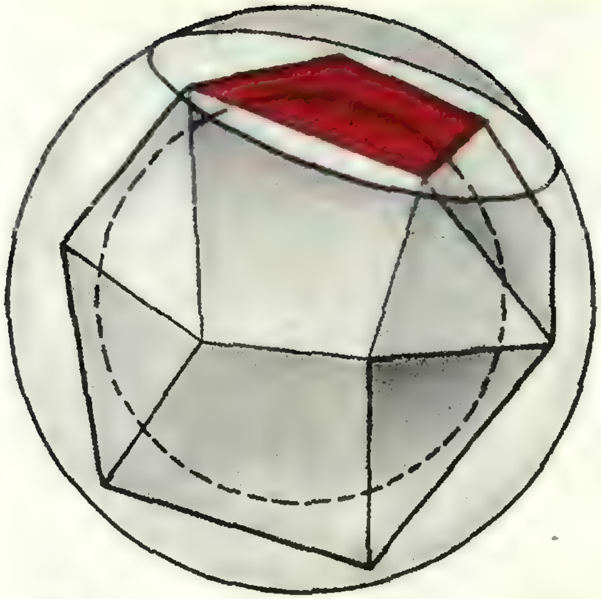


Рис. 1.

ках стоит произведение $10^{n-13}\times$ $\times(10^{12}-1)$; второй сомножитель, очевидно, делится на A (это число из 12 девяток), так что разность делится на A. Остается заметить, что в получившемся числе значащих (не нулевых) цифр не больше, чем в исходном. В нашем примере их количество даже уменьшилось на единицу; этого могло, впрочем, не случиться, если бы на 13-м месте стоял 0 или если бы там стояла достаточно большая цифра, а на предыдущем месте 0, как в примере

$$888\,888\,888\,880\,\dot{4}21 \rightarrow \begin{array}{r} 88\,888\,888\,880\,421\\ +\qquad 8\\ \hline 88\,888\,888\,881\,221 \end{array}$$

(мы не рассмотрели еще случай, когда перенос происходит и в 12-м разряде, но легко видеть, что тогда число значащих цифр даже уменьшится). Лемма доказана.

Теперь если A делится на M, вычтем из A его первую цифру, умноженную на $10^{n-13}\cdot(10^{12}-1)$. С полученным числом проделаем ту же операцию и будем поступать так до тех пор, пока не доберемся до 12-значного числа. Так как в нем не меньше шести значащих цифр, то и в A не меньше шести значащих цифр.

Большинство решавших пытались рассматривать частное от деления A на M; но решить ее этим способом очень трудно, поскольку при обратном умножении этого частного на 10 101 010 101 его цифры «склеиваются» друг с другом, может произойти много переносов единиц в разрядах, и разобраться в том, что получится, почти невозможно. Идея решения — в том, чтобы рассматривать эти переносы по одному.

А. К. Толпыго

M35

Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

Первое решение. Предположим противное, то есть, что расстояние между любыми двумя точками поверхности нашего 19-гранника не больше 21. *Тогда* этот многогранник лежит внутри сферы радиуса 11, концентричной сфере радиуса 10, а каждая его грань лежит между сферами. *Поэтому* площадь каждой грани не слишком велика, а именно, не превосходит площади показанного на рисунке 1 круга, радиус которого равен $\sqrt{21}$. В нашем многограннике 19 граней, поэтому площадь S его поверхности не превосходит $19\left[\pi\left(\sqrt{21}\right)^2\right] = \pi(20^2-1^2) = 399\pi$. Но многогранник описан около сферы радиуса 10. *Отсюда* площадь его поверхности больше площади поверхности этой сферы $4\pi(10)^2$ *). Итак, с одной стороны, $S < 399\pi$, с другой стороны, $S > 400\pi$. Полученное противоречие и решает задачу. (Аналогичное решение прислал нам *Д. Григорьев* из Ленинграда.)

В этом (нестрогом) решении мы пропустили доказательства трех утверждений, которые начинаются с трех выделенных выше курсивом слов: *тогда, поэтому, отсюда*. Мы оставляем читателю эти простые доказательства, но хотим предупредить, что хотя третье утверждение легко доказывается для выпуклого многогранника с помощью сравнения его объема с объемом сферы *), тем не менее интуитивно ясное и правильное утверждение о том, что наш многогранник выпуклый, трудно доказать строго, так как само строгое определение многогранника весьма сложно. (Загляните, например, в книгу И. Лакатоса «Доказательства и опровержения», М., «Наука», 1967).

---

*) Напомним, что для шара радиуса R объем равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, площадь сегментной поверхности с высотой h равна $2\pi Rh$ и, в частности, площадь всей сферы равна $4\pi R^2$.

Второе решение. Поставим более общий вопрос: какое наименьшее число граней может иметь многогранник, описанный около сферы радиуса r и целиком лежащий в концентрической с ней сфере радиуса $R>r$. (Вот житейская ситуация, которая подсказала автору эту задачу: каким наименьшим числом прямолинейных взмахов ножа можно срезать верхний слой кожуры апельсина, не срезав при этом ни одного куска сердцевины? Очевидно, что после срезания всего верхнего слоя кожуры остаток будет многогранником, так как на его поверхности не будет ни одного закругленного участка, так что этот вопрос эквивалентен предыдущему.)

Мы не знаем точного ответа на этот более общий вопрос, но докажем для числа граней некоторое неравенство, которое при $r=10$, $R=11$ показывает, что $N>22$. Тем самым мы докажем, что если в условии задачи М35 вместо 19-гранника взять 22-гранник, то утверждение задачи по-прежнему останется справедливым.

Итак, пусть N-гранник описан около сферы радиуса r и целиком лежит внутри сферы радиуса R. Рассмотрим какую-нибудь его грань.

Проходящая через нее плоскость отрезает от сферы шапочку (сегментную поверхность) высоты $R-r$. Ясно, что если построить шапочки для всех граней нашего многогранника, то их объединение покроет всю внешнюю сферу. Каждая из N шапочек есть сегментная поверхность высоты $R-r$, и, следовательно, имеет площадь $2\pi R\,(R-r)$. Сумма площадей всех шапочек больше площади сферы. Поэтому $N\cdot 2\pi R\,(R-r)>4\pi R^2$, отсюда $N>\frac{2R}{R-r}$, в частности, при $R=11$, $r=10$ получаем $N>22$.

Интересно, что по любому набору шапочек, целиком покрывающих внешнюю сферу, можно построить многогранник, описанный около внутренней сферы. (Докажите!) Поэтому наш вопрос про минимальное число граней полностью эквивалентен следующему вопросу. Каково минимальное число $N=N(h)$ шапочек высоты h, целиком покрывающих сферу радиуса 1? (В задаче М35 $h=\frac{1}{11}$.)

Очевидно, что $N(h)>\frac{2}{h}$, но это неравенство отражает просто тот факт, что сумма площадей шапочек больше площади сферы, в то время как интуитивно ясно, что при $h<1$ шапочки должны довольно сильно перекрываться. И действительно, можно доказать, что при достаточно малых h $N(h)>1{,}2\frac{2}{h}$. Попробуйте сами доказать, например, что при $h<1$

$$N(h)>1{,}001\frac{2}{h}.$$

(С решениями этой задачи и других похожих задач можно познакомиться по книге Л. Ф. Тота. «Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве». М., Физматгиз, 1958).

А. Г. Кушниренко

М36

Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки

Предположим, что такое расположение семи точек и семи прямых су-

---

*) Действительно, объем многоугольника равен $\frac{R\cdot S}{3}$, где R — радиус вписанной сферы, а S — площадь его поверхности.

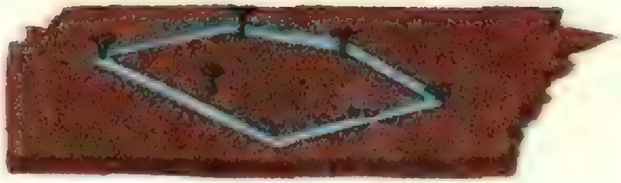


Рис. 2. Выпуклой оболочкой множества из конечного числа точек является выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из этих точек (или отрезок, если все точки лежат на одной прямой).

ществует. Прежде всего докажем, что *каждые две из данных точек лежат на одной из данных прямых*. Действительно, если A — одна из этих точек, то через A проходят три прямые, и на каждой из них лежит по две из данных точек (не считая A); тем самым A и любая из шести точек, отличных от A, лежат на одной из данных прямых. Точно так же доказывается, что *каждые две из данных прямых пересекаются в одной из данных точек*: если a — одна из прямых, то через каждую из трех лежащих на ней точек проходит по две прямые (не считая a), и поэтому каждая из этих прямых пересекается с a в одной из данных точек.

Рассмотрим теперь выпуклую оболочку множества из семи наших точек — наименьшую выпуклую фигуру, содержащую эти семь точек. Это будет некоторый выпуклый n-угольник, где $n \leqslant 7$ (его можно получить так: вбить в данные семь точек гвозди и затем натянуть резиновую нитку, охватывающую все эти гвозди; нитка натянется по контуру многоугольника с вершинами в некоторых n из данных точек, а все остальные $(7-n)$ точек будут лежать внутри или на границе этого многоугольника; см. рис. 2). Ясно, что случай $n \geqslant 4$ невозможен — ведь на каждой стороне n-угольника должна лежать еще одна третья точка, кроме вершин, а всего точек семь. Случай $n=3$, когда выпуклой оболочкой является некоторый треугольник ABC, тоже невозможен. Действительно, если E и F — точки (из числа данных семи), которые лежат на сторонах AB и BC, то EF и AC — две из данных прямых — должны пересекаться в одной из данных семи точек, а они будут пересекаться на продолжении стороны AC, то есть вне треугольника ABC. Получили противоречие.

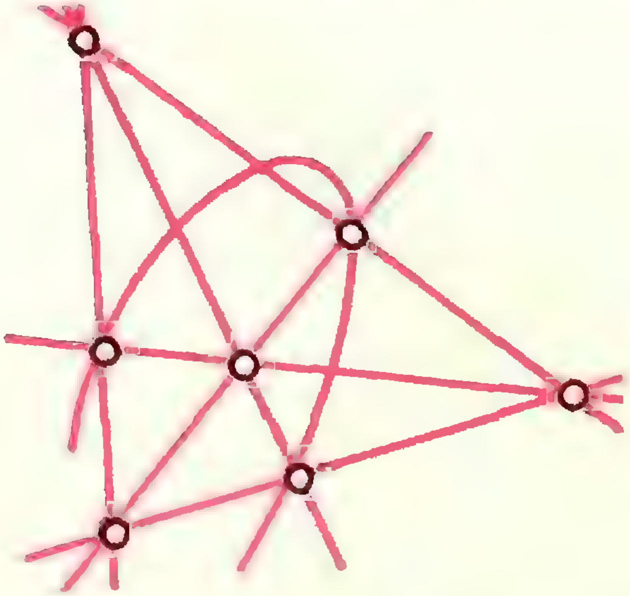


Рис. 3. Эта конфигурация почти полностью удовлетворяет требованиям задачи М36, только одну «прямую» пришлось изогнуть.

Рисунок 3 поможет найти ошибку тем, кто прислал нам неверное решение этой задачи.

М37

В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате (стороны которого идут по линиям сетки) по модулю не превосходит единицы. Докажите, что тогда существует такое число c, что сумма чисел в любом прямоугольнике (стороны которого идут по линиям сетки) не больше c; другими словами, что суммы чисел во всех прямоугольниках ограничены. Докажите, что это верно для $c=4$. Может быть, вам удастся улучшить эту оценку (например, доказать, что наше утверждение верно для $c=3$ или даже для $c=2$).

Решение, которое мы приводим, близко к предложенному *А. Климовым* (Москва).

Докажем, что c равное 4 подходит.

Предположим, что в некотором прямоугольнике со сторонами a и b сумма по модулю равна $4+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ $(a < b)$. Построим четыре квадрата, у каждого из которых три стороны идут по некоторым трем сторонам этого прямоугольника $a\times b$; тогда прямые, на которых лежат четвертые стороны этих квадратов, образуют новый прямоугольник со сторонами $2b-a$ и $|2a-b|$ (см. рис. 4 и 5; случай $b=2a$, разумеется, невозможен). Докажем, что в этом новом прямоугольнике сумма чисел по модулю не меньше $4+3\varepsilon$.

Можно считать, что $s_4+s_5+s_6=4+\varepsilon$ (если эта сумма равна $-(4+\varepsilon)$, то заменим знаки у всех чисел на противоположные).

Рассмотрим сначала случай $b<2a$. Тогда

$$s_5=(s_4+s_5)+(s_5+s_6)-(s_4+s_5+s_6)\leqslant 1+1-4-\varepsilon=-2-\varepsilon,$$

$$s_2+s_8=(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)+(s_4+s_5+s_6+s_7+s_8+s_9)-s_1-s_3-s_7-s_9-2(s_4+s_5+s_6)\leqslant 1+1+1+1+1+1-2(4+\varepsilon)=-2-2\varepsilon,$$

откуда $s_2+s_5+s_8\leqslant -4-3\varepsilon$.

Аналогично, если $b>2a$, то

$$(s_5=-s_4-s_6+(s_4+s_5+s_6)\geqslant -1-1+4+\varepsilon\geqslant 2+\varepsilon,$$

$$s_2+s_8=(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_7+s_8)+(s_8+s_9)-(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6)-(s_4+s_5+s_6+s_7+s_8+s_9)+2(s_4+s_5+s_6)\geqslant 2+2\varepsilon,$$

$$s_2+s_5+s_8\geqslant 4+3\varepsilon.$$

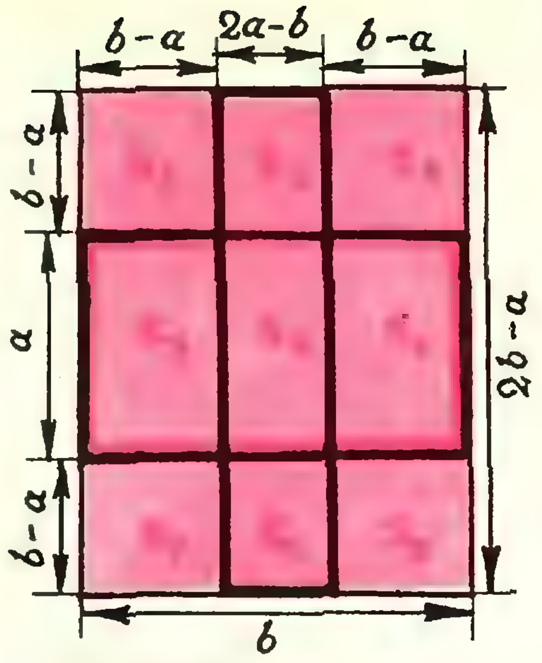


Рис. 4. $2a>b$.

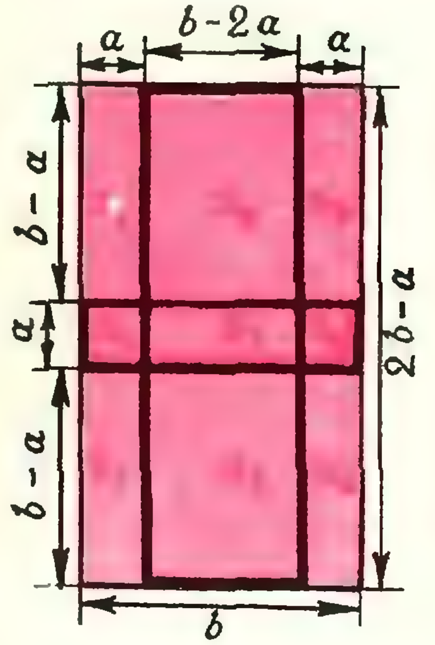


Рис. 5. $2a<b$.
Первоначальный прямоугольник $a\times b$ обведен красной линией, а новый $2a-b\times(2b-a)$ — черной.

Итак, мы доказали, что если в прямоугольнике $a_1\times b_1$ сумма чисел по модулю больше $4+\varepsilon$, то в новом прямоугольнике $a_2\times b_2$, где $a_2=|2a_1-b_1|$, $b_2=2b_1-a_1$, сумма чисел по модулю больше $4+3\varepsilon$. Для прямоугольника $a_2\times b_2$ мы можем построить точно тем же способом новый прямоугольник $a_3\times b_3$, в котором сумма чисел будет больше $4+3\cdot 3\varepsilon=4+9\varepsilon$, и так далее — целую последовательность прямоугольников $a_1\times b_1$, $a_2\times b_2$, $a_3\times b_3,\ldots$, $a_n\times b_n,\ldots$ такую, что в прямоугольнике $a_n\times b_n$ сумма чисел по модулю больше $4+3^{n-1}\varepsilon$. Докажем, что в этой последовательности все прямоугольники, начиная с некоторого, будут относиться ко второму типу, то есть для них $b_n>2a_n$. Действительно, во-первых, легко проверить, что если

$$\frac{a_n}{b_n}<\frac{1}{2},$$

то и

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{b_n-2a_n}{2b_n-a_n}<\frac{1}{2}.$$

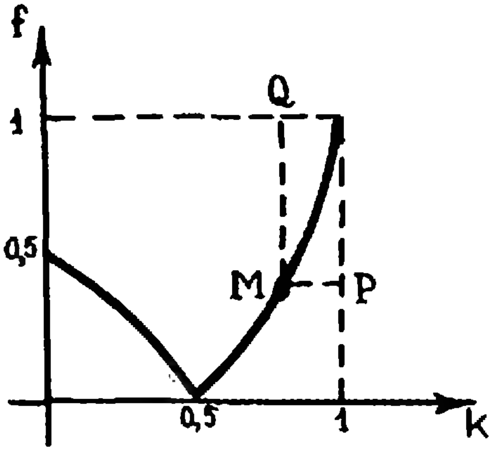
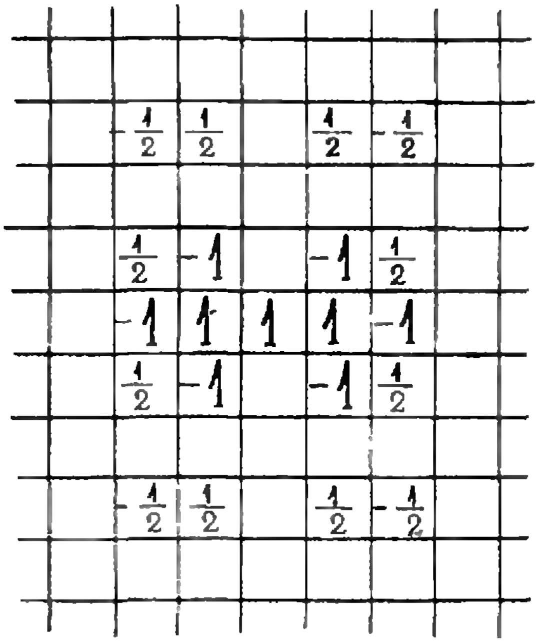


Рис. 6. Пусть $k_n=\frac{a_n}{b_n}$. Тогда $k_{n+1}=f(k_n)$, где $f(k)=\frac{|1-2k|}{2-k}$. Здесь изображен график этой функции на отрезке $0\leqslant k\leqslant 1$. При решении задачи мы пользуемся тем, что для любой точки M правой половины графика $MQ/MP>2$; если $0\leqslant k\leqslant {}^1/_2$, то $0\leqslant f(k)\leqslant {}^1/_2$, причем $f(f(k))=k$, то есть функция f на отрезке $0\leqslant k<{}^1/_2$ совпадает с обратной к ней функцией, и график ее симметричен относительно биссектрисы угла между осями координат.



	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{2}$	-1		-1	$\frac{1}{2}$	
	-1	1	1	1	-1	
	$\frac{1}{2}$	-1		-1	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	

Рис. 7. Во всех незаполненных клетках стоят нули.

Во-вторых, если $\frac{a_n}{b_n}>\frac{1}{2}$, то

$$\frac{1-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{1-\frac{a_n}{b_n}}=\frac{1-\frac{2a_n-b_n}{2b_n-a_n}}{1-\frac{a_n}{b_n}}=$$

$$=\frac{3b_n}{2b_n-a_n}>\frac{3b_n}{2b_n-\frac{b_n}{2}}=2;$$

таким образом, величина $1-\frac{a_n}{b_n}$ при переходе от n к $n+1$ увеличивается не менее чем в два раза до тех пор, пока мы не придем к прямоугольнику с $\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{1}{2}$. Поэтому, каким бы малым ни было $1-\frac{a_1}{b_1}$, всегда после нескольких — не более чем $-1-\log_2\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)$ — операций мы придем к прямоугольнику «второго типа», и дальше в нашей последовательности будут встречаться только такие прямоугольники.

Поэтому мы можем считать, что уже $\frac{a_1}{b_1}<\frac{1}{2}$.

При этом

$$a_3=b_2-2a_2=$$

$$=(2b_1-a_1)-2(b_1-2a_1)=3a_1,$$

$$b_3=2b_2-a_2=$$

$$=2(2b_1-a_1)-(b_1-2a_1)=3b_1.$$

Следовательно, вообще $a_{2k+1}=3^ka_1$ и $b_{2k+1}=3^kb_1$, причем сумма чисел в этом прямоугольнике $3^ka_1\times 3^kb_1$ больше $4+9^k\varepsilon$, то есть, выбрав k достаточно большим, мы можем сделать ее сколь угодно большой. Теперь уже нетрудно получить противоречие: ясно, что любой прямоугольник $Na_1\times Nb_1$, где a_1, b_1 и N — целые числа, можно разбить на a_1b_1 квадратов (со стороной N), и поэтому сумма чисел в нем не может превосходить по модулю числа a_1b_1.

Рисунок 6 поясняет вторую половину доказательства. На рисунке 7 изображен пример, для которого сумма чисел в некотором прямоугольнике равна трем. Таким образом, для $c=2$ утверждение задачи неверно. Весьма правдоподобно, что точная оценка $c=4$, но примеров, показывающих, что $c>3$, мы не знаем.

Н. Б. Васильев

М38

Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию (то есть $\frac{AK}{AL}=\frac{AL}{AM}$). Найдите острые углы треугольника ABC.

Нетрудно доказать, что $AKDM$ — прямоугольник и L — его центр (рис. 8). Опустим перпендикуляр AP на KM.

Тогда

$$AL^2=AK\cdot AM=KM\cdot AP=2AL\cdot AP,$$

$$AL=2AP, \measuredangle PLA=30^\circ,$$

и поскольку $AL=KL=ML$, отсюда следует, что острые углы треугольника AKM равны 15° и 75°. Такие же острые углы имеет и треугольник ABC: $\measuredangle C=\measuredangle BAD=\measuredangle AKM$.

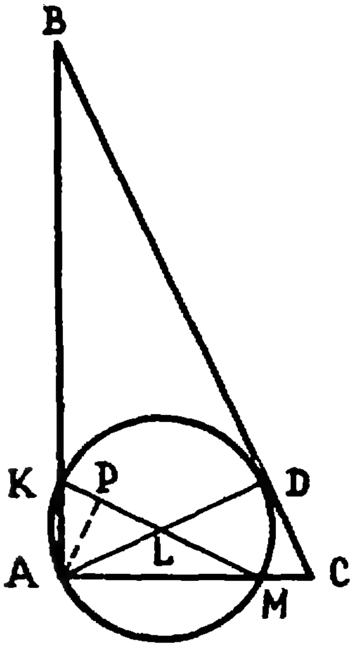


Рис. 8.

Такое решение прислали *С. Котанов* из Тбилиси и *В. Кривицкий* из д. Клетное Минской обл.

Л. М. Лоповок

В этом номере мы публикуем решения задач Ф52—Ф58

Ф52

Мяч брошен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения?

Кинетическая энергия мяча на любой высоте при подъеме больше, чем при спуске мяча. Действительно, если бы не было сопротивления воздуха, то эти энергии были бы равны. Из-за сопротивления воздуха при спуске кинетическая энергия мяча меньше, чем при подъеме, на величину работы, затраченной на преодоление сопротивления воздуха. Это означает, что на любой высоте скорость мяча при подъеме больше, чем при спуске. Больше, очевидно, и средняя скорость движения мяча. Поэтому время подъема мяча меньше времени падения.

Ф53

В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 и толщинами слоев h_1 и h_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю. Какова плотность материала, из которого сделано тело?

Воспользуемся тем, что потенциальная энергия, которой обладает тело на поверхности верхней жидкости, тратится при движении тела на преодоление сопротивления. Поэтому

$$mg\,(h_1+h_2)=A_1+A_2, \qquad (*)$$

где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A_1 — работа сил сопротивления в верхней жидкости и A_2 — работа сил сопротивления при движении тела в нижней жидкости. Так как тело обтекаемо, сила сопротивления — это архимедова выталкивающая сила: $F_1=\rho_1 Vg$ в верхней жидкости и $F_2=\rho_2 Vg$ в нижней (V — объем тела). Поэтому

$$A_1=\rho_1 Vgh_1 \text{ и } A_2=\rho_2 Vgh_2.$$

Подставляя эти выражения для A_1 и A_2 в уравнение (*) и учитывая что $m=V\cdot\rho$ (ρ — плотность тела), получим $\rho\,(h_1+h_2)=\rho_1 h_1+\rho_2 h_2$.

Отсюда

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}.$$

Правильное решение прислали *В. Калиничев* из Москвы, *Ю. Полонский* из Зеленодольска ТАССР и другие читатели.

Однако большинство читателей решило задачу более сложным способом.

На тело, движущееся в жидкости, действуют две силы: сила тяжести, равная $mg = \rho V g$, и архимедова выталкивающая сила (равная $F_1 = \rho_1 V g$, когда тело движется в жидкости с плотностью ρ_1, и $F_2 = \rho_2 V g$, когда оно движется в жидкости с плотностью ρ_2). Поскольку тело обтекаемо, силы, действующие на него во время движения в каждой из жидкостей, не меняются. Следовательно, тело движется равноускоренно. Запишем уравнения движения тела. В верхней жидкости: $mg - F_1 = ma_1$ (ускорение направлено вниз), в нижней жидкости: $F_2 - mg = ma_2$ (ускорение направлено вверх). Из этих уравнений найдем, что в жидкости с плотностью ρ_1 тело движется с ускорением $a_1 = g\frac{\rho-\rho_1}{\rho}$, а в жидкости с плотностью ρ_2 — с ускорением $a_2 = g\frac{\rho_2-\rho}{\rho}$.

Пройдя первую жидкость, тело приобретет скорость $V_0 = a_1 t_1$, где t_1 — время движения. Это время можно найти из кинематического уравнения $h_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$. Поэтому $V_0 = \sqrt{2a_1 h_1}$. С такой скоростью тело начнет двигаться в нижней жидкости. Так как скорость тела в конце движения должна стать равной нулю, то $V_0 - at_2 = 0$, где t_2 — время движения тела во второй жидкости. Отсюда $t_2 = \frac{V_0}{a_2}$. За это время тело пройдет во второй жидкости расстояние h_2. Поэтому $h_2 = V_0 t_2 - \frac{a_2 t_2^2}{2}$. Подставляя в последнее уравнение выражения для V_0, a_2 и t_2, получим

$$h_2 = \frac{V_0^2}{a_2} - \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a_2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{a_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2}.$$

Отсюда

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho}.$$

Решая последнее уравнение, найдем

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}.$$

Ф54

Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рисунке 9? Сопротивление амперметра очень мало.

Найдем вначале ток, идущий через источник. Для этого нам нужно найти сопротивление всей цепи. Сопротивление амперметра пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением всей цепи. Будем его считать равным нулю. Это позволяет перерисовать нашу схему так, как показано на рисунке 10. После этого можно найти сопротивление всей цепи.

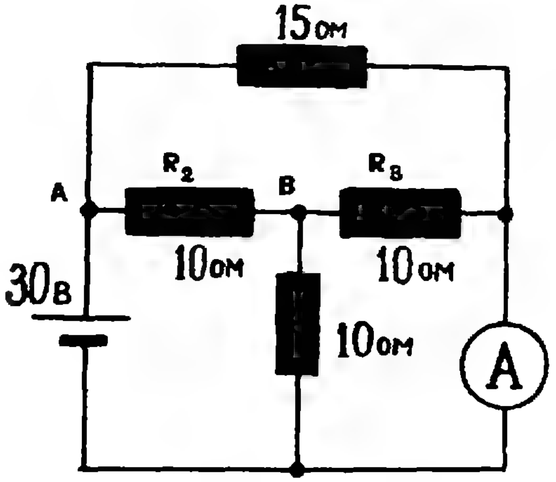


Рис. 9.

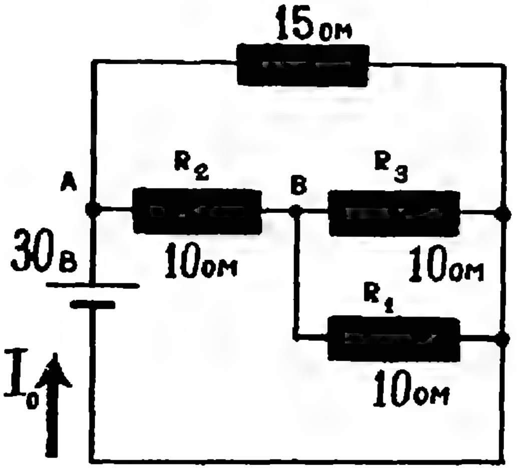


Рис. 10.

Оно равно 7,5 *ом*. Поэтому через источник идет ток $I_0=\frac{30\ в}{7{,}5\ ом}=4\ а$.

Ток, идущий через источник, складывается из тока, идущего через амперметр, и тока I_1, идущего через сопротивление R_1. Найдем ток I_1.

В точке A ток I_0 делится поровну между верхней и нижней ветвями цепи. Поэтому через сопротивление R_2 идет ток I_2, равный 2*а*. В точке B этот ток опять делится поровну между одинаковыми сопротивлениями R_1 и R_3. Поэтому через сопротивление R_1 идет ток 1 *а*. Теперь можно найти ток, идущий через амперметр. Он равен $I_0-I_1=3а$.

Ф55

Оцените, на какую высоту H поднимется стрела, пущенная из детского лука вертикально вверх. Масса стрелы $m=20$ г, длина тетивы $AB=1$ м. Тетиву оттягивают на $h_0=5$ см. Натяжение тетивы считать постоянным и равным 250 н.

Энергия, приобретаемая стрелой при выстреле, равна работе силы, действующей на стрелу со стороны тетивы. Эта сила, очевидно, равна равнодействующей F сил натяжения тетивы T (рис. 11). Если угол, образуемый тетивой в точках A и B с линией AB, обозначить α, то нетрудно найти, что $F=2T\sin\alpha$. Итак, сила, действующая на стрелу, зависит от того, насколько оттянута тетива. Так как тетиву оттягивают на расстояние, малое по сравнению с ее длиной, то угол α мал, то есть $\sin\alpha\approx \operatorname{tg}\alpha\approx\alpha$. Поэтому $F=2T\alpha$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{\frac{AB}{2}}$ (h — высота прогиба тетивы), то

$$F=4T\,\frac{h}{AB}.$$

Итак, сила, действующая на стрелу, пропорциональна h (рис. 12).

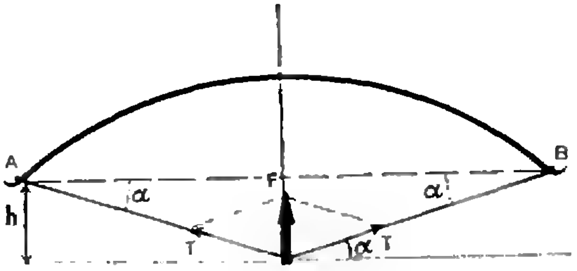


Рис. 11.

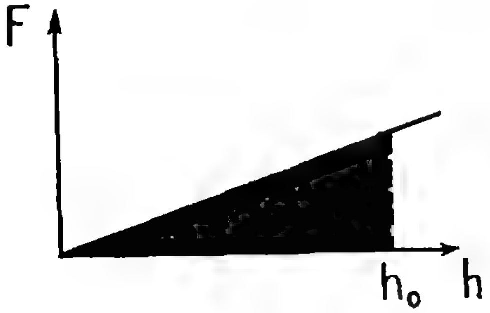


Рис. 12.

Нетрудно найти работу этой силы. Она равна площади фигуры между графиком зависимости силы от высоты прогиба и осью абсцисс*):

$$A=2T\frac{h_0^2}{AB}.$$

Такую энергию приобретет стрела при выстреле. Эта энергия должна быть равна потенциальной энергии стрелы в верхней точке подъема:

$$mgH=2T\frac{h_0^2}{AB}.$$

Отсюда

$$H=\frac{2Th_0^2}{AB\cdot mg}\approx 5\ м.$$

Ф56

Почему флаг «полощется» на ветру?

Эту задачу легко решат те, кто читал статью А. Эйнштейна «Элемен-

---

*)Можно подсчитать работу силы, действующей на стрелу, и иначе. Максимальная сила равна $4T\frac{h_0}{AB}$, минимальная — 0 (когда тетива не оттянута). Умножив среднюю силу $F_{ср}=2T\frac{h_0}{AB}$ на длину пути h_0, получим $A=2T\frac{h_0^2}{AB}$.

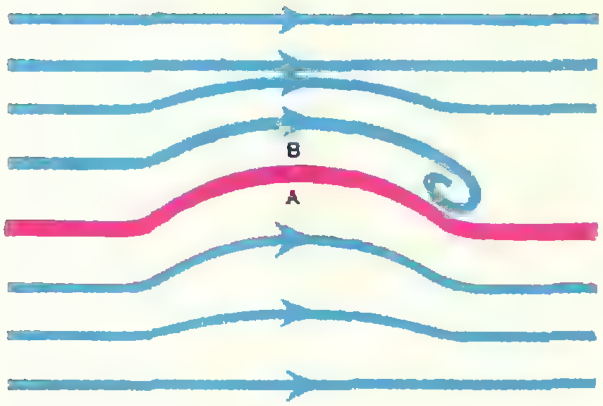


Рис. 13.

тарная теория полета и волн на воде» в «Кванте» № 5 за 1970 год. Поведение флага объясняется точно так же, как и образование волн на воде.

Предположим, что в каком-то месте флаг слегка изогнут (рис. 13). В этом случае вверху при обтекании выступа скорость ветра больше, а внизу, в области вогнутости флага — меньше скорости ветра вдали от флага. Из закона Бернулли следует, что при этом давление воздуха в точке *А* больше, чем давление в точке *В*. Поэтому образовавшийся выступ должен увеличиваться. Кроме того, поскольку из-за образования вихрей за выступом давление за ним меньше давления перед выступом, этот выступ будет перемещаться к концу флага. Итак, случайно образовавшаяся вогнутость флага будет увеличиваться. Если учесть еще, что благодаря образованию вихрей при обтекании даже плоского флага при равномерном ветре давление с разных сторон флага может оказаться разным и поэтому будут легко образовываться небольшие изгибы поверхности, становится понятным, почему флаг «полощется» на ветру.

Ф57

Два одинаковых шарика, связанных невесомой пружинкой, движутся по гладкому горизонтальному полу с одинаковой скоростью, перпендикулярной вертикальной стенке. Опишите, как происходит соударение системы со стенкой. Как будут двигаться шарики после удара? Удар шарика о стенку абсолютно упругий, время соударения пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний шарика на пружинке.

Так как скорости шариков вначале одинаковы и постоянны, то пружинка не деформирована. Действительно, в противном случае на каждый из шариков действовала бы со стороны пружинки сила, сообщающая ему ускорение, и скорость шарика менялась бы со временем. После того как первый шарик ударяется о стенку, его скорость меняется на противоположную. Шарики начинают двигаться навстречу друг другу с

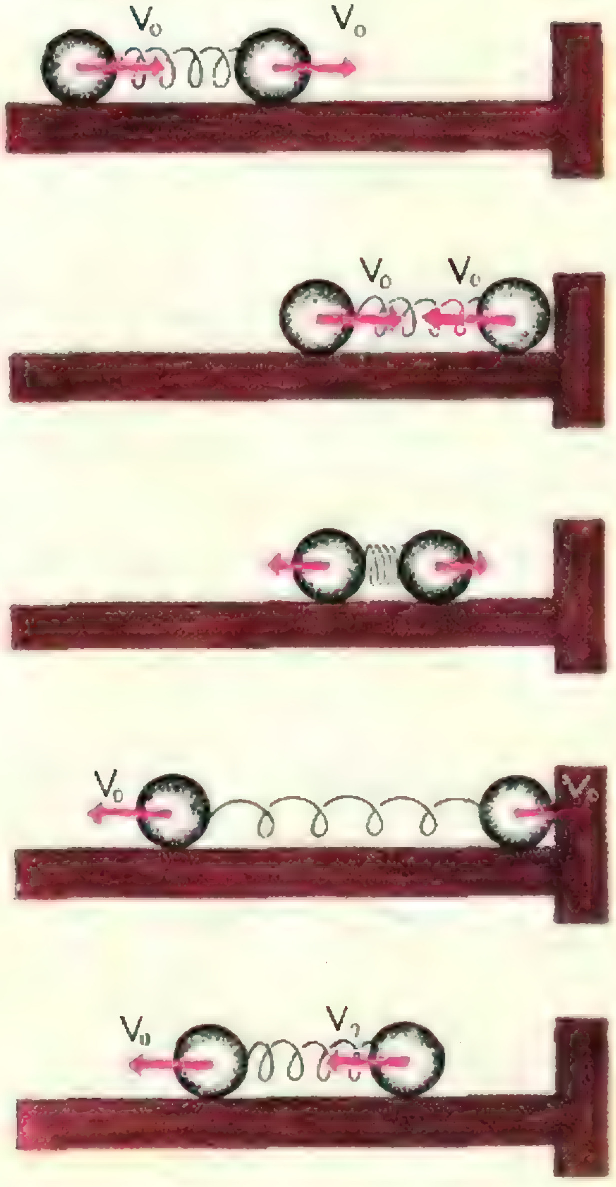


Рис. 14.

одинаковыми по величине скоростями (см. рис. 14), пружинка сжимается. Кинетическая энергия шариков переходит в потенциальную энергию деформации пружинки. Затем пружинка начинает распрямляться, сообщая шарикам одинаковые по величине и противоположные по направлению скорости. При этом, так же как и во время сжатия пружинки, центр масс системы неподвижен относительно стенки — на систему не действуют никакие горизонтальные силы. Из закона сохранения энергии следует, что в тот момент, когда правый шарик ударяется о стенку, величины скоростей шариков равны начальной скорости системы. После соударения шарика со стенкой его скорость опять меняется на противоположную и шарики движутся от стенки с одинаковыми скоростями. Так как в момент удара шарика о стенку пружинка не деформирована, то она не деформируется и при дальнейшем движении системы.

Ф58

В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление R. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если индукция поля меняется с высотой по закону

$$B = B_0(1 + \alpha H).$$

Сила, действующая на кольцо в магнитном поле, пропорциональна току, идущему по кольцу, ток пропорционален э. д. с. индукции, возбуждаемой в кольце при его движении, а э. д. с. индукции, в свою очередь, пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего плоскость кольца, а значит, пропорциональна скорости кольца. Следовательно, при некоторой скорости движения кольца сила, действующая на него в магнитном поле, станет равной силе тяжести. Эта скорость и является скоростью установившегося движения кольца.

Так как при движении кольца его кинетическая энергия не меняется, то изменение потенциальной энергии должно быть равно тепловым потерям в кольце.

Пусть скорость кольца равна v. Э. д. с. индукции, возбуждаемой в кольце при его движении, по величине равна

$$E = k\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий кольцо, и k — коэффициент пропорциональности.

$$\Phi = \frac{\pi d^2}{4}B = \frac{\pi d^2}{4}B_0(1 + \alpha H),$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\pi d^2}{4}B_0\alpha\frac{\Delta H}{\Delta t}.$$

Но $\frac{\Delta H}{\Delta t} = v$, поэтому

$$E = k\frac{\pi d^2}{4}B_0\alpha v$$

и по кольцу идет ток

$$I = \frac{E}{R} = \frac{k\pi d^2 B_0\alpha v}{4R}.$$

Запишем теперь закон сохранения энергии. Пусть масса кольца равна m.

За время t в кольце выделяется тепло, равное I^2Rt. Если за это время кольцо опускается на высоту h, то

$$mgh = I^2Rt.$$

Так как $\frac{h}{t} = v$, то

$$mgv = I^2R,$$

$$mgv = \frac{k^2\pi^2 d^4 B_0^2\alpha^2 v^2}{16R}.$$

Отсюда

$$v = \frac{16Rmg}{k^2\pi^2 d^4 B_0^2 \alpha^2}.$$

И. Ш. Слободецкий

Логарифмические уравнения

В. В. Гольдберг

Логарифмическими уравнениями принято называть уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком логарифма.

Решение простейшего логарифмического уравнения

$$\log_a x = b \qquad (1)$$

основано на следующем свойстве логарифмов: *если логарифмы двух (положительных) чисел по одному и тому же основанию* $a (a > 0, a \neq 1)$ *равны, то равны и сами эти числа.*

Записав уравнение (1) в виде $\log_a x = \log_a a^b$ и воспользовавшись указанным свойством, получим ответ: $x = a^b$.

Этот прием применим и для решения более сложных логарифмических уравнений вида

$$\log_a f(x) = b. \qquad (2)$$

Для уравнения (2) получаем $f(x) = a^b$.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\log_5 [2 + \log_3 (3 + x)] = 0.$$

Решение. Сначала получаем, что

$$2 + \log_3(3 + x) = 5^0, \; 2 + \log_3(3 + x) = 1, \; \log_3(3 + x) = -1.$$

Далее находим: $3 + x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3} - 3$, $x = -\frac{8}{3}$.

Некоторые логарифмические уравнения легко сводятся к простейшим. Так, уравнения вида

$$f(\log_a x) = 0 \qquad (3)$$

заменой $\log_a x = y$ сводятся к уравнению $f(y) = 0$. Если $y_1, \ldots, y_k$ — корни последнего уравнения, то мы получаем совокупность простейших логарифмических уравнений:

$$\log_a x = y_1, \; \ldots, \; \log_a x = y_k.$$

Пример 2. *Решить уравнение* $\lg^3 x - \lg^2 x - 6 \lg x = 0$.

Решение. Обозначим $\lg x$ через y. Тогда получим кубическое уравнение относительно y:

$$y^3 - y^2 - 6y = 0.$$

Решаем его: $y(y^2 - y - 6) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = -2$. Рассматриваем три возможных случая:

а). $\lg x = 0$, $x_1 = 1$; б) $\lg x = 3$, $x_2 = 1000$; в) $\lg x = -2$, $x_3 = 0{,}01$.

К уравнениям вида (3) сводятся показательно-логарифмические уравнения, если их предварительно прологарифмировать.

Пример 3. *Решить уравнение* $x^{2+\log_3 x}=3^8$.

Решение. Поскольку обе части уравнения положительны (ОДЗ: $x>0$), приравниваем их логарифмы по основанию 3: $\log_3 x^{2+\log_3 x}=\log_3 3^8$, откуда находим, что $(2+\log_3 x)\log_3 x=8$. Обозначая $\log_3 x$ через y, приходим к квадратному уравнению $y^2+2y-8=0$ с корнями $y_1=-4$, $y_2=2$. Разбираем два случая:

а) $\log_3 x=-4$, $x_1=1/81$ б) $\log_3 x=2$, $x_2=9$.

Пример 4. *Решить уравнение* $9x^{\lg x}+91x^{-\lg x}=60$.

Решение. Введем обозначение $x^{\lg x}=y$; тогда $x^{-\lg x}=\frac{1}{y}$, и наше уравнение сводится к следующему уравнению относительно y: $9y^2-60y+91=0$. Корни последнего $y_1=\frac{13}{3}$, $y_2=\frac{7}{3}$. Рассматриваем обе возможности:

а) $x^{\lg x}=\frac{13}{3}$; логарифмируя, получаем $\lg x^{\lg x}=\lg\frac{13}{3}$, $\lg^2 x=\lg\frac{13}{3}$, откуда $\lg x=\pm\sqrt{\lg\frac{13}{3}}$, $x_1=10^{\sqrt{\lg\frac{13}{3}}}$, $x_2=10^{-\sqrt{\lg\frac{13}{3}}}$;

б) $x^{\lg x}=\frac{7}{3}$; аналогично тому, как это сделано в первом случае, находим $x_3=10^{\sqrt{\lg\frac{7}{3}}}$, $x_4=10^{-\sqrt{\lg\frac{7}{3}}}$,

При решении логарифмических уравнений часто дело сводится к решению уравнения типа

$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \tag{4}$$

Здесь с помощью потенцирования надо перейти к уравнению

$$f(x)=g(x). \tag{5}$$

Но следует иметь в виду, что *при таком переходе мы расширяем ОДЗ уравнения, и потому возможно появление посторонних корней*. Поэтому надо проверить, входит ли каждый из корней уравнения (5) в ОДЗ уравнения (4).

Пример 5. *Решить уравнение* $\log_2(2x^2-2)=\log_2(5x-4)$.

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2-2>0, \\ 5x-4>0, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x<-1,\ x>1, \\ x>\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ: $x>1$. Потенцируя данное уравнение, получим $2x^2-2=5x-4$, или $2x^2-5x+2=0$, откуда находим $x_1=2$, $x_2=1/2$.

Поскольку $x_2=1/2$ не входит в ОДЗ, уравнение имеет только одно решение: $x=2$.

Хорошо известны следующие свойства логарифмов чисел:

$$\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B \quad (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1), \tag{6}$$

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B \quad (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1), \tag{7}$$

$$\log_a A^p=p\log_a A \ (A>0,\ p \text{ — любое действительное число}), \tag{8}$$

$$\log_{a^q} A^p=\frac{p}{q}\log_a A \quad (A>0,\ q\neq 0). \tag{9}$$

Как следует применять эти свойства логарифмов при решении логарифмических уравнений, когда выражения A и B содержат неизвестное?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что ОДЗ левой и правой частей этих формул разные: например, правая часть формулы (6) имеет смысл только при $A>0$ и $B>0$, а левая часть этой формулы определена как при $A>0$ и $B>0$, так и при $A<0$, $B<0$.

Аналогично и для остальных формул *ОДЗ левой части может оказаться шире ОДЗ правой части* (при этом в формуле (9) надо рассматривать допустимые значения входящей в основание величины a. Сказанное означает, что если мы будем использовать формулы (6)—(9) «справа налево», то в результате будем получать уравнение, являющееся следствием исходного (его ОДЗ может оказаться шире). При этом мы гарантированы в том, что не потеряем корней. *Но в этом случае мы можем приобрести посторонние корни.* Поэтому все полученные корни надо проверить (если посторонние корни могли появиться только в результате использования формул (6)—(9), то достаточно проверить, входят ли полученные корни в ОДЗ исходного уравнения).

Пример 6. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+\log_{\frac{1}{6}}(5x+3)=-2. \qquad (10)$$

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 5x+3>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>1, \\ x>-\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ таково: $x>1$.

Применяя формулу (6) к левой части уравнения, получим

$$\log_{\frac{1}{6}}[(x-1)(5x+3)]=-2, \qquad (11)$$

откуда находим $(x-1)(5x+3)=36$, или $5x^2-2x-39=0$. Корни квадратного уравнения: $x_1=3$, $x_2=-13/5$.

Поскольку посторонние корни могли появиться только из-за использования формулы (6), достаточно проверить, входят ли полученные решения в ОДЗ уравнения (10). Сделав это, убеждаемся в том, что уравнение имеет единственное решение $x=3$. Заметим, что значение $x=-13/5$, не являясь решением уравнения (10), будет решением уравнения (11), ОДЗ которого шире: $x>1$, $x<-3/5$.

Как же быть, если при решении логарифмического уравнения мы сталкиваемся с необходимостью использовать формулы (6)—(9) «слева направо»? Ведь если эти формулы использовать в том виде, в каком мы их выписали, мы придем к уравнению, ОДЗ которого может оказаться у́же ОДЗ исходного уравнения! Но тогда мы можем потерять часть корней!

Чтобы этого не случилось, надо использовать более общие формулы:

$$\log_a(AB)=\log_a|A|+\log_a|B| \quad (AB>0, a>0,\ a\neq 1), \qquad (6')$$

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a|A|-\log_a|B| \quad (AB>0,\ a>0,\ a\neq 1), \qquad (7')$$

$$\log_a A^{2p}=2p\log_a|A| \quad (A\neq 0,\ p \text{ — целое число}), \qquad (8')$$

$$\log_{a^{2q}}A=\frac{1}{2q}\log_{|a|}A \quad (A>0,\ q\neq 0 \text{ — целое число}). \qquad (9')$$

Левые и правые части формул (6′) и (7′) так же, как и формул (6) и (7), имеют разные ограничения на A и B: левые части имеют смысл при A и B одинакового знака, а правые части — при любых ненулевых A и B.

Поэтому *использование формул* (6′) *и* (7′) *«слева направо» приведет к уравнению, ОДЗ которого может оказаться шире*. Но это уже менее страшно, чем сужение ОДЗ, ибо теперь мы не можем потерять корней, а можем лишь приобрести посторонние. Как мы уже отмечали, в этом случае становится необходимой проверка получаемых решений (иногда достаточно проверить, входят ли они в ОДЗ исходного уравнения).

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\lg(x+1)^2+\lg(x+9)^2=2\lg 9. \qquad (12)$$

Чтобы предотвратить часто встречающиеся ошибки, приведем сначала неправильное решение.

С помощью формул (8) находят, что $2\lg(x+1)+2\lg(x+9)=2\lg 9$, или

$$\lg(x+1)+\lg(x+9)=\lg 9. \qquad (13)$$

Применяя формулу (6), получают далее

$$\lg[(x+1)(x+9)]=\lg 9, \qquad (14)$$

откуда находят $(x+1)(x+9)=9$, или $x^2+10x=0$ и далее $x_1=0$, $x_2=-10$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению (12).

Дадим теперь правильное решение уравнения (12).

Решение. Находим ОДЗ уравнения (12): $x\neq-9$, $x\neq-1$. Используя формулу (7′), получим $2\lg|x+1|+2\lg|x+9|=2\lg 9$, откуда находим, что $\lg|(x+1)(x+9)|=\lg 9$ и далее $|x^2+10x+9|=9$.

Последнее равенство выполняется в любом из следующих случаев:

а) $x^2+10x+9=9$, $x^2+10x=0$, $x_1=0$, $x_2=-10$;

б) $x^2+10x+9=-9$, $x^2+10x+18=0$, $x_3=-5+\sqrt{7}$, $x_4=-5-\sqrt{7}$.

Таким образом, уравнение (12) имеет четыре корня.

Ошибка в приведенном выше неправильном решении, как вы уже, очевидно, догадались, заключалась в том, что применялась формула (8), а не (8′). Это привело к уравнению (13) с более узкой ОДЗ: $x>-1$. Правда, на следующем шаге это частично компенсировалось: ОДЗ уравнения (14) шире ОДЗ уравнения (13) — сюда входят как $x>-1$, так и $x<-9$. Последнее дало возможность не потерять корень $x_2=-10$, но корни $x_{3,4}=-5\pm\sqrt{7}$ оказались потерянными.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\lg[(x-2)(x+3)]+\lg[(x+3)/(x-2)]=1. \qquad (15)$$

Решение. Найдем ОДЗ: $(x-2)(x+3)>0$, или $x<-3$ и $x>2$.

Для решения используем формулы (6′) и (7′):

$$\lg|x-2|+\lg|x+3|+\lg|x+3|-\lg|x-2|=1.$$

Приведя подобные члены, получим $\lg|x+3|=1/2$, откуда находим:

$$|x+3|=\sqrt{10},\quad x+3=\pm\sqrt{10},\quad x_1=-3+\sqrt{10},\quad x_2=-3-\sqrt{10}.$$

Проверка показывает, что $x=-3-\sqrt{10}$ будет единственным решением уравнения (15).

При использовании формул (6) и (7) мы имели бы

$$\lg(x-2)+\lg(x+3)+\lg(x+3)-\lg(x-2)=1,$$

$$\lg(x+3)=\frac{1}{2},\quad x+3=\sqrt{10},\quad x=-3+\sqrt{10}.$$

При таком решении мы сначала сузили ОДЗ, что привело к потере корня $x=-3-\sqrt{10}$, а затем после уничтожения подобных членов расширили ОДЗ, что привело нас к постороннему корню $x=-3+\sqrt{10}$.

Еще одним источником появления посторонних корней является применение основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b} = b \quad (b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1) \tag{16}$$

в том случае, когда a и b содержат неизвестное.

Пример 9. *Решить уравнение* $x^{\log_x (x^2+1)} = 2.$

Решение. Используя тождество (16), получим $x^2+1=2$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Но значения $x = \pm 1$ не могут быть основанием логарифмов, то есть не входят в ОДЗ. Поэтому уравнение не имеет решений.

Если в уравнение входят логарифмы при разных основаниях, надо применять формулу перехода от одного основания логарифмов к другому:

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b} \qquad (A > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1) \tag{17}$$

и ее частный случай

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1). \tag{18}$$

Пример 10. *Решить уравнение*

$$\log_{3x} \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$$

Решение. Находим ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{3}$. Используя формулу (17), перейдем в первом слагаемом к основанию 3; тогда получим

$$\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 (3x)} + \log_3^2 x = 1, \text{ или } \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1.$$

Обозначим $\log_3 x$ через y, тогда уравнение примет вид

$$\frac{1-y}{1+y} + y^2 = 1 \quad \text{или} \quad y^3 + y^2 - 2y = 0,$$

откуда находим $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = 1$. Рассматриваем три возможности:

а) $\log_3 x = 0$, $x_1 = 1$; б) $\log_3 x = -2$, $x_2 = \frac{1}{9}$; в) $\log_3 x = 1$, $x_3 = 3$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$20 \log_{ax} \sqrt{x} + 7 \log_{a^2x} x^3 = 3 \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x^2 \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Решение. Находим ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{a}$, $x \neq \frac{1}{a^2}$, $x \neq \sqrt{a}$.

Поскольку $x > 0$, мы можем применить формулу (8), что дает

$$10 \log_{ax} x + 21 \log_{a^2x} x = 6 \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x.$$

Теперь удобнее всего по формуле (18) перейти к одному и тому же основанию x. Но когда x будет стоять в основании логарифмов, ОДЗ уравнения станет уже, так как x после этого не может быть равным единице. Поэтому, *прежде чем перейти к основанию x, проверим, не является ли $x=1$ корнем уравнения.* Легко видеть, что $x_1=1$ — корень. Перейдем теперь к основанию x:

$$\frac{10}{\log_x(ax)} + \frac{21}{\log_x(a^2x)} = \frac{6}{\log_x \dfrac{x}{\sqrt{a}}}.$$

Обозначим $\log_x a$ через y. Тогда получим

$$\frac{10}{1+y} + \frac{21}{1+2y} = \frac{6}{1-\dfrac{1}{2}y}.$$

После простых преобразований приходим к квадратному уравнению $13y^2-3y-10=0$, корни которого $y_1=1$, $y_2=-\frac{10}{13}$. В первом случае получаем $\log_x a=1$, $x_2=a$, а во втором $\log_x a=-\frac{10}{13}$, $x^{-\frac{10}{13}}=a$, $x_3=a^{-\frac{13}{10}}$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=a^{-\frac{13}{10}}$.

При решении логарифмических уравнений иногда удобно пользоваться следующей формулой:

$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A} \quad (A>0,\ B>0,\ a>0,\ a\neq 1). \qquad (19)$$

Доказательство формулы (19) очень простое: поскольку обе части этой формулы положительны, найдем логарифмы по основанию a от $A^{\log_a B}$ и $B^{\log_a A}$. Нетрудно убедиться, что эти логарифмы равны одному и тому же выражению $\log_a A \log_a B$; из равенства логарифмов выводим справедливость формулы (19).

Пример 12. *Решить уравнение* $3^{\log_a x}+3x^{\log_a 3}=2$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. В силу (19) $x^{\log_a 3}=3^{\log_a x}$.

Поэтому уравнение можно записать в виде $3^{\log_a x}+3\cdot 3^{\log_a x}=2$, откуда находим, что $4\cdot 3^{\log_a x}=2$, то есть $3^{\log_a x}=\frac{1}{2}$. Далее имеем

$$\log_a x = -\log_3 2, \quad x=a^{-\log_3 2}.$$

Упражнения

Решить уравнения:

1. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6.$
2. $x^{\log_x(x+3)^2}=16.$
3. $x^{\log_3^3 x-\log_3 x}=3^{3\log_{2\sqrt{2}}4+8}.$
4. $15^{\log_5 3}\,x^{\log_5(9x)+1}=1.$
5. $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3.$
6. $\dfrac{1}{\log_6(3+x)}+\dfrac{2\log_{0.25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$
7. $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$
8. $\log_{x/2}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0.$
9. $\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0.$
10. $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64.$
11. $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11.$
12. $\lg[x(x+9)]+\lg\dfrac{x+9}{x}=0.$

Задачи по геометрии

Ю. В. Сидоров

На приемных экзаменах в институтах много места уделяется задачам по геометрии. Условия большинства задач формулируются достаточно просто: в некоторой геометрической фигуре задается несколько элементов или соотношений между элементами и требуется найти неизвестный элемент или неизвестное соотношение между элементами.

Такие «стандартные» условия задач понятны каждому абитуриенту. Однако геометрические задачи и приемы их решений настолько разнообразны, что невозможно придумать какую-нибудь удобную классификацию, по которой можно было бы узнавать рецепт решения каждой конкретной задачи. Именно поэтому в учебниках и учебных пособиях почти нет описаний методов решения задач. Чтобы научиться решать геометрические задачи, нужно твердо знать и хорошо понимать основные теоремы геометрии и, главное, постоянно тренироваться, регулярно решать разнообразные задачи.

В последние годы большинство школьников решают геометрические задачи только «алгебраическим способом» который состоит в следующем. Неизвестные элементы геометрической фигуры обозначаются через x, y, $z, \ldots$, и выписываются несколько соотношений между известными и неизвестными элементами. Затем решается полученная система алгебраических и тригонометрических уравнений и находятся те элементы или соотношения между элементами, которые требуется найти по условиям задачи.

Такой формальный подход к решению геометрических задач часто является одним из самых простых и позволяет быстро получить ответ. Естественно, возникает желание решать таким способом все задачи. Однако абитуриент, который привык, не задумываясь, «переделывать» любую геометрическую задачу в алгебраическую, встречает непреодолимые трудности на приемных экзаменах, если оказывается, что его способ решения не приводит к желаемому результату.

Почти каждая задача может быть решена различными способами. Высоко оцениваются те работы абитуриентов, в которых найден наиболее короткий и изящный путь решения задач. Только большая и постоянная тренировка позволяет научиться находить самый рациональный способ решения. Удачный выбор неизвестных, удобный рисунок, дополнительные геометрические построения и аккуратное оформление решения помогают правильно понять задачу и найти самый простой способ ее решения. Рассмотрим конкретные примеры.

На письменном экзамене по математике в МФТИ была предложена следующая задача.

1. *Биссектрисы* AM *и* BN *треугольника* ABC *пересекаются в точке* O. *Известно, что* $AO = \sqrt{3}\,MO$, $NO = (\sqrt{3} - 1)\,BO$. *Найти углы треугольника* ABC.

Многие абитуриенты пытались решить эту задачу следующим образом.

Пусть $AB=a$, $\measuredangle BAC=x$, $\measuredangle ABC=y$ (рис. 1). Найдем длину отрезка AN из треугольника ABN (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника и по теореме синусов):

$$AN = AB\frac{NO}{BO} = a\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{a\sin\frac{y}{2}}{\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)}.$$

Аналогично из треугольника ABM находим:

$$BM=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)}.$$

Таким образом, получена система уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}+y\right)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}, \\ \left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2}. \end{cases}$$

Большинство абитуриентов, которые решали задачу таким способом, не сумели найти решение этой довольно сложной системы. Но плохо не то, что они не решили полученную систему, а то, что они не пытались найти другой способ решения данной задачи. Эту задачу проще решить следующим способом (тоже алгебраическим).

Пусть $AB=x$, $BC=y$, $AC=z$. Из треугольников ABM и ABN по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника получаем

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MO}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{AN}{AB}=\frac{NO}{BO}=\sqrt{3}-1.$$

Отсюда $BM=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $AN=x\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Из треугольника ABC имеем:

$$\frac{AN}{CN}=\frac{AB}{BC}, \qquad \frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC},$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{x\left(\sqrt{3}-1\right)}{z-x\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{x}{y}, \\ \frac{x}{y\sqrt{3}-x}=\frac{x}{z}. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим: $y=x\sqrt{3}$, $z=2x$. Отсюда следует, что $x^2+y^2=z^2$ и по теореме, обратной теореме Пифагора, $\measuredangle ABC=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\measuredangle BAC=\arcsin\frac{y}{z}=\frac{\pi}{3},$$

$$\measuredangle ACB=\frac{\pi}{6}.$$

Рассмотрим еще одну задачу.

2. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC расположена точка M, а на стороне AC — точка N* такая, что *$MN\parallel AB$. Известно, что $AB=AN=1$ см, $CM=\sqrt{3}$ см. Найти длину отрезка MN.*

Естественно попытаться решить эту задачу следующим образом. Обозначим MN через x (рис. 2). Тогда $CN=\sqrt{3-x^2}$ и из подобия треугольников получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{1+\sqrt{3-x^2}}=x,$$

которое легко преобразуется к виду

$$x^4-2x^3-x^2+6x-3=0.$$

Найти решение этого уравнения трудно, и поэтому надо попытаться найти другой способ решения задачи. На-

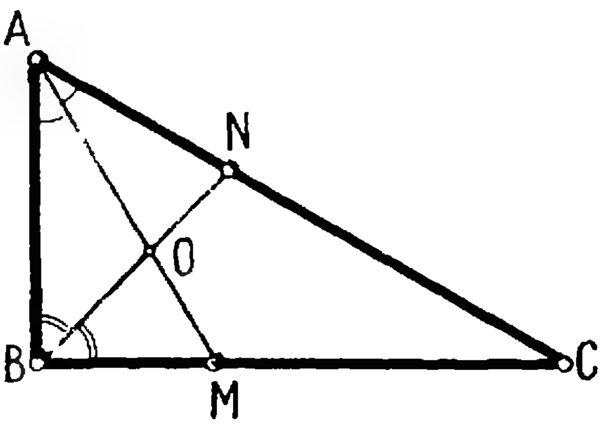


Рис. 1.

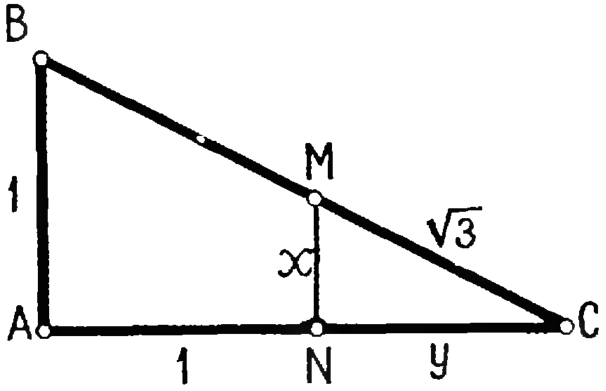


Рис. 2.

пример, задачу 2 можно решить следующим образом.

Обозначим MN через x, CN через y. Тогда легко получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ \dfrac{y+1}{y}=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим:

$$y-x=xy, \quad x^2+y^2-2xy=x^2y^2.$$

Вычитая из этого уравнения первое уравнение системы, получаем:

$$(xy)^2+2xy-3=0, \qquad xy=-1\pm2.$$

Учитывая, что $x>0$, $y>0$, получаем систему

$$\begin{cases} xy=1, \\ y-x=1, \end{cases}$$

из которой находим ответ:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\ (см).$$

Из рассмотренных примеров видно, как удачный выбор неизвестных величин помогает упростить решение геометрической задачи алгебраическим способом. Приведем примеры задач, для решения которых полезно сделать дополнительные геометрические построения.

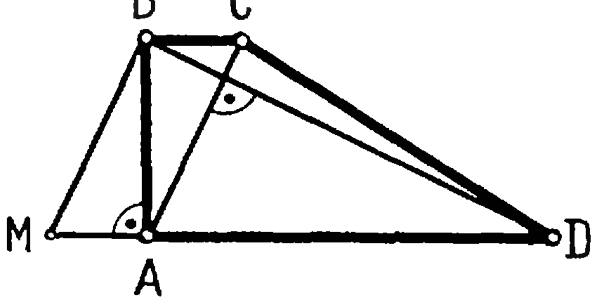


Рис. 3.

3. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, диагонали взаимно перпендикулярны и $\frac{AD}{BC}=k$. Найти отношение $\frac{BD}{AC}$.*

Решение. Через точку B проведем прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с прямой AD в точке M (рис. 3). Тогда по теореме о свойстве перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольника BMD, имеем

$$BD=\sqrt{DM\cdot AD},$$

$$BM=\sqrt{DM\cdot AM}.$$

Учитывая, что $AC=BM$, $AM=BC$, находим

$$\frac{BD}{AC}=\frac{BD}{BM}=\frac{\sqrt{DM\cdot AD}}{\sqrt{DM\cdot AM}}=\sqrt{\frac{AD}{BC}}=\sqrt{k}.$$

4. *На сторонах AC и BC треугольника ABC расположены соответственно точки N и M так, что*

$$\frac{AN}{CN}=n, \quad \frac{BM}{CM}=m.$$

Прямые AM и BN пересекаются в точке O.

Найти отношения

$$\frac{AO}{MO} \text{ и } \frac{BO}{NO}.$$

Решение. Проведем $MK\parallel BN$ (рис. 4). Из подобия треугольников BCN и CKM находим CK:

$$CK=CN\frac{CM}{BC}=CN\frac{CM}{CM+BM}=CN\frac{1}{1+m}.$$

Следовательно,

$$KN=CN-CK=CN\left(1-\frac{1}{1+m}\right)=CN\frac{m}{1+m}.$$

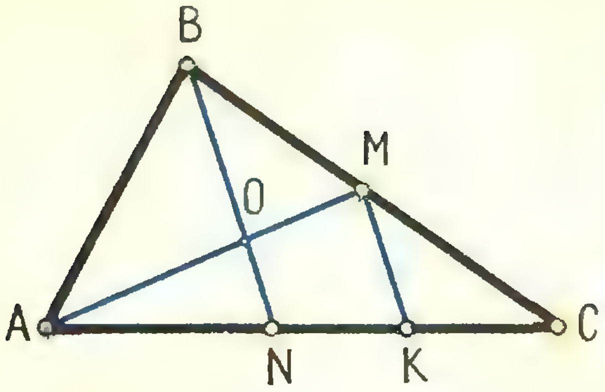


Рис. 4.

Из подобия треугольников AON и AMK находим искомые отношения:

$$\frac{AO}{MO}=\frac{AN}{KN}=\frac{AN}{CN}\cdot\frac{1+m}{m}=\frac{n}{m}(1+m),$$

и аналогично

$$\frac{BO}{NO}=\frac{m}{n}(1+n).$$

Упражнения

1. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, B, центр грани ACD и середину ребра BC.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D так, что $AD=a$, $CD=b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти длину MN.

3. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны a и c соответственно. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины B.

4. В остроугольном треугольнике две высоты равны соответственно 3 *см* и $2\sqrt{2}$ *см*, а точка их пересечения делит третью высоту в отношении 5 : 1, считая от вершины треугольника. Найти площадь треугольника.

5. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Некоторая плоскость пересекает все боковые ребра призмы так, что в сечении получается правильный треугольник. Определить сторону этого треугольника.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

СОЖЖЕННАЯ РАДУГА

Каждый видел радугу и почти каждый может более или менее подробно объяснить ее происхождение. Этим никого не удивишь. Но мало кто знает, что первое объяснение радуги можно найти в заметках Леонардо да Винчи (1452—1519). Видимо, об этом не знали и отцы-инквизиторы, которые более чем через 100 лет в 1624 году преследовали епископа Антонио Доминика за книгу, в которой он объяснил происхождение радуги. Епископ не был сожжен на костре инквизиции только потому, что умер в тюрьме, но книга его и тело автора все же претерпели знаменитое аутодафе.

Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году

Н. Н. Колесников, В. М. Тихомиров

В 1970 году на химическом факультете МГУ по математике проводился только письменный экзамен.

Каждый вариант письменной работы содержал пять задач, охватывающих все основные разделы школьного курса математики — алгебру, геометрию и тригонометрию.

Разобрав четыре задачи одного из вариантов, мы увидим, что для их решения не требуется никаких знаний, выходящих за рамки программы по математике для поступающих в вузы.

В связи с этим хотелось бы еще раз подчеркнуть, что у поступающих зачастую слабы навыки здравых логических рассуждений и что ими уделяется явно недостаточное внимание геометрическим задачам и теоремам.

Наряду с этими двумя принципиальными недочетами, на которые хотелось бы обратить внимание и учителей, большой вред поступающим наносит небрежность и несобранность при выполнении и оформлении письменной работы, неумение доводить решения задач и примеров до конца. Задача, в которой только намечена идея решения, но не доведенная с необходимыми промежуточными рассуждениями до ответа, не может считаться решенной до конца. Небрежность приводит также к разнообразным ошибкам и опискам, искажающим ход решения и результаты; иногда неправильно понимаются условия задачи, но задача с измененными условиями экзаменационной комиссией не рассматривается, даже если она оказывается более трудной.

Вариант

1. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал $^2/_5$ всего пути от B до A? (Скорости автомобиля и велосипедиста постоянны.)

2. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

3. Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1<x<4$ и удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,75}\sin x \geqslant \log_{9/16} 0,75.$$

4. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD=2$, $BD=1$, $CD=\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Дана прямая трехугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC=6$, а $AA_1=8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM=MB_1$, а AN — биссектриса угла CAC_1.

Разбор задач

1. В этой задаче мы укажем лишь основные моменты решения.

Пусть S — расстояние между пунктами A и B, $v_а$ — скорость автомобиля, $v_в$ — скорость велосипедиста, t — время (в часах) от начала движения до первой встречи. Для четырех введенных величин (S, $v_а$, $v_в$, t) можно составить три уравнения:

$$(v_а + v_в)t = S,$$

$$\frac{2}{5}S = v_в(t+2), \qquad \frac{7}{5}S = v_а(t+2).$$

Найти значения всех неизвестных невозможно, но это и не требуется, нужно найти величину $\frac{S}{v_в} - t$, являющуюся комбинацией неизвестных. Деля третье уравнение на второе, мы получаем, что $v_а = \frac{7}{2}v_в$. Подставив это соотношение в первое уравнение и исключая $\frac{S}{v_в}$ из него и второго уравнения, мы находим $t = \frac{5}{2}$ часа. Из второго уравнения получится, что $\frac{S}{v_в} = \frac{45}{4}$ часа, а искомое время $\frac{S}{v_в} - t$ равно $\frac{35}{4}$ часа, то есть 8 часам 45 минутам.

Заметим, что эта задача (как и вообще все первые задачи в вариантах, дававшихся на химическом факультете) является по сути своей арифметической и допускает решение, основанное на самых простых рассуждениях.

За одно и то же время (до второй встречи) велосипедист проехал $^2/_5$, а автомобилист — $^7/_5$ всего пути. Значит, отношение их скоростей равно 2 : 7. Тогда к моменту первой встречи велосипедист проедет $^2/_9$, а автомобилист $^7/_9$ всего пути. Но, затратив еще два часа, велосипедист проезжает $^2/_5$ всего пути. Следовательно, за час он проезжает $\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) : 2 = \frac{4}{45}$ части всего пути. Значит, $^7/_9$ пути, которые еще предстояло проехать велосипедисту после первой встречи, он преодолеет за $7 : \frac{4}{45} = \frac{35}{4}$ часа.

Представляется несколько удивительным, что безукоризненное решение этой задачи, достаточно простой, дали лишь 139 из 394 решавших ее абитуриентов — чуть больше трети, а почти половина — 182 из 394 — не высказала никаких разумных соображений по поводу этой задачи.

2. Эта задача оказалась наиболее доступной для поступавших, поэтому приведем лишь ответ: $x = 1$ или $x = -\frac{1}{3}$.

3. Разбор третьей задачи мы начнем с определения ОДЗ с учетом дополнительного условия: $-1 < x < 4$. Мы видим, что ОДЗ состоит из тех x для которых $\sin x > 0$, то есть

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

что с учетом дополнительного неравенства дает условие

$$0 < x < \pi.$$

Используя равенства $0{,}75 = \frac{3}{4}$ и $\log_{\frac{9}{16}} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, перепишем исходное неравенство так:

$$\log_{\frac{3}{4}} \sin x \geqslant \frac{1}{2},$$

откуда следует, что

$$\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, мы должны найти те x из интервала $0 < x < \pi$, для которых $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. В итоге мы получаем ответ:

$$0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}, \qquad \frac{2}{3}\pi \leqslant x < \pi.$$

Третья задача обнаружила недостаточное понимание многими абитуриентами тригонометрических функций. Многие затруднялись в решении неравенства $\sin x > 0$. Только четвертая часть всех решавших смогла правильно выписать решение неравенства $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ при дополни-

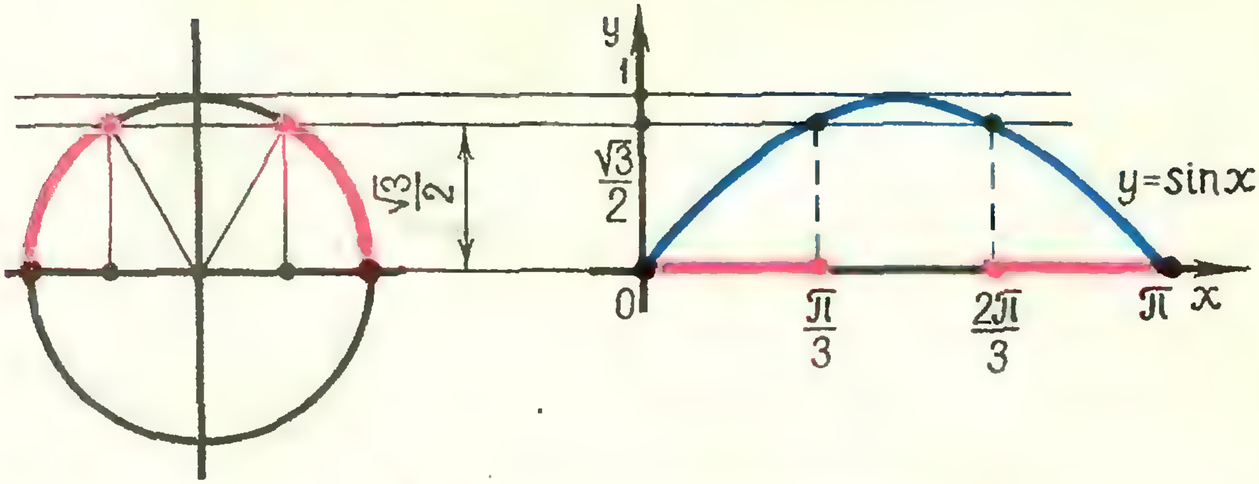


Рис. 1. Значения x, отмеченные красным цветом, являются решением исходной системы неравенств (слева на тригонометрическом круге, справа — на оси Ox).

тельном условии $0 < x < \pi$, которое проще всего получить из рисунка 1.

4. Эта задача оказалась самой трудной в варианте. Приведем одно из нескольких возможных алгебраических решений задачи.

На рисунке 2 мы обозначили через K середину отрезка AB, через E — основание высоты, опущенной из C на AB; длину CE мы обозначили через x, длину EK через y. Имеем

$$S_{\Delta\, ABC} =$$

$$\frac{1}{2}x\cdot AB = \frac{1}{2}x(AD+DB) = \frac{3}{2}x.$$

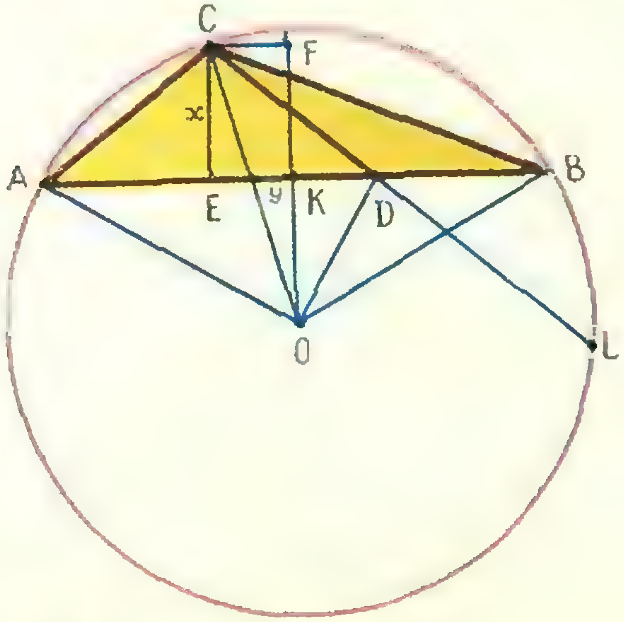


Рис. 2. $\smile ACB = 120°$, $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$.

Осталось найти x. Опустим перпендикуляр из точки C на продолжение отрезка OK и его основание обозначим через F. По построению $CFKE$ — прямоугольник, следовательно, $CF = EK = y$, $AK = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$, откуда $DK = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Из прямоугольного треугольника CED получаем первое уравнение

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = CD^2 = 2.$$

Второе уравнение получим из треугольника COF. Для этого найдем $R = CO$ и $KO = \sqrt{OB^2 - KB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$, а из треугольника AOB получим $2R\sin 60° = AB = 3$. Отсюда $R = \sqrt{3}$, $KO = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь из треугольника COF $(KO+KF)^2 + CF^2 = R^2$ или $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x\right)^2 + y^2 = 3$.

Исключая из полученной системы y, находим высоту и площадь

$$x = CE = \frac{\sqrt{2}}{2},\ S = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Используя рисунок 2, попробуйте найти геометрическое решение этой задачи.

5. Пусть $\angle CAC_1 = 2\alpha$ (рис. 3). Согласно условиям $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$. Поскольку AN — биссектриса угла $\angle CAC_1$, по известным тригонометрическим формулам легко найти, что ($\angle NAC = \alpha$)

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Обозначим $\angle ACB$ в треугольнике CAB через β. Теперь легко записать объем данной призмы следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} AC\cdot CB \sin\beta\cdot AA_1 = 24CB\sin\beta.$$

Плоскость, проходящая через точки A, M и N, отсекает от призмы пирамиду $ABCNM$, у которой боковая грань ACB перпендикулярна основанию, так как призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая (по условию). Основание $BCNM$ представляет собой трапецию, поскольку стороны CN и BM параллельны. Из равенств

$$BM = \frac{BB_1}{2} = 4, \quad CN = AC\cdot\operatorname{tg}\alpha = 3$$

находим: $S_{BCNM} = \frac{7}{2} BC$ (BC перпендикулярна CN и BM и является высотой трапеции). Объем пирамиды $ABCNM$, поэтому равен

$$V = \frac{1}{3} S_{BCNM}\cdot AC\sin\beta = 7CB\sin\beta.$$

Объем другой части, отсекаемой плоскостью от призмы, есть разность объемов призмы и пирамиды: $V_2 = V - V_1$. Отсюда

$$V_1 : V_2 = V_1 : (V - V_1) = 7 : 17.$$

В этой задаче не понадобилось находить численные значения объемов интересующих нас частей призмы, поскольку требовалось лишь их отношение. Для получения ответа достаточно было их выразить через одни и те же, хотя и неизвестные нам, величины BC и β. Однако именно это обстоятельство не было понято частью поступающих, которые упорно пытались найти численные значения нужных объемов и, конечно, не добились успеха (сравните с ситуацией в первой задаче, где тоже достаточно было для получения ответа найти отношение неизвестных).

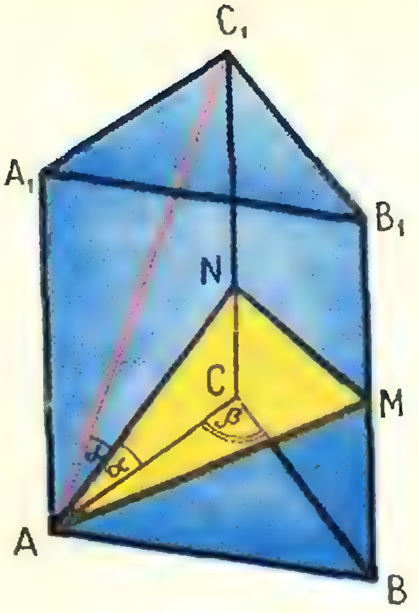


Рис. 3. $AC = 6$, $AA_1 = 8$, $BM = MB_1$.

Попробуйте решить сами следующий вариант.

1. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали одновременно, и каждый вспахивает свою половину. Через 5 часов после того момента, когда они совместно вспахали половину всего поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать $^1/_{10}$ часть своего участка, а второму $^4/_{10}$ своего участка. Сколько времени понадобится второму трактору, чтобы одному вспахать все поле?

2. Решить уравнение

$$3^{2\sqrt{x^2+3x}+1} + 9 = 28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}.$$

3. Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 5$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0,5}\sin x > \log_3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$.

4. В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а радиус круга, описанного вокруг этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 2DB$, и при этом $CD = 2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра). Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC соответственно в точках M, N, P. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $B_1M : A_1B_1 = 1 : 2$, $B_1N : B_1C_1$ [illegible], $BP : BC = 1 : 3$.

Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году

В. Е. Белонучкин, С. М. Козел

Письменный вступительный экзамен по физике проводится далеко не во всех вузах. Однако задачи, предлагавшиеся на письменной работе, интересны и тем, кто собирается сдавать только устный экзамен. Здесь мы разберем задачи одного из вариантов письменной работы по физике на вступительном экзамене в Московском физико-техническом институте.

Билет № 6

1. Частица массы m, движущаяся со скоростью v, налетает на покоящуюся частицу массы $\frac{m}{2}$, и после упругого удара отскакивает под углом $\alpha = 30°$ к направлению своего первоначального движения. С какой скоростью начнет двигаться вторая частица?

2. В стальном баллоне содержится 0,2 *г* водорода и 3,2 *г* кислорода при температуре 27° С. Водород соединяется с кислородом, и после того, как реакция закончилась, давление внутри баллона увеличилось в три раза. Какова будет при этом температура внутри баллона?

3. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предельное измеримое напряжение в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает пределы измерения в m раз. Во сколько раз увеличится предельное измеримое вольтметром напряжение, если включить последовательно с вольтметром эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

4. Астрономическая камера для фотографирования Солнца имеет объектив с фокусным расстоянием $F = 10$ *м*. Перед объективом расположена круглая диафрагма диаметра $d = 5$ *см*. Применяемая фотопленка имеет чувствительность $W = 10$ *люкс·сек*. Каким должно быть при этих условиях время экспозиции τ? Известно, что прямые солнечные лучи создают на перпендикулярной к ним площадке освещенность $E = 4 \cdot 10^4$ *люкс*. Угловой диаметр Солнца α принять равным 0,01 *рад*.

Рассмотрим решения этих задач.

1. При упругом ударе сохраняются количество движения и кинетическая энергия соударяющихся тел. Однако нельзя записывать закон сохранения количества движения в скалярном виде:

$$mv = \frac{m}{2} v_1 + mv_2.$$

Такая запись верна, если обе частицы после удара движутся по той же прямой, по которой двигалась до удара налетающая частица, то есть при центральном ударе. В нашем случае, как видно из условия задачи, удар был нецентральным. Следовательно, надо учитывать, что количество движения — величина векторная и складывается по правилам сложения векторов (рис. 1).

Воспользовавшись теоремой косинусов, можно записать закон сохранения количества движения в виде

$$\left(\frac{m}{2} v_1\right)^2 = (mv)^2 + (mv_2)^2 - 2(mv_2)(mv)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где через v_1 обозначена скорость частицы с массой $\frac{m}{2}$, а через v_2 — скорость частицы с массой m. Кроме того, используем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_1^2}{4}.$$

Исключая из этих уравнений v_2, найдем

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}v.$$

Векторный характер количества движения можно учесть и иначе. Введем взаимно перпендикулярные оси координат x и y.

Для проекций количества движения на такие оси выполняются скалярные соотношения

$$mv_{2y} + \frac{m}{2}v_{1y} = 0,$$

$$mv_{2x} + \frac{m}{2}v_{1x} = mv.$$

Закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{mv^2}{2} = m\frac{v_{2y}^2 + v_{2x}^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}{2}.$$

Решив эту систему и учтя очевидное соотношение $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$, получим тот же ответ.

2. Многие поступавшие считали, что слова «реакция закончилась» означают, что в баллоне образовалось 3,4 *г* воды. Однако из условия задачи следует, что в баллоне имеется избыток кислорода, так как для образования 1 *г-моля* воды необходимы 1 *г-моль* водорода и только $^1/_2$ *г-моля* кислорода. Пусть m_1 и m_2 — массы водорода и кислорода, μ_1 и μ_2 — их молекулярные веса. До реакции в баллоне было $\frac{m_1}{\mu_1}$ молей водорода и $\frac{m_2}{\mu_2}$ молей кислорода. После реакции в сосуде образовалось $\frac{m_1}{\mu_1}$ молей воды (весь водород прореагировал, число молей воды равно числу молей водорода). При этом на образование воды ушло $\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}$ молей кислорода, и, следовательно, в баллоне осталось $\frac{m_2}{\mu_2} - \frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}$ молей кислорода.

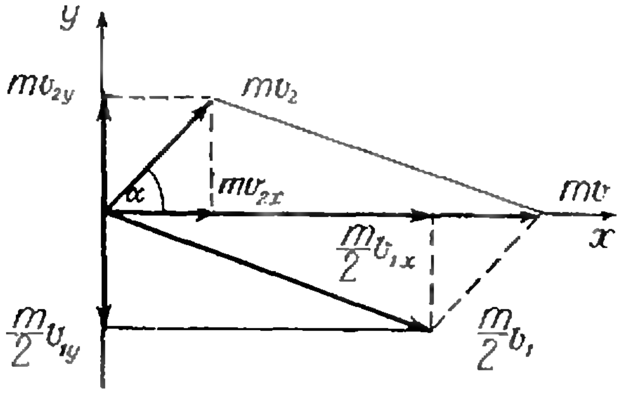


Рис. 1.

Применяя теперь закон газового состояния и закон Дальтона к газам до и после реакции, можно записать:

$$P_1V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT_1;$$

$$P_2V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} - \frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}\right)RT_2.$$

Следовательно,

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{m_1}{\mu_1}}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}\right) =$$

$$= \frac{T_2}{T_1}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}1}{0{,}2}\right) = \frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{3}{4}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{P_2}{P_1} = 3$, получаем

$$T_2 = T_1 \cdot 4 = 1200^\circ\ \text{К}.$$

3. Большинство неверных решений этой задачи связано с отсутствием у решавших четкого представления о роли добавочного сопротивления. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Обозначим сопротивление вольтметра r, максимальное напряжение на вольтметре U_0 и ток, текущий через вольтметр при этом напряжении, I_0 (рис. 2). При использовании добавочного сопротивления R_g измеряемое напряжение U_s распределяется между r и R_g пропорционально их величинам. Напряжение на вольтметре U, конечно, по-прежнему не должно превышать U_0, а измеряемое напряжение U_s может быть и больше U_0. Ток

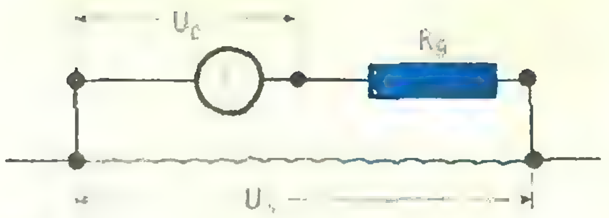


Рис. 2.

через вольтметр и R_g при этом не будет превышать I_0.

Исходя из этих соображений, для трех случаев, описанных в задаче, имеем:

$$I_0(R_1+r)=nU_0,$$
$$I_0(R_2+r)=mU_0,$$
$$I_0\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+r\right)=kU_0.$$

Здесь R_1 и R_2 — добавочные сопротивления, а k — искомая величина. Учитывая, что $I_0r=U_0$, эти уравнения можно преобразовать к виду:

$$R_1+r=nr,$$
$$R_2+r=mr,$$
$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+r=kr.$$

Из первых двух уравнений выразим R_1 и R_2. Подставляя их в третье, получим

$$k=\frac{mn-1}{m+n-2}.$$

4. Диаметр изображения Солнца на фотопленке равен $D=\alpha F$. Освещенность изображения можно найти, приняв во внимание, что вся световая энергия, проникающая через объектив, распределяется по площади изображения (потерями света мы пренебрегаем):

$$E_{\text{изобр}}D^2=Ed^2,$$

или

$$E_{\text{изобр}}=E\frac{d^2}{\alpha^2F^2}=10^4\ \text{люкс}.$$

Время экспозиции найдем из условия: $E_{\text{изобр}}\tau=W$.

Отсюда

$$\tau=\frac{W}{E_{\text{изобр}}}=10^{-3}\ \text{сек}.$$

Предлагаем вам решить самостоятельно следующий вариант.

1. Водометный катер забирает забортную воду и выбрасывает ее назад со скоростью V относительно катера. При этом он движется со скоростью v. К катеру на длинном тросе прицепили буксируемое судно, сила сопротивления которого при одинаковой скорости движения равна сопротивлению катера. Определить скорость буксира, если известно, что силы сопротивления катера и буксируемого судна изменяются пропорционально их скоростям.

2. Баллон с гелием при давлении гелия в 65 *ат* при температуре —3° С весит 21 *кг*, а при давлении в 20 *ат* при той же температуре весит 20 *кг*. Сколько гелия содержал баллон при начальном давлении 150 *ат* и температуре 27° С?

3. Какое тепло выделится в цепи (см. рис. 3) при переключении ключа K из положения *1* в положение *2*?

4. На спутнике, летящем по круговой орбите на высоте $H=100$ *км*, расположен фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=10$ *см*. Фотографируется поверхность Земли под спутником. Разрешающая способность пленки (то есть минимальный размер видимых деталей изображения, определяемый зернистой структурой фотоэмульсии) $d=10^{-2}$ *мм*. Каков минимальный размер фотографируемых предметов? Какую следует выбирать выдержку (время экспозиции τ), чтобы орбитальное движение спутника не влияло на качество изображения?

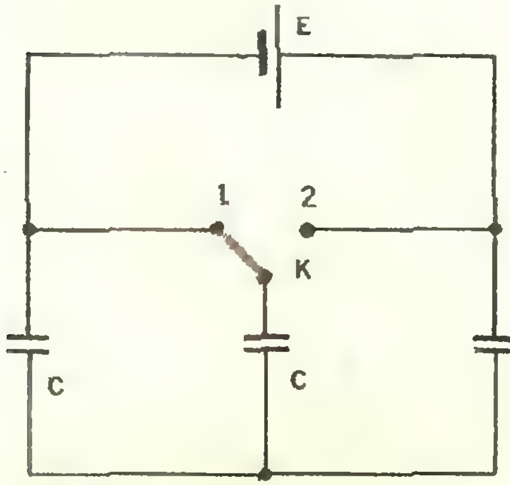


Рис. 3.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Логарифмические уравнения»

1. $x_1 = \log_3 28 - 3$, $x_2 = \log_3 10$.

2. Нет решений.

3. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

Указание. Прологарифмировать обе части по основанию 3.

4. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{15}$.

5. $x = 37$. Указание. Воспользуйтесь формулой (6).

6. $x=3$.

7. Нет решений.

8. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 1$.

Указание. Выделите корень $x_1=1$ и перейдите к основанию x.

9. $x_1 = 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}$, $x_2 = 10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}$.

Указание. Перейдите к основанию 10.

10. $x = 625$. Указание. Примените формулу (19).

11. $x_1 = -11$, $x_2 = 1$,

$$x_3 = -5 + \sqrt{14}, \quad x_4 = -5 - \sqrt{14}.$$

Указание. Используйте формулу (8′).

12. $x = -10$. Указание. Воспользуйтесь формулами (6′) и (7′).

К статье «Задачи по геометрии»

1. $\frac{a}{2}$.

2. $\frac{|a-b|}{2}$.

3. $\sqrt{ac}$.

4. 6 $см^2$.

5. $\left[\frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$.

6. 1 : 3.

К статье «Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году»

1. 50 часов.

2. $x = -4$ или $x = 1$.

3. $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$.

4. $3\sqrt{2}$. 5. 7 : 29.

К статье «Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году»

1. $V_1 = \frac{Vv}{2V - v}$.

2. $m = \Delta m \frac{P}{P_1 - P_2} \cdot \frac{T_1}{T_2} = 3$ *кг*.

3. При переключении ключа произойдет перераспределение зарядов в системе конденсаторов. Работа батареи определяется произведением протекшего через нее заряда на э.д.с. Эта работа, вообще говоря, может быть затрачена частично на увеличение энергии конденсаторов, частично на выделение тепла в цепи. В нашей схеме емкость не меняется (в обоих случаях к двум одинаковым конденсаторам, соединенным параллельно, присоединен последовательно один конденсатор такой же емкости). Напряжение на системе конденсаторов тоже неизменно и равно E. Следовательно, энергия системы не изменяется, и вся произведенная работа переходит в тепло.

Для подсчета этой работы необходимо определить заряд, протекший через батарею. Проще всего это сделать, проследив за зарядом на левом конденсаторе. До переключения на этом конденсаторе находилась половина заряда системы, то есть $\frac{1}{3}CE$ (емкость системы равна $\frac{2}{3}C$).

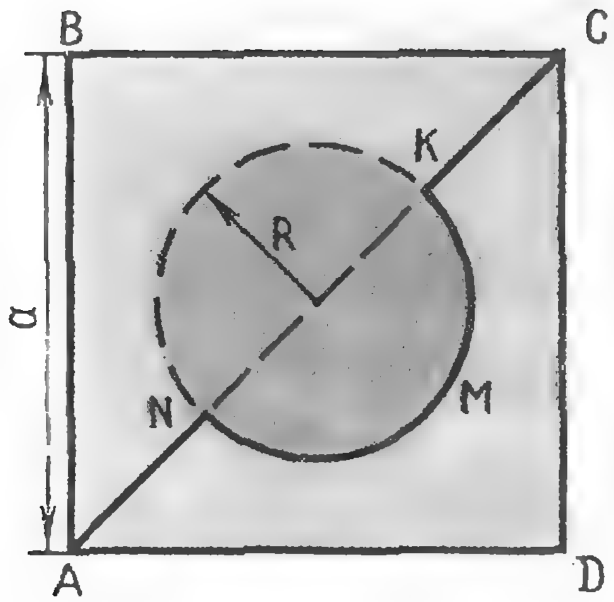
После переключения заряд удвоится. Значит, через батарею протечет заряд $\frac{1}{3}CE$ и батарея произведет работу $\frac{1}{3}CE^2$. Эта работа перейдет в тепло, которое выделится в цепи (в соединительных проводах, контактах и на внутреннем сопротивлении батареи).

4. Будем условно полагать, что минимальный размер фотографируемых предметов может быть найден из условия: размер изображения таких предметов равен разрешающей способности пленки, то есть

$$l_0 = d\,\frac{H}{F} = 10 \text{ м}.$$

Из аналогичных соображений можно определить допустимое время экспозиции: за это время спутник должен пролететь расстояние, не превышающее размера фотографируемого предмета: $\tau_0 = \frac{l}{v_0}$.

Здесь через v_0 обозначена первая космическая скорость, приближенно равная 8 *км/сек*. Подставляя числовые значения, получаем: $\tau_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ *сек*.



К заметке «Заспорили два друга»

(см. «Квант» № 5, стр. 39)

Первый путь — через сквер — имеет длину (см. рисунок)

$$AC - KN + \smile NMK. \qquad (1)$$

Второй путь — в обход сквера — имеет длину

$$AD + DC. \qquad (2)$$

В обозначениях Васи это выглядит так:

$$a\sqrt{2} - 2R + \pi R, \qquad (1')$$

$$a + a. \qquad (2')$$

По смыслу задачи $R \leqslant \frac{a}{2}$, откуда легко вывести неравенство

$$a\sqrt{2} - 2R + \pi R < 2a. \qquad (3)$$

В самом деле, преобразуя неравенство (3), получаем соотношение

$$(\pi - 2)\,R < (2 - \sqrt{2})\,a$$

или

$$\frac{R}{a} < \frac{2 - \sqrt{2}}{\pi - 2}.$$

И так как $R \leqslant \frac{a}{2}$, то $\frac{R}{a} \leqslant \frac{1}{2}$. Но

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\pi - 2} \approx \frac{2 - 1,414}{3,142 - 2} = \frac{0,586}{1,142} > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, и подавно

$$\frac{R}{a} < \frac{2 - \sqrt{2}}{\pi - 2}.$$

(Значит, Петя действительно просто шел быстрее.)

Однако без вычислений здесь обойтись трудно, так как теорема о длине объемлющей и объемлемой применима только для выпуклых фигур. В нашем же случае линия *ANMKC* не является выпуклой.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**
Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев *(зам. главного редактора)*, В. П. Лишевский, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский *(зам. главного редактора)*, Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

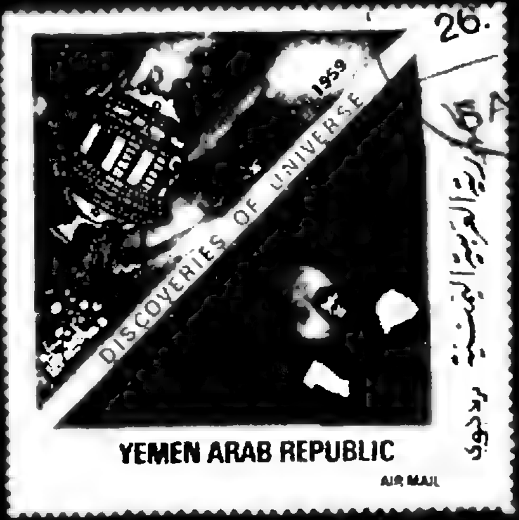
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор Т. А. Панькова

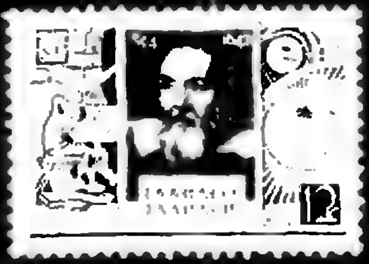
Издательство «Наука»

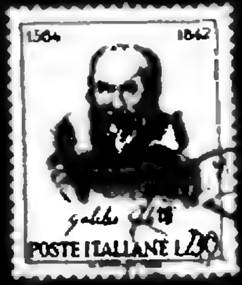
Главная редакция
физико-математической литературы

Москва. В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/II 1971 г.
Подп. в печать 29/IV 1971 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,14.
Тираж 288 115 Т-03565
Цена 30 коп. Заказ 329
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области







УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ГАЛИЛЕЮ

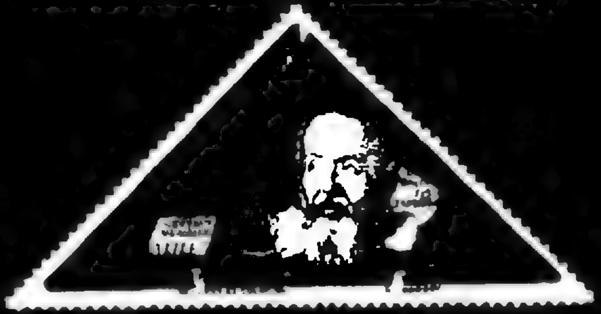
В 1964 году человечество отмечало 400-летие со дня рождения знаменитого итальянского астронома, физика и механика Галилео Галилея (1564—1642). Ему посвящен ряд почтовых марок; особенно много их выпущено к юбилею ученого.

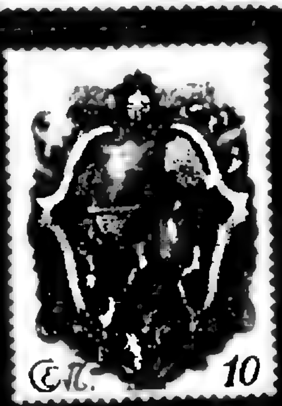
Галилей ввел описание данных эксперимента на языке математики. Ему принадлежит доказательство закона падения тел, открытие замечательного свойства маятника (период колебания при малых амплитудах не зависит от амплитуды). Услышав, что в Голландии изобретена зрительная труба, он сам сконструировал и изготовил телескоп, который давал 32-кратное увеличение. В свой телескоп Галилей наблюдал Луну, планеты и звезды. Он увидел, что Млечный путь состоит из отдельных звезд, на Луне имеются горы, вокруг планеты Юпитер вращаются четыре спутника.

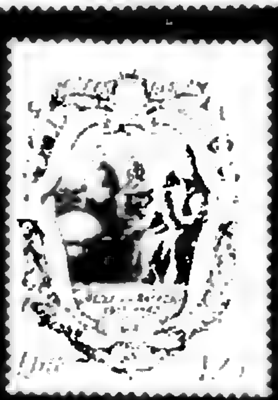
Галилей страстно отстаивал систему Коперника, которая все больше подтверждалась его наблюдениями. В 1632 году он издал свое знаменитое сочинение о строении Вселенной «Диалог о двух системах мира — птолемеевой и коперниковой».

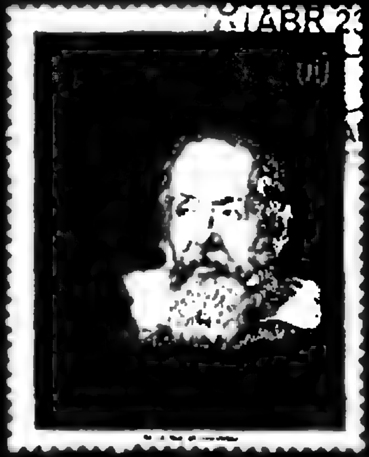
Учение Галилея, так же, как и учение Коперника, противоречило учению церкви. Больной Галилей был вызван на суд инквизиции. Под угрозой пыток он вынужден был отречься от своих «заблуждений и ересей» и предать их проклятью. Но и после отречения полуслепой старик до самой своей смерти находился под домашним арестом. Однако, несмотря на отречение, Галилей не потерял веры в настоящую науку.

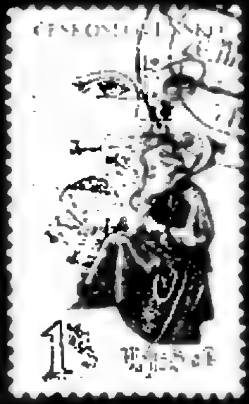
На фотографии вы видите некоторые марки, посвященные великому ученому.







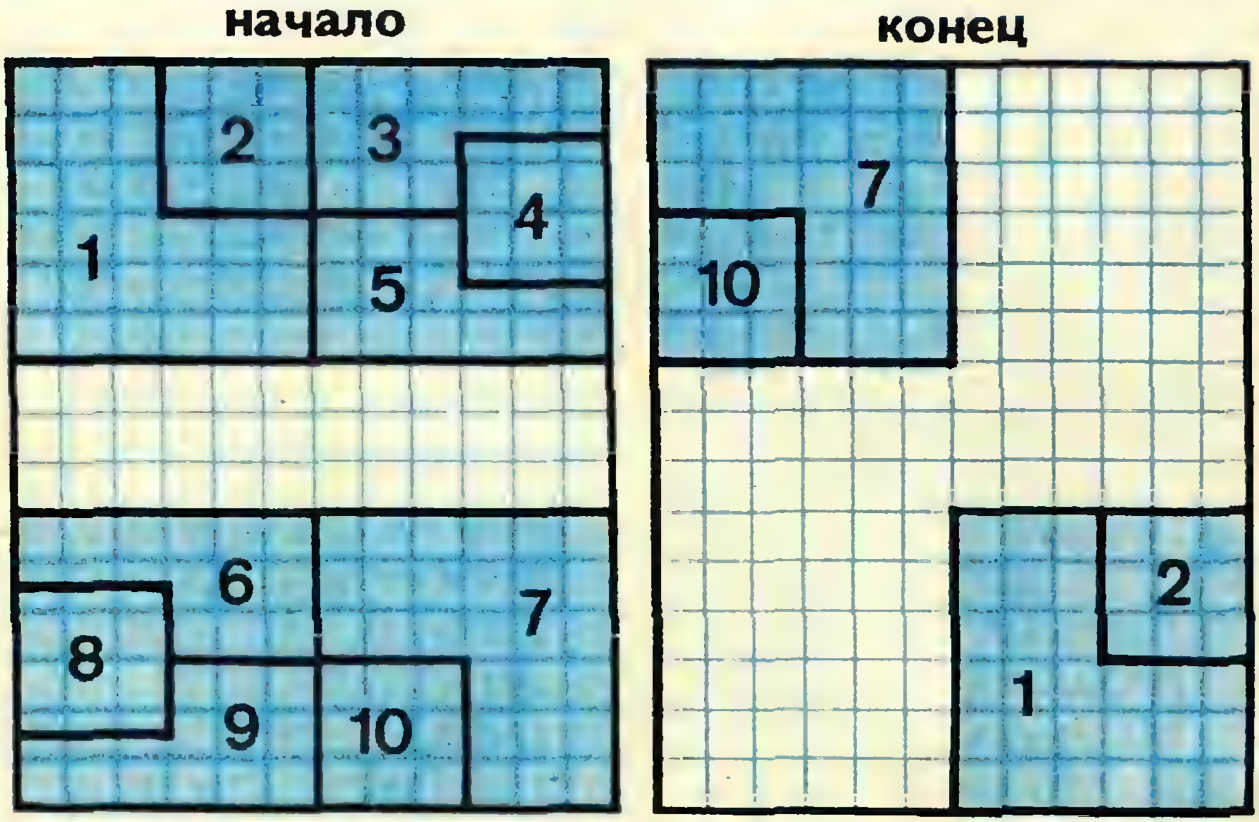




Цена 30 коп.
Индекс 70465

10-6

6


начало

конец

ИГРА ЭСКОТТА

Эта задача была предложена в августе 1938 года американским математиком Эдвардом Бриндом Эскоттом. Задача заключается в перемещении блоков по одному в прямоугольнике до тех пор, пока блоки 1 и 2 не поменяются местами с блоками 7 и 10 так, как показано на рисунке. Вращать блоки не разрешается, даже если для этого есть место. Самое короткое из известных решений содержит 66 ходов. Напишите нам, если сумеете решить задачу короче.

НОМЕР
7

В номере:

Великий закон 1 — В. И. Кузнецов

Архимед и квадратура параболы 7 — А. Д. Бендукидзе

Парадоксы реактивного движения 11 — М. С. Лившиц

Математический кружок

Принцип Дирихле 17 — А. И. Орлов

Задачник «Кванта»

Задачи 22

Решения задач М39—М49; Ф45, Ф59—Ф65 24 — Л. Г. Лиманов, В. Н. Березин, Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий

Практикум абитуриента

О задачах по фотометрии 41 — В. Е. Белонучкин

Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году 45 — Т. И. Берхина, Э. М. Кан

Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году 48 — А. Г. Кушниренко, С. В. Фомин

Информация

О математической подготовке абитуриентов 57 — М. Л. Смолянский, Г. Н. Дьяченко, В. В. Гольдберг

Уголок коллекционера

Марки, посвященные Марии и Пьеру Кюри 60 — А. В. Алтыкис

Рецензии. Библиография

Полезная книга 61 — М. Б. Балк

Ответы, указания, решения 63

«Квант» для младших школьников

У нас в гостях Вася Смекалкин 64 — В. М. Розентуллер

Задача о мостах 4-я стр. обложки

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ВЕЛИКИЙ ЗАКОН

В. И. КУЗНЕЦОВ

> **«Я сравнил силу, требующуюся для удержания Луны на ее орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и нашел, что они почти отвечают друг другу. Все это было в два чумных года... Я был в расцвете моих сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо».**
>
> **Исаак Ньютон**

1665 и 1666 годы принесли Англии большое несчастье — страну посетила чума. Спасаясь от гибели, жители покидали большие города. Из Лондона в родную деревню Вульсторп возвратился молодой философ и математик Исаак Ньютон.

В то время его интересовал вопрос: почему Луна вращается вокруг Земли? Какая сила держит ее на орбите? Ведь если такой силы нет, Луна должна улететь (рис. 1).

Мы можем представить ход рассуждений Ньютона примерно так.

Яблоко всегда падает вниз. Почему? Земля притягивает его. Если материя притягивает другую материю, то должна существовать сила, пропорциональная количеству материи. Если это так, то сила притяжения Земли должна быть огромна. Значит, Луну, как и яблоко, притягивает Земля.

Тогда и родился закон всемирного тяготения.

Проделаем расчет, аналогичный расчетам Ньютона.

Луна движется по орбите, близкой к окружности. Время $T_л$, за которое она совершает один оборот вокруг Земли, равно 27,3 суток. Расстояние Земля — Луна примерно в 60 раз больше земного радиуса $R_З$. Если тело движется по окружности со скоростью v, оно испытывает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Радиус лунной орбиты $R_л$ равен 384 400 *км*, скорость движения Луны по орбите $v = 2\pi \frac{R_л}{T_л} = 3650$ *км/ч*; тогда центростремительное ускорение a, испы-

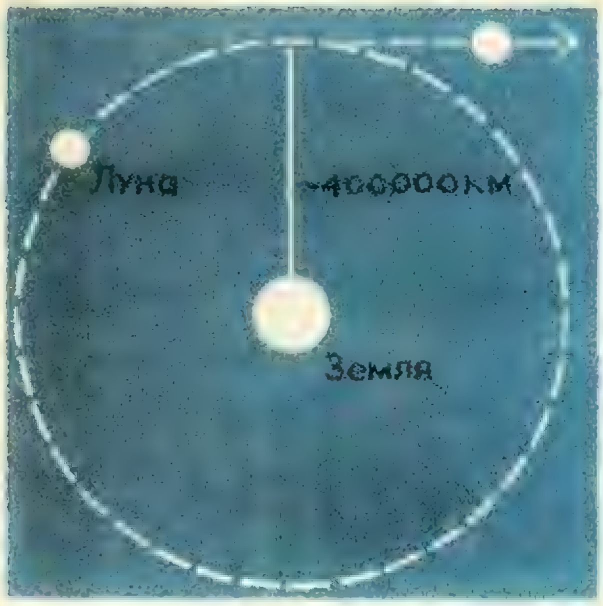


Рис. 1.

тываемое Луной, окажется равным $\frac{v^2}{R_Л} = 0{,}0027$ м/сек². А ведь яблоко притягивается Землей с гораздо большей силой. Земное ускорение силы тяжести равно 9,81 м/сек².

Почему же Земля притягивает Луну в тысячи раз слабее, чем яблоко? Роберт Гук с помощью изобретенных им пружинных весов пытался измерить изменение силы тяжести. Но на вершине горы груз растягивал пружину точно так же, как и на берегу моря. И все же Ньютон предположил, что земное тяготение ослабляется расстоянием. Высота гор невелика по сравнению с размерами Земли и тем более с расстоянием от Земли до Луны.

После исследования законов движения планет, установленных Иоганном Кеплером *), Ньютону удалось найти простое правило убывания силы тяготения с расстоянием. Это правило гласит: если центры двух шаров, масса которых равномерно распределена по их объемам, находятся на расстоянии r, то сила притяжения F между шарами направлена по линии, соединяющей центры шаров, пропорциональна произведению их масс m_1, m_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

γ в этой формуле — постоянная величина, ее можно определить только опытным путем.

Вернемся опять к притяжению Луны. Луна находится на расстоянии 60 земных радиусов, а яблоко удалено только на один земной радиус от центра Земли. Поэтому сила, а значит, и ускорение на лунной орбите в 60^2 раз меньше, чем у поверхности Земли:

$$a = \gamma \frac{M_З}{(60R)^2},$$

$$g = \gamma \frac{M_З}{R^2}.$$

Разделим первое из этих выражений на второе:

$$\frac{a}{g} = \frac{1}{3600}, \quad \text{или} \quad a = 0{,}0027 \text{ м/сек} \; ^{*)}.$$

Полученная величина удивительно точно совпадает с ранее вычисленным значением центростремительного ускорения Луны.

Так Ньютону удалось проверить закон всемирного тяготения. Правда, в его вычислениях не было такого хорошего согласия: работая в Вульсторпе, Ньютон не располагал точным значением земного радиуса. Только через несколько лет эта величина была измерена с достаточной точностью.

Несмотря на полученное совпадение величин ускорений, Ньютон не был удовлетворен проверкой. Нужно было еще решить задачу о притяжении яблока, лежащего на Земле. Можно ли считать, что земной шар притягивает яблоко так, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в центре?

---

*) См. «Квант» № 1, 1971, стр. 20.

*) Постоянная тяготения γ сокращается — ее вовсе не нужно знать, чтобы убедиться в правильности закона тяготения, открытого Ньютоном.

Близкие к яблоку части притягивают его сильнее, чем далекие (рис. 2). Результирующую силу можно вычислить только с помощью интегрального исчисления, но в то время оно еще не было открыто. Изучение движения Луны было отложено на несколько лет. Ньютон занялся оптикой: шлифовал линзы, построил замечательный отражательный телескоп, с увлечением изучал оптические спектры... Но мысли о тяготении не покидали его. Потребовались годы на создание интегрального исчисления, и на его основе Ньютон доказал замечательную теорему: оболочка сферической формы с равномерно распределенной по ней массой притягивает тело, находящееся вне ее, как если бы вся масса оболочки находилась в центре сферы (рис. 3, *а*). Землю можно представить как набор сферических оболочек (рис. 3, *б*). Действие каждой оболочки не зависит от других, а сила тяготения не поглощается веществом Земли. Если принять эти два положения, из которых второе — одно из самых удивительных свойств гравитации, то естественно заключение, что яблоко притягивается Землей именно так, как предполагал Ньютон.

Итак, падение яблока на Землю и движение Луны по своей орбите вызвано одной причиной — земным притяжением. А какие силы управляют движением планет? Планеты движутся вокруг Солнца, значит, сила тяготения должна исходить от Солнца. Дальнейшее обобщение — любые два тела притягиваются по такому же закону.

В начале XVII века Иоганн Кеплер открыл законы движения планет. Первый закон Кеплера утверждал, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце. Смысл второго закона Кеплера в том, что планеты движутся по своим орбитам быстрее, когда приближаются к Солнцу, а удаляясь, начинают двигаться медленнее: линия, соединяющая планету и Солнце, «выметает» в равные времена равные площади.

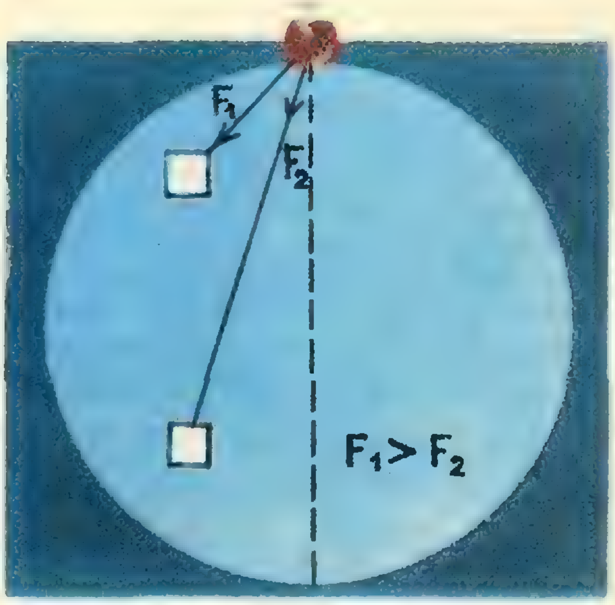


Рис. 2.

Квадраты времен обращений планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца — вот содержание третьего закона.

Кеплер вывел эти законы, основываясь на многолетних записях астрономических наблюдений. Ньютон, опираясь на свои законы движения и закон тяготения, смог теоретически получить законы Кеплера.

Однажды в лондонской кофейне встретились члены английского Королевского общества — знаменитый архитектор Кристофер Рен, Роберт

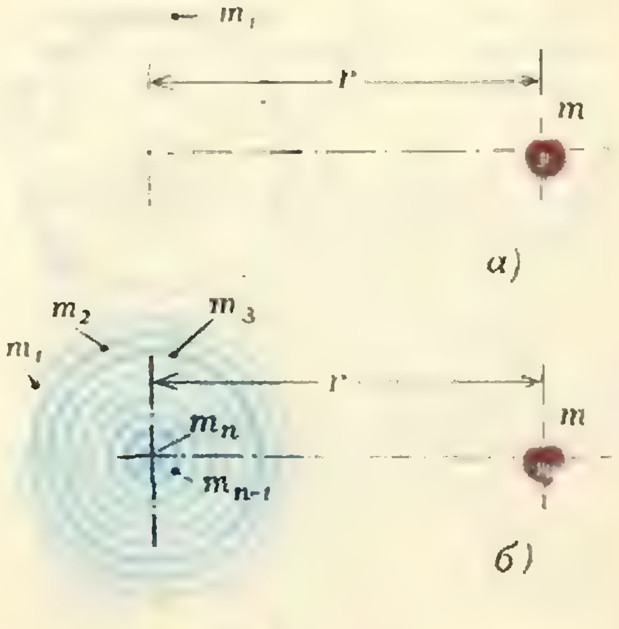


Рис. 3. $F=\gamma\frac{m\Sigma m_n}{r^2}$.

Гук и Эдмонд Галлей. Галлей рассказал, что ему удалось получить третий закон Кеплера, объединив закон тяготения и законы движения Ньютона, но только для случая круговых орбит. Движение по круговой орбите может происходить, если на планету действует внешняя сила, направленная к центру окружности и равная Mv^2/R. Эту силу создает притяжение между планетой и Солнцем. Поэтому $\gamma \frac{M_С M}{R^2} = \frac{Mv^2}{R}$. Если вспомнить, что скорость движения планеты по орбите $v = \frac{2\pi R}{T}$, то, подставив это выражение в предыдущую формулу, получим закон Кеплера:

$$\gamma \frac{M_С}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}, \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{T^2} = \text{const}.$$

Когда Галлей кончил свой рассказ, Рен предложил приз тому, кто докажет, что закон убывания тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния справедлив и для движения по эллиптическим орбитам.

Галлей обратился к Ньютону. Ньютон ответил, что это им уже сделано, и в ноябре 1684 года рукопись с расчетами была в руках Галлея. На подготовку рукописи и ее печатание ушло несколько лет. Наконец в сентябре 1687 года книга Ньютона увидела свет. Она называлась «Математические начала натуральной философии». Законы, примененные к изучению планет солнечной системы, позволили получить важные предсказания. Так, Ньютон «взвесил» Солнце, выразив его массу в единицах земных масс:

$$\gamma \frac{M_С M_З}{R_З^2} = M_З \frac{v^2}{R_З} = M_З \frac{4\pi^2 R_З^2}{R_З T_З^2},$$

$$M_С = \frac{4\pi^2 R_З^3}{\gamma T_З^2},$$

$$\gamma \frac{M_З M_Л}{R_Л^2} = M_Л \frac{v^2}{R_Л} = M_Л \frac{4\pi^2 R_Л^2}{R_Л T_Л^2},$$

$$M_З = \frac{4\pi^2 R_Л^3}{\gamma T_Л^2},$$

где $R_З$ и $R_Л$ — радиусы орбит Земли и Луны соответственно.

Получился очень интересный результат. Луна — спутник Земли, а Земля — спутник Солнца. Масса спутника каждый раз сокращается. В первом уравнении, когда закон всемирного тяготения применен к Солнцу и Земле, сокращается масса Земли, а во втором — масса Луны. Так Ньютон выразил массы Земли и Солнца через легко доступные астрономическим измерениям величины — радиусы орбит и периоды обращения. Неизвестной ему оставалась величина γ. Но если взять отношение солнечной и земной масс, то постоянная γ сокращается и получается формула

$$\frac{M_С}{M_З} = \frac{R_З^3 T_Л^2}{R_Л^3 T_З^2} = \left[\frac{\text{расстояние Земля — Солнце}}{\text{расстояние Луна — Земля}}\right]^3 \times \left[\frac{1 \text{ месяц}}{1 \text{ год}}\right]^2.$$

Так Ньютону удалось выразить отношение масс Солнца и Земли через известные астрономам величины.

Чтобы вычислить массу Солнца в более привычных единицах, скажем килограммах, нужно было оценить массу Земли. Ньютон знал только ее объем. Средняя плотность вещества Земли в его время не была известна. Не вызывало сомнения только то, что плотность материков больше плотности воды. Но во сколько раз средняя плотность Земли превосходит плотность воды океана? Ньютон пришел к выводу, что средняя плотность Земли заключена между 5 *г/см*^{3} и 6 *г/см*^{3}. Только через девяносто лет сэр Генри Кавендиш «взвесил» Землю, измерив с помощью изящных крутильных весов величину γ. Плотность Земли оказалась равной 5,5 *г/см*^{3}.

А как определить массу Луны? Ведь она сокращается во всех формулах. Все же Ньютон нашел способ оценить и эту величину.

Тысячелетиями загадкой для людей оставалась причина приливов в морях и океанах. Римляне связывали приливы с положением на небе Луны. «Была полная Луна, и поднялся большой прилив»,— читаем мы в записях Юлия Цезаря. Однако на вопрос: почему происходят приливы? — не было никакого ответа. Ньютон нашел правильное объяснение.

Рассмотрим движение трех тел одинаковой массы, свободно лежащих одно на другом (рис. 4). Пусть в какой-то момент времени на тела начнут действовать три силы $F_1 > F_2 > F_3$. Тогда пластинка *3* начнет отставать, а пластинка *1* будет опережать «сердечник» *2*. Если пластинки соединить пружинками с центральным телом, то растяжение пружин уравновесит силы $F_1 - F_2$, $F_2 - F_3$.

Землю с ее гидросферой можно представить как «падающие» на Луну три тела: твердую сердцевину и два слоя воды — один, обращенный к Луне, и другой, находящийся на противоположной от Луны стороне. На эти условные «тела» со стороны Луны действуют разные силы. Рассмотрим действие лунного притяжения на единицу земной массы в точке *A* (рис. 5). Эта сила равна

$$\frac{[\text{постоянная тяготения} \times \text{масса Луны}]}{[\text{расстояние от } A \text{ до центра Луны}]^2} =$$

$$= \gamma \frac{M_л}{R^2 \cos^2 \alpha + (r - R \sin \alpha)^2} \approx$$

$$\approx \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 + 2 \frac{R}{r} \sin \alpha \right).$$

В точке *K* $\sin\alpha = 1$ и сила притяжения $F_K = \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 + 2 \frac{R}{r}\right)$, а в точке *L* $\sin\alpha = -1$ и $F_L = \gamma \frac{M_л}{r^2} \left(1 - 2 \frac{R}{r}\right)$. Таким образом, Луна притягивает разные части Земли с разной силой.

Земная «твердь» и водяная оболочка связаны «пружинами» тяготения. На единицу земной массы в центре Земли действует сила $F_ц = \gamma \frac{M_л}{r^2}$. Она-то и определяет движение твердой части Земли. Находящаяся в точке *L* океанская вода «отстает» при «падении» Земли на Луну — здесь на единицу массы действует сила $F_L - F_ц = -2\gamma \frac{M_л}{r^3} R$, меньшая $F_ц$. В точке *K* сила больше, чем $F_ц$, и в ее окрестности океанская вода стремится опередить твердую сердцевину. Этому препятствуют «пружины» земного тяготения. Лунное притяжение слегка «растягивает» эти пружины приливной силой $F = 2\gamma \frac{M_л}{r^3} R$. На противоположных сторонах Земли возникают приливные «горбы». Они стремятся сохранить по отношению к Луне одно и то же положение. Если бы Луна была неподвижна относительно Земли, а Земля не вращалась вокруг своей оси, то водяная оболочка сохраняла бы форму, вытянутую по направлению к Луне. Вследствие вращения Земли приливная

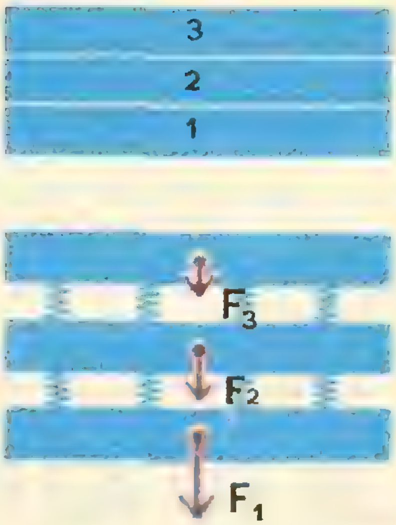


Рис. 4.

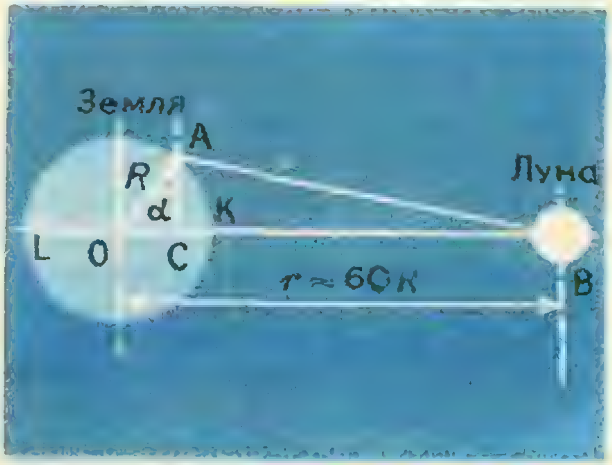


Рис. 5.

волна движется относительно материков со скоростью 1800 *км/ч* и несколько отстает от движения Луны.

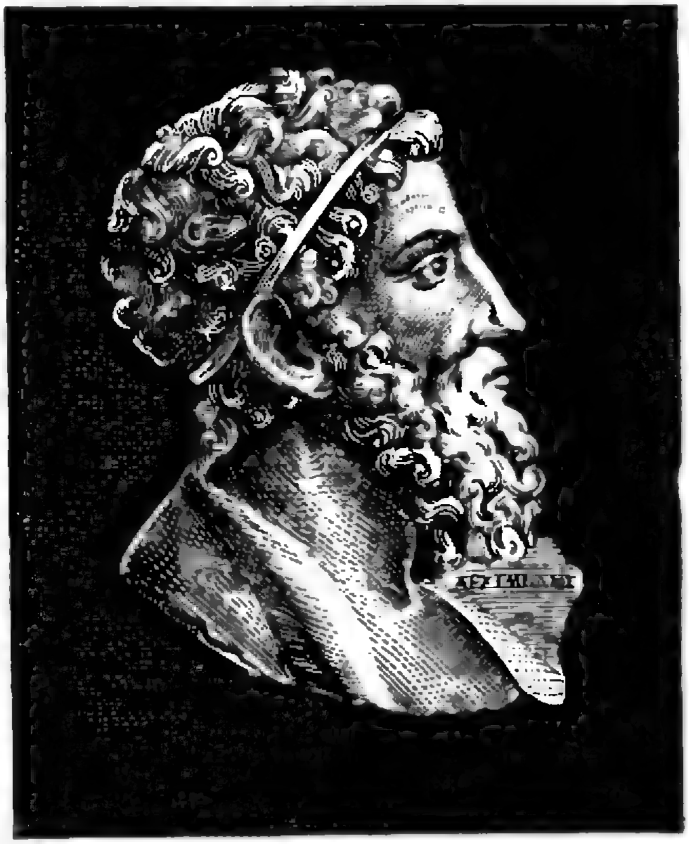
Притяжение Солнца во много раз сильнее лунного, но неоднородность солнечного притяжения невелика. Поэтому и солнечная приливная сила $F_{\text{С}} = 2\gamma \frac{M_{\text{С}}}{r_{\text{СЗ}}^3} R$ меньше лунной. Масса Солнца в 27 миллионов раз больше массы Луны, зато расстояние Солнце — Земля $r_{\text{СЗ}}$ в 389 раз больше r — расстояния Земля — Луна. Так что $F_{\text{С}} = 2\gamma \frac{27 \cdot 10^6 M_{\text{л}}}{(389r)^3} R \approx 0{,}45 F_{\text{л}}$, то есть «солнечные» приливы слабее лунных. Конечно, мы не различаем этих приливов. Два раза в месяц Луна и Солнце находятся на одной прямой с Землей, солнечная и лунная приливные силы складываются — наблюдается большой прилив. Если же Земля, Солнце и Луна расположены так, что направление Земля — Солнце оставляет угол 90° с направлением Земля — Луна, то приливные силы Солнца и Луны ослабляют друг друга и наблюдается малый прилив. У затерянных в океане островов, где приливные явления не искажаются влиянием берегов, большие приливы поднимаются на 1,30 *м*, а малые — всего на 0,65 *м*. Если произвести расчеты, то можно по величинам большого и малого приливов оценить отношение солнечной и лунной масс.

Так необычный «спутник» Луны — океанский прилив помог Ньютону рассчитать массу Луны. Расчет этот был весьма неточным. Задача осложнялась трением водяных масс о дно океана и другими трудноучитываемыми обстоятельствами. Точное значение массы было найдено уже после запуска спутников Луны. Измеренные периоды обращения и характеристики траектории «лунников» дали возможность с большой точностью определить массу, вычисленную Ньютоном лишь приблизительно. По движению искусственных спутников Луны ученые определили, что лунная масса распределена неравномерно по ее объему — законы Кеплера выполняются для спутников Луны приближенно.

До Ньютона астрономы считали, что кометы пролетают только один раз через солнечную систему. Однако Ньютон показал, что кометы могут двигаться по замкнутым эллиптическим орбитам. Особенность их орбит— сильная вытянутость. Поэтому кометы уходят на большие расстояния от Солнца и период обращения их весьма велик. Эдмонд Галлей сумел рассчитать время возвращения одной из самых знаменитых комет, записи о появлении которой сохранились с древнейших времен. Расчеты подтвердились — комета возвращалась в предсказанные Галлеем сроки. Ее можно наблюдать каждые 76 лет. В 1986 году эта комета вновь будет видна с Земли. Только один астроном Иоганн Галле, проживший почти сто лет, дважды наблюдал комету Галлея. Возвращение комет — еще одно подтверждение закона всемирного тяготения.

Решения многих других замечательных проблем, в которых применялся закон всемирного тяготения, содержались в «Математических началах»: это и расчет прецессии земной оси, и доказательство того, что любой камень, брошенный на Земле, движется по эллипсу, один из фокусов которого — центр Земли, и, наконец, исследование влияния взаимного тяготения планет на их движение. Влияние планет невелико по сравнению с солнечным тяготением, однако такая планета, как Юпитер, изменяет характер орбиты соседнего Сатурна, или, как говорят астрономы, возмущает его движение.

Уже третье столетие законы Ньютона используются при расчетах станков и артиллерийских орудий, траекторий спутников Земли и ракет. Математические формулы,· написанные более двух веков назад, закладываются в счетно-решающие машины самой новейшей конструкции, неопровержимо подтверждающие своими расчетами справедливость этих законов.



А. Д. Бендукидзе

АРХИМЕД И КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ

Еще в глубокой древности ученые занимались вычислением площадей Общего метода тогда еще не существовало. (Такой метод дает нам интегральное исчисление.) Поэтому при вычислении площади фигуры использовались ее специфические свойства. В статье рассказывается, как Архимед, используя свойства параболы, вычислил площадь параболического сегмента.

Кому не известно имя Архимеда? Этот великий мыслитель оставил неизгладимый след в истории человечества. Исследователи его творчества с восхищением говорят о нем как о великом инженере, об астрономе-наблюдателе, не имеющем себе равных, о гениальном математике, о человеке, знающем все тайны природы...

Математические работы Архимеда подкупают читателя ясностью мысли, изяществом, доведенной до совершенства техникой вычислений. Известный греческий историк Плутарх пишет:

«Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед».

Не является исключением и одна из первых математических работ Архимеда — «Квадратура параболы».

Эта работа посвящена вычислению площади параболического сегмента, то есть фигуры, ограниченной параболой и прямой, и представляет, в сущности, доказательство следующей теоремы:

Площадь параболического сегмента равна четырем третьим площади треугольника, имеющего с сегментом общее основание и высоту.

Работа естественным образом делится на две части. В первой части Архимед показывает, как эта теорема была им обнаружена при помощи механики, а именно при помощи им же установленного «закона рычага», во второй же части дает ее геометрическое доказательство.

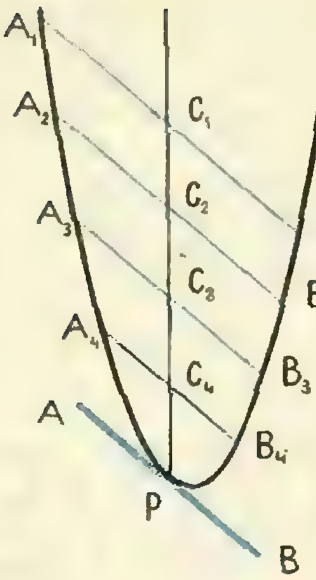


Рис. 1.

Мы познакомим читателя с содержанием второй части работы.

1. Сформулируем одно замечательное свойство параболы *), на котором основано все дальнейшее изложение.

Если прямая AB касается параболы в точке P и хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... параллельны этой касательной, то середины хорд — точки C_1, C_2, C_3, ... —лежат на одной прямой; эта прямая параллельна оси параболы и проходит через точку P (рис. 1).

Кроме того,

$$\frac{A_1C_1^2}{PC_1}=\frac{A_2C_2^2}{PC_2}=\frac{A_3C_3^2}{PC_3}=\dots \qquad (1)$$

Попробуйте доказать эти свойства параболы сами.

2. Рассмотрим теперь параболический сегмент, ограниченный дугой параболы APB и хордой AB (рис. 2).

Точку параболы P, касательная в которой параллельна хорде AB, назовем вершиной сегмента, а саму хорду AB — основанием сегмента. C — середина основания. Согласно свойству (1) прямая PC параллельна оси параболы.

Впишем в сегмент треугольник APB и опишем около сегмента параллелограмм $ABMN$ $(AN \parallel BM \parallel PC)$.

Так как площадь треугольника APB равна половине площади параллелограмма $ABMN$, она больше половины площади сегмента, и поэтому сумма площадей двух оставшихся по краям сегментов меньше половины площади всего сегмента. Если в эти оставшиеся сегменты тем же способом вписать треугольники, то сумма их площадей будет больше половины суммы площадей самих сегментов, и поэтому сумма площадей оставшихся после второго вписывания четырех сегментов будет меньше одной четверти площади данного сегмента. Если далее в эти четыре сегмента тем же способом вписать треугольники, то вне этих треугольников останутся восемь маленьких сегментов, сумма площадей которых будет меньше одной восьмой площади данного сегмента, и т. д.

Таким образом, продолжая этот процесс, в сегмент можно будет вписать такой многоугольник, что сумма площадей сегментов, оставшихся вне этого многоугольника, будет сколь угодно малой.

3. Разделим отрезок AC пополам и через точку деления D проведем прямую DE, параллельную PC (рис. 3). Докажем, что

$$PC=\frac{4}{3}ED. \qquad (2)$$

В самом деле, если провести $EF \parallel AC$, то согласно равенствам (1) можем написать, что $\frac{AC^2}{PC}=\frac{EF^2}{PF}$.

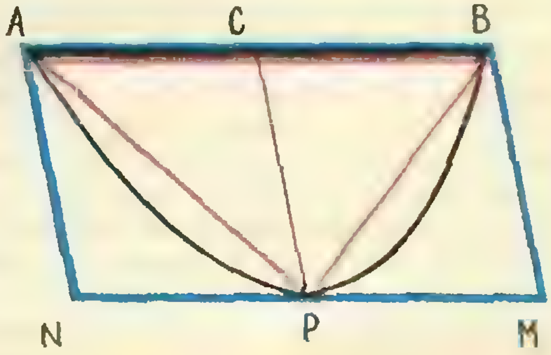


Рис. 2.

---

*) Напомним, что параболой называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки и не проходящей через нее прямой. В соответствующим образом подобранной системе координат она задается уравнением $y=ax^2$.

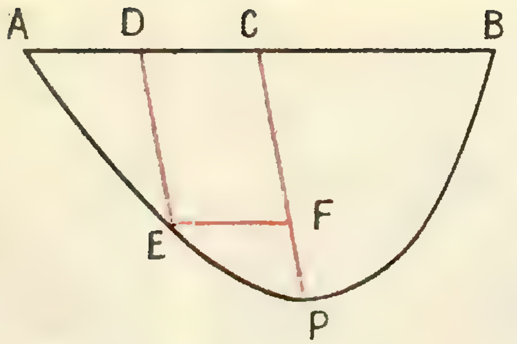


Рис. 3.

Поскольку $AC=2EF$, $PC=4PF$. Таким образом, $FC=ED=3PF$; отсюда уже получается требуемое равенство.

4. После того как в сегмент был вписан треугольник APB, по краям осталось два сегмента. Впишем в эти сегменты тем же способом треугольники AEP и PKB (рис. 4).

Докажем, что площадь треугольника APB в восемь раз больше площади каждого из этих треугольников. Для доказательства заметим, что если через вершину E сегмента AEP провести прямую ED, параллельную оси параболы, она по свойству 1 разделит хорду AP, а следовательно, и отрезок AC пополам. Таким образом, $AD=DC$. Далее, так как $PC=2LD$, из равенства (2) следует, что $3\,LD=2\,ED$. Отсюда в свою очередь получаем, что

$$LD=2EL. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь треугольники ADL и ALE. Их основания DL и EL лежат на одной прямой, а вершина A — общая. Поэтому с учетом равенства (3) имеем $S_{\triangle ADL}=2S_{\triangle ALE}$.

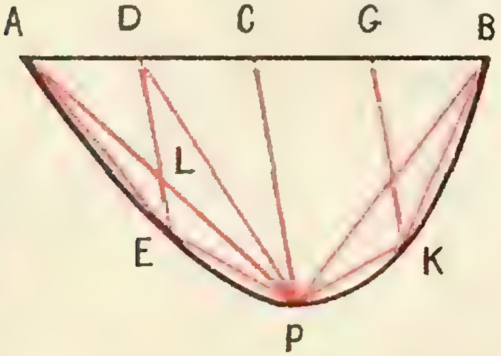


Рис. 4.

Подобным же образом, так как основания DL и LE треугольников DLP и LEP лежат на одной прямой, а P — их общая вершина, имеем $S_{\triangle DLP}=2S_{\triangle LEP}$.

Из последних двух равенств $S_{\triangle APD}=2S_{\triangle AEP}$ и учитывая, что $S_{\triangle APB}=4S_{\triangle APD}$, получим окончательно $S_{\triangle APB}=8S_{\triangle AEP}$.

Аналогично доказывается и второе равенство: $S_{\triangle APB}=8S_{\triangle PKB}$.

Если площадь треугольника APB обозначить через s_1, а сумму площадей треугольников AEP и PKB — через s_2, то согласно доказанному $s_1=4s_2$. На рисунке 5 эти площади окрашены соответственно оранжевым и синим.

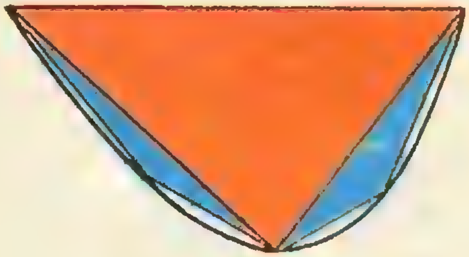


Рис. 5.

5. Продолжим процесс вписывания треугольников. Площадь первого треугольника обозначим через s_1, сумму площадей треугольников, вписанных на втором шаге, — через s_2, сумму площадей четырех треугольников, вписанных на третьем шаге,— через s_3 и т. д.

Получим бесконечную числовую последовательность

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots, \qquad (4)$$

в которой каждый член, начиная со второго, в четыре раза меньше предыдущего *), то есть

$$s_2=\frac{1}{4}s_1,\quad s_3=\frac{1}{4}s_2,\quad \ldots,$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{4}s_n,\quad \ldots \qquad (5)$$

---

*) Таким образом, эта последовательность образует геометрическую прогрессию. Вы легко можете вычислить ее сумму. Однако для греческих математиков эта задача представляла определенные трудности.

Докажем одно замечательное свойство этой последовательности, а именно докажем, что для любого n справедливо следующее равенство:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n + \frac{4}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1. \quad (6)$$

В самом деле, так как $4(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n) = 4s_1 + (4s_2 + 4s_3 + \ldots + 4s_{n-1} + 4s_n)$, из соотношений (5) следует, что $4(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1 + (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1})$, то есть $3(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) + 4s_n = 4s_1$.

Равенство (6) получается отсюда делением на 3.

6. Теперь уже можно доказать, что площадь параболического сегмента $S = \frac{4}{3} s_1$.

Архимед доказывает это равенство так называемым «методом исчерпывания». Этот метод, принадлежащий одному из крупнейших греческих математиков — Евдоксу (IV век до н. э.), заменял во времена Архимеда метод предельного перехода.

Предположим, что $S > \frac{4}{3} s_1$ или $S < \frac{4}{3} s_1$.

Докажем, что это невозможно.

Предположим сначала, что

$$S > \frac{4}{3} s_1. \quad (7)$$

Мы уже отмечали, что, продолжая процесс вписывания, можно добиться того, чтобы сумма площадей оставшихся сегментов была сколь угодно малой. Это значит, что, подбирая соответствующим образом n, разность $S - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n)$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа. Подберем n так, чтобы выполнялось неравенство $S - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n) < S - \frac{4}{3} s_1$. Тогда $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n > \frac{4}{3} s_1$, а это, согласно равенству (6), невозможно*). Таким образом, неравенство (7) неверно.

Предположим теперь, что

$$S < \frac{4}{3} s_1. \quad (8)$$

Так как члены последовательности (4) стремятся к нулю, n можно выбрать так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\frac{4}{3} s_n < \frac{4}{3} s_1 - S.$$

Из этого неравенства с учетом равенства (6) получим

$$S < s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n,$$

что, конечно же, невозможно.

Итак, и неравенство (8) неверно. Тем самым доказано, что $S = \frac{4}{3} s_1$.

7. Сделаем в заключение следующее замечание.

Как известно, древние греки под квадратурой фигуры понимали построение квадрата, равновеликого этой фигуре. Задача о квадратуре в «греческом смысле» не всегда имеет решение. Доказано, например, что для круга она неразрешима. То есть нельзя построить (при помощи циркуля и линейки) квадрат, равновеликий данному кругу.

Полученный Архимедом результат примечателен и в том смысле, что показывает возможность положительного решения задачи о квадратуре параболического сегмента: зная основание и высоту сегмента, всегда можно построить квадрат, равновеликий этому сегменту.

---

*) Мы предположили, что $S > \frac{4}{3} s_1$, следовательно, $S - \frac{4}{3} s_1$ — положительное число.

ПАРАДОКСЫ РЕАКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мощность ракетного двигателя

При работе реактивного двигателя химическая энергия топлива преобразуется в кинетическую энергию с определенным коэффициентом полезного действия: часть этой химической энергии расходуется на различные тепловые потери (нагрев стенок камеры двигателя, тепло, уносимое истекающими газами, и др.). Отношение полученной кинетической энергии к химической энергии сгоревшего топлива называется внутренним (или эффективным) коэффициентом полезного действия $\eta_{эфф}$. Обычно он бывает порядка $0{,}3 \div 0{,}5$.

Пока умышленно не уточнялось — кинетическая энергия чего?

Рассмотрим систему координат, связанную с ракетой. За очень маленькое время Δt из сопла ракеты будет выброшена масса газа Δm. Если Δt достаточно мало, то скорость ракеты практически не меняется и систему координат, связанную с ней, можно считать инерциальной. В этой системе координат ракета неподвижна, а значит, химическая энергия топлива переходит в кинетическую энергию газов.

Пусть u — относительная скорость истечения газов из сопла ракеты; тогда кинетическая энергия массы газа Δm, вылетающего из сопла ракеты,

$$E_{\Delta m} = \frac{\Delta m u^2}{2}.$$

Так как мощность равна работе, совершаемой в единицу времени, то выражение для мощности мы получим, если вместо величины отбрасываемой массы газов подставим в наше выражение секундный расход массы μ.

Таким образом, мощность двигателя ракеты

$$P_{\text{дв}} = \frac{\mu u^2}{2}.$$

Это же выражение можно было бы получить и другим путем, рассматривая движение ракеты и газов в подвижной системе координат. При этом полученная за время работы ракетного двигателя кинетическая энергия E расходуется на изменение кинетической энергии выбрасываемых газов $\Delta E_{\text{газа}}$ и изменение кинетической энергии ракеты:

$$\Delta E = \Delta E_{\text{газа}} + \Delta E_{\text{ракеты}}.$$

Найдем отдельно каждый из членов этой суммы.

1. Пусть скорость ракеты до выброса топлива Δm равна v. Тогда

$$\Delta E_{\text{газа}} = \frac{\Delta m (u - v)^2}{2} - \frac{\Delta m v^2}{2},$$

где $\frac{\Delta m v^2}{2}$ — кинетическая энергия, которой обладала отбрасываемая масса газов до ее истечения (когда она находилась в ракете и двигалась вместе с ней со скоростью v), $\frac{\Delta m (u - v)^2}{2}$ — кинетическая энергия, которой обладает отбрасываемая масса газов после ее истечения из сопла ракеты с относительной скоростью u (так как в неподвижной системе координат ее скорость будет $u-v$).

2. Теперь займемся вторым членом — $\Delta E_{\text{ракеты}}$. Так как за время Δt из сопла выбрасывается масса газа Δm, унося количество движения $\Delta m u$, то на эту массу газа в соответствии со II законом Ньютона действует сила

$$F = \frac{\Delta m u}{\Delta t} = \mu u.$$

По III закону Ньютона такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на ракету — это и есть сила тяги двигателя. Если за время Δt ракета пролетела расстояние ΔS, то сила тяги двигателя совершила работу, изменяя кинетическую энергию ракеты на величину

$$\Delta E_{\text{ракеты}} = F \cdot \Delta S = \mu u \Delta S.$$

Значит,

$$\Delta E = \mu u \Delta S + \frac{\Delta m (u - v)^2}{2} - \frac{\Delta m v^2}{2}.$$

Соответственно для мощности, разделив ΔE на Δt, мы получим

$$P_{\text{дв}} = \mu u v + \frac{\mu (u - v)^2}{2} - \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu u^2}{2},$$

то есть то же самое выражение, что и раньше, когда рассматривалась система координат, связанная с ракетой.

Итак, мощность ракетного двигателя $P_{\text{дв}} = \frac{\mu u^2}{2}$ и при стационарной работе двигателя остается постоянной.

Запомним это.

Полезная механическая мощность двигателя
(мощность, развиваемая силой тяги)

Основная задача двигателя —увеличивать кинетическую энергию ракеты. Мы видели, что сила тяги равна $F_{\text{т}} = \mu u$, а изменение кинетической энергии ракеты за время Δt равно $\Delta E_{\text{ракеты}} = \mu u \cdot \Delta S$. Поэтому полезная мощность тяги двигателя равна

$$W_{\text{п}} = \frac{\Delta E_{\text{ракеты}}}{\Delta t} = \mu u \frac{\Delta S}{\Delta t} = \mu u v.$$

При стационарной работе двигателя, то есть при постоянном секундном расходе массы и постоянной скорости истечения газов, полезная мощность двигателя растет пропорционально скорости ракеты.

На первый взгляд этот вывод кажется парадоксальным. В самом деле, поскольку формула, которую мы получили, справедлива при любой скорости ракеты, то она будет справедлива и при такой скорости ракеты, при которой величина получающейся полезной мощности станет больше мощности, развиваемой ракетным двигателем за счет энергии топлива!

Из сравнения выражений для мощности двигателя и для полезной мощности видно, что при $v = \frac{u}{2}$ полезная мощность становится равной мощности ракетного двигателя. Следовательно, при дальнейшем увеличении скорости ракеты она будет больше мощности двигателя. Такова та количественная граница, где появляется указанный парадокс.

Для того чтобы разобраться в этом парадоксе, нам придется рассмотреть, что такое внешний (полетный) коэффициент полезного действия. Одновременно при этом мы выясним, почему ракетный двигатель целесообразно характеризовать не мощностью, как это принято для других двигателей, а развиваемой им силой тяги.

Внешний коэффициент полезного действия ракетного двигателя

Внутренний коэффициент полезного действия не может полностью характеризовать эффективность ракетного двигателя, так как в общем случае, как мы видели выше, энергия топлива распределяется между ракетой и выбрасываемыми газами. Поэтому в теории вводится еще так называемый внешний (или полетный) к.п.д., причем в литературе можно встретить два отличающиеся друг от друга определения и соответствующие выражения для внешнего к.п.д. Каждое из этих определений к.п.д. с различных точек зрения характеризует механику полета ракеты. Рассмотрим эти определения, указывая одновременно на их логическое обоснование.

Первое определение внешнего к. п. д.

Полет с работающим двигателем является полетом тела переменной массы. Поэтому, помимо мощности ракетного двигателя, энергетические соотношения должны учитывать еще и обмен энергией между ракетой и покидающими ее газами, то есть всю мощность, которой мы располагаем. Изменение энергии ракеты может происходить как за счет химической энергии топлива (работы силы тяги), так и за счет энергии, которой обладала выбрасываемая масса газов до ее истечения из ракеты. Она тоже может быть передана ракете.

Итак, внешний (полетный) к.п.д. можно определить как отношение работы силы тяги к сумме механической энергии, появляющейся за счет сгорания топлива, и энергии, которой обладала масса газов до ее истечения из ракеты. Это отношение можно заменить отношением соответствующих мощностей (результат не изменится). Значит,

$$\eta' = \frac{\mu u v}{\frac{\mu u^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2}} = 2\,\frac{\frac{v}{u}}{1 + \frac{v^2}{u^2}}.$$

Обозначив отношение $\frac{v}{u} = R$, получим окончательно

$$\eta' = \frac{2R}{1 + R^2}.$$

Исследуем теперь эту формулу. Значение η' максимально, когда $\frac{1}{\eta'}$ минимально, то есть когда минимально выражение $\frac{1 + R^2}{R} = \frac{1}{R} + R$. Но $\frac{1}{R} + R \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{R} \cdot R}$ (среднее арифметическое двух чисел a и b больше среднего геометрического или равно ему, если $a = b$). Значит, $\frac{1}{R} + R$ минимально при $\frac{1}{R} = R$ (или, что то же, при $\frac{1}{R} + R = 2$). Это означает, что максимум η' достигается при $R = 1$ и при этом $\eta' = 1$.

Физически это совершенно ясно: при $v = u$ истекающая масса газа обладает кинетической энергией, равной нулю, то есть полностью отдает

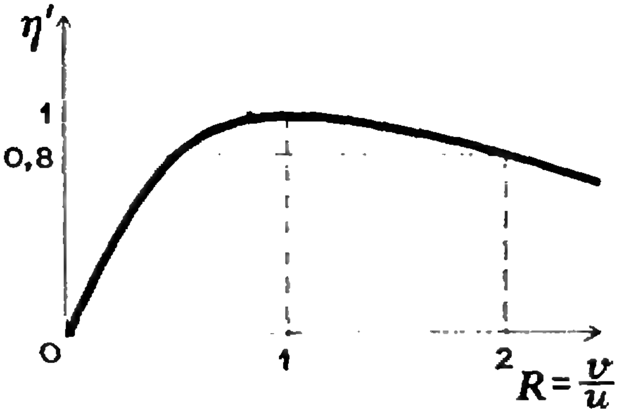


Рис. 1.

кинетическую энергию, которую она имела раньше, ракете.

График η' имеет вид, показанный на рисунке 1.

Уменьшение полетного к.п.д. при $v>u$ объясняется тем, что опять появляется и начинает возрастать энергия, уносимая струей газа.

Второе определение внешнего к.п.д.

При втором определении внешнего к.п.д. к нему подходят следующим образом.

Единственным источником приращения кинетической энергии системы «ракета + отбрасываемые газы» является работа ракетного двигателя, то есть энергия, полученная за счет перехода химической энергии топлива в механическую энергию топлива и ракеты. А под полезной работой нужно понимать ту работу, которая идет на приращение кинетической энергии самой ракеты.

При этом внешний к.п.д. определяется как отношение полезной работы к полной механической энергии, получаемой в ракетном двигателе за счет химической энергии топлива.

Определим величину полезной работы в принятом здесь понимании.

Сила тяги производит над ракетой работу, которая увеличивает кинетическую энергию ракеты. Но, с другой стороны, масса газа, покидающая ракету, уменьшает кинетическую энергию ракеты на ту величину, которой эта масса газа обладала (имея, так сказать, свой вклад в общую энергию ракеты) до ее истечения. Таким образом, полезная мощность равна $\mu uv-\frac{\mu v^2}{2}$.

Следовательно, по второму определению

$$\eta''=\frac{\mu uv-\frac{\mu v^2}{2}}{\frac{\mu u^2}{2}}=2R-R^2.$$

Нарисуем график зависимости $\eta''=2R-R^2=R\,(2-R)$ от R. Это парабола, пересекающая ось R в точках $R=0$ и $R=2$, с максимумом при $R=1$ (рис. 2). То есть максимум η'' достигается тогда же, когда и максимум η',— при $R=1$ (при этом на приращение кинетической энергии движущейся вперед ракеты расходуется вся механическая энергия ракетного двигателя, ибо отбрасываемая масса газа обладает нулевой скоростью и не уносит с собой никакой энергии). Из графика видно, что при $R>2$ $(v>2u)$ $\eta''<0$.

Вот тут, при рассмотрении второго определения к.п.д. ракетного двигателя, и раскрывается еще одна важная особенность физики ракетного движения: к.п.д. ракетного двигателя, рассматриваемый с точки зрения изменения кинетической энергии

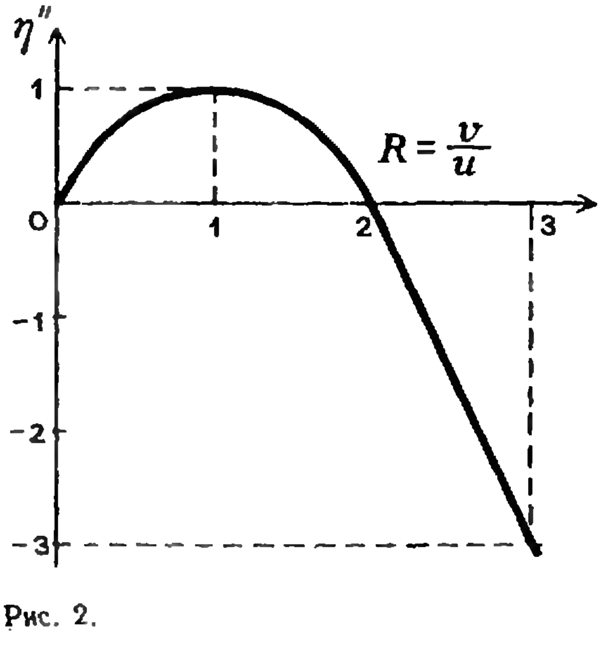


Рис. 2.

движущейся ракеты после достижения значения скорости полета ракеты $v=2u$, становится отрицательным! Еще один парадокс...

В чем же разгадка приведенных парадоксов?

1. Первый «парадокс», то есть тот факт, что мощность, развиваемая силой тяги, непрерывно растет с увеличением скорости ракеты и при $v > \frac{u}{2}$ становится больше мощности ракетного двигателя, объясняется, как видно из первого определения внешнего к.п.д., наличием обменной части, мощностью которой мы располагаем. Она тоже возрастает с увеличением скорости ракеты. Таким образом, при увеличении скорости ракеты покидающие ракету газы становятся, так сказать, все более «богатыми» и отдают ракете все большую величину (абсолютную, а не относительную) той энергии $\frac{\mu v^2}{2}$, которой они располагали до истечения из ракеты. Вылетающие из сопла ракеты газы отдают ракете ту часть энергии, которая была запасена раньше. Это и приводит к тому, что мощность, развиваемая силой тяги, непрерывно растет и при $v > \frac{u}{2}$ становится даже больше мощности, получаемой за счет химической энергии топлива.

2. Второй «парадокс» объясняется тоже довольно просто. Когда скорость ракеты становится больше двойной скорости истечения газов ($v > 2u$), энергия, уносимая газом, возрастает настолько, что истекающая струя газа уносит не только всю энергию, создаваемую в данный момент ракетным двигателем, но и часть энергии, которой обладала система «ракета — газ» до этого момента (накопленную за предыдущую «историю» полета). Или, если подойти несколько иначе к пояснению физического смысла этого «парадокса»: уменьшение кинетической энергии ракеты за счет уменьшения ее массы (за счет «похудания») больше, чем увеличение кинетической энергии за счет увеличения скорости ракеты. Итак, двигатель работает, а кинетическая энергия ракеты уменьшается!

Но в том-то и дело, что назначение ракетного двигателя — придать необходимую скорость полезному грузу, а не сообщить ракете какую-то максимальную кинетическую энергию. Вот почему ракетный двигатель и целесообразно характеризовать развиваемой им силой тяги, которая как раз и показывает, как быстро можно сообщить необходимую скорость полезному грузу. Кроме того, величина силы тяги показывает, можно ли вообще осуществить запуск ракеты: сила тяги должна превышать исходный вес ракеты. Конечно, это не исключает возможности энергетического подхода к проблеме реактивного движения при единственно правильном с точки зрения назначения ракетного двигателя первом определении внешнего к.п.д.

Следует подчеркнуть, что движение ракеты при отрицательном значении внешнего к.п.д. (по второму определению) не является только теоретически возможным случаем, а имеет место в практике космических полетов. Действительно, максимальная достигнутая сейчас скорость истечения газов, согласно имеющимся данным,

$$u_{\max}=4000 \text{ м/сек}.$$

Отсюда видно, что уже по достижении 1-й космической скорости ракета начнет двигаться с уменьшением кинетической энергии:

$$v_1 \approx 8000 \text{ м/сек} = 2u_{\max}.$$

Увеличение скорости истечения газов из ракеты отодвигает границу того изменения массы ракеты (ее «похудания»), при котором начинает уменьшаться кинетическая энергия летящей вперед части ракеты. Для фотонной ракеты, например, такая граница вообще недостижима.

Итак, ракетный двигатель целесообразно характеризовать его силой тяги. Это резко отличается от привычной ситуации, скажем, для автомобильного или самолетного двигателя, служащих для обеспечения движения в среде, обладающей сопротивлением.

В последнем случае именно мощность двигателя является его важнейшей характеристикой, так как чем мощнее двигатель, тем большую скорость движения данного тела он может поддерживать, преодолевая соответственно увеличивающееся сопротивление среды, то есть компенсируя потери энергии на преодоление сопротивления среды.

В процессе полета ракеты с работающим двигателем относительная кинетическая энергия (кинетическая энергия на единицу массы) остающейся части ракеты непрерывно увеличивается вместе со скоростью (эффективность этого процесса характеризует полетный к.п.д. в первом определении), хотя кинетическая энергия ракеты с новым (оставшимся) запасом топлива при скорости $v > 2u$ меньше кинетической энергии ракеты с топливом до того, как выбрасываемая масса газа покидает ракету.

ФОРУМ АСТРОНОМОВ И ГЕОДЕЗИСТОВ

Шесть ноябрьских дней (23—28. XI. 1970) в актовом зале Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова (Ленина) проходил очередной V съезд Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО) при АН СССР.

ВАГО является добровольной научно-общественной организацией, занимающейся работами в области астрономии, геодезии и картографии. Оно было создано в 1932 году. В состав Общества входят 55 отделений, объединяющих 5640 действительных членов, 197 членов-коллективов (предприятий, учреждений и др.) и 1040 членов юношеской секции.

В работе V съезда ВАГО участвовало более 600 человек со всех концов страны. На съезде были рассмотрены организационные вопросы (отчет Центрального совета, выборы руководящих органов Общества и принятие решений). На пленарных заседаниях и секциях были заслушаны научные доклады и сообщения виднейших ученых страны и астрономов-любителей.

На юношеской секции съезда в сообщениях С. С. Войкова, В. В. Мартыненко, Б. Г. Пшеничнера, В. В. Чистякова, С. С. Новикова и др. было подробно рассказано о работе, проведенной членами этой секции. Согласно Уставу ВАГО члены юношеской секции имеют право:

«а) участвовать с совещательным голосом в съездах, конференциях, сессиях, совещаниях и собраниях Общества;

б) пользоваться обсерваториями, лабораториями, библиотекой, архивами и коллекциями Общества;

в) носить значок члена Общества.»*)

За период между IV и V съездами ВАГО члены юношеской секции, которые работали при 31 отделении Общества, принимали самое активное участие в научно-любительских работах по изучению переменных звезд, наблюдению Солнца, серебристых облаков, метеоров, искусственных спутников Земли, планет, в атмосферном зондировании, обследовании кратероподобных структур, в исследованиях астроклимата — совокупности атмосферных явлений, ограничивающих эффективность крупных телескопов. В юношеских секциях Московского, Новосибирского и Крымского отделений Общества и в Угличском филиале Ярославского отделения были сконструированы и изготовлены электрофотометры, фотографические камеры, электрополяриметры. В Крымской и Азербайджанской секциях юные астрономы весьма успешно занимаются любительским телескопостроением, изготовляют зеркала для любителей-астрономов других городов.

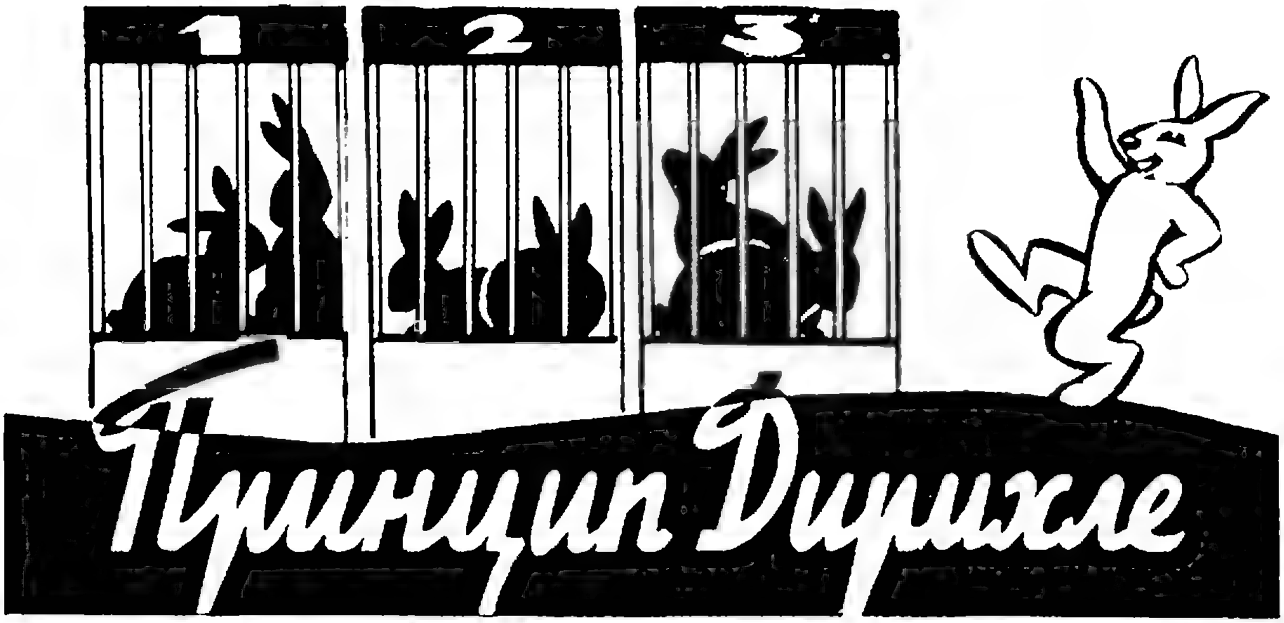
Большое внимание уделяется организации различных астрономических экскурсий школьников. Регулярно проводятся метеорные экспедиции, организуемые в Крыму

---

*) Прием в члены юношеских секций производится отделениями общества или их филиалами на основании письменного заявления вступающего и рекомендации одного действительного члена ВАГО или учебного заведения, предприятия или комсомольской организации.

(Окончание см. на стр. 21)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК



Принцип Дирихле

А. И. Орлов

В 1969 и 1970 годах под Смоленском работала летняя физико-математическая школа. В ней занимались 200 ребят, перешедших в 9—10 классы. Школа была организована Советом молодых ученых МГУ и Смоленским обкомом ВЛКСМ. Занятия вели студенты и аспиранты физфака и мехмата. Основной итог — ребята перестали бояться незнакомых задач.

Приведем расширенную запись одного из занятий по математике. Заметим, что почти все преподававшие математику — питомцы и сотрудники Вечерней математической школы при МГУ (о ней рассказывалось в «Кванте» № 3 за 1970 год), поэтому статья хорошо показывает стиль работы ВМШ и других кружков при МГУ.

Несколько задач приведены без решений. Указания к ним будут напечатаны в следующем номере журнала.

«Клетки» и «зайцы»

При решении задач «на доказательство» часто бывает полезен так называемый «принцип Дирихле» *). В самой простой и несерьезной форме он выглядит так: «нельзя посадить семерых зайцев в три клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не больше двух зайцев». Сейчас мы решим несколько задач, выбирая каждый раз подходящих «зайцев» и строя соответствующие «клетки».

1. В классе 30 человек. В диктанте Саша Иванов сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну (может быть, по 0 ошибок).

Здесь «зайцы» — ученики, «клетки» — число сделанных ошибок.

---

*) Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859)— известный немецкий математик.

Рис. 1.

В клетку 0 «посадим» всех, кто не сделал ни одной ошибки, в клетку 1 — тех, у кого одна ошибка, в клетку 2 — две, ... и так до клетки 13, куда попал один Саша Иванов.

Теперь применим принцип Дирихле (обратите внимание, это очень важное место).

Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, никакие три ученика не сделали по одинаковому числу ошибок, то есть в каждую из клеток 0, 1, ... , 12 попало меньше трех школьников. Тогда в каждой из них два человека или меньше, а всего в этих 13 клетках не больше 26 человек. Добавив Сашу Иванова, все равно не наберем 30 ребят. Противоречие.

Можно ли утверждать, что ровно трое сделали поровну ошибок? Нет, конечно. Возможно, все ребята, кроме Саши, написали диктант без единой ошибки, то есть все сделали по 0 ошибок. Можно ли считать, что по крайней мере четверо попали в одну «клетку»? Нет, нельзя. Класс, в котором по 3 человека сделали 0, 1, 2 ошибки, по 2 человека — 3, 4, ... , 12 ошибок и один — 13, удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть в классе 41 человек, а не 30. Докажите, что найдутся четверо, сделавшие одинаковое число ошибок. (Остальные условия — как в задаче 1.)

3. В Москве около 7,1 миллиона жителей, на голове у каждого не больше 100 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 70 человек с одинаковым числом волос на голове.

Знакомства

Будем считать, что знакомство — «симметричное» отношение между людьми: если Комаров знаком с Жуковым, то и Жуков знаком с Комаровым.

4. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

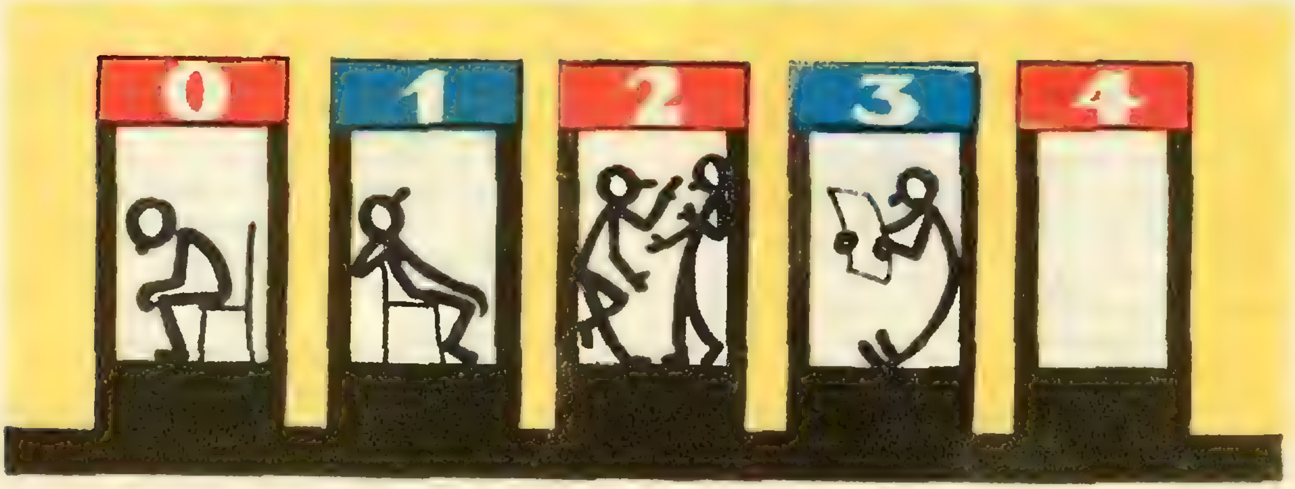


Рис. 2.

Построим 5 «клеток» 0, 1, 2, 3, 4. Пусть номер «клетки» равняется числу знакомых у «содержащихся» в ней людей. Возможны два случая: есть человек, ни с кем из остальных не знакомый, или же такого человека нет. В первом случае в «клетке» 4 никого нет (иначе сидящие в 4 и в 0 были бы знакомы между собой) и 5 человек размещены по 4 «клеткам». Во втором случае они тоже так рассажены (так как «клетка» 0 пуста). По принципу Дирихле по крайней мере двое находятся в одной клетке.

5. Докажите то же, что в предыдущей задаче, если выбрано не 5, а 100 человек, n человек.

6. В первенстве по футболу участвуют 10 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Делимость

7. Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

При делении на 11 получается один из 11 остатков: 0, 1, 2, ... , 10. У нас же дано 12 чисел, и по принципу Дирихле остатки от деления на 11 у каких-то двух из них совпадают. Разность этих двух делится на 11.

8. В строку выписано 5 натуральных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5.$$

Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

Рассмотрим 5 чисел:

$$\begin{aligned}&a_1,\\&a_1+a_2,\\&a_1+a_2+a_3,\\&a_1+a_2+a_3+a_4,\\&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.\end{aligned}$$

Если одно из них делится на 5, то все в порядке. В противном случае при делении на 5 они дают в остатке какие-то из 4 чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки по крайней мере двух из выписанных 5 чисел совпадают. Разность их делится на 5. Но разность эта — одно из чисел, данных в задаче, или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

9. В строку выписано n чисел. Докажите, что либо одно из них делится на n, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на n.

10. Докажите, что из любых 52 натуральных чисел можно выбрать два числа так, что либо их сумма, либо их разность делится на 100. Верно ли это утверждение для 51 числа?

Геометрия

11. В квадрат со стороной 1 *м* бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $^1/_7$ *м*.

Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков (со стороной $^1/_5$ *м*). Докажем, что в каком-то из них находятся по крайней мере три из данных точек. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше двух точек, то всего их было бы не больше $2\times25=50$.

Опишем окружность вокруг квадратика, в котором лежат три (или больше) из данных точек. Подсчитайте сами ее радиус. Он меньше $^1/_7$ *м*.

12. В квадрате со стороной длины 1 взяты произвольно 101 точка (не обязательно внутри квадрата), причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $^1/_{100}$.

13. В куб со стороной 1 помещена 2001 муха. Доказать, что хотя бы трех из них можно поймать сферой радиуса $^1/_{11}$ *).

А теперь — несколько задач, для решения которых принцип Дирихле придется переделать на геометрический лад.

---

*) Эта задача предложена нашим читателем И. А. Кушниром.

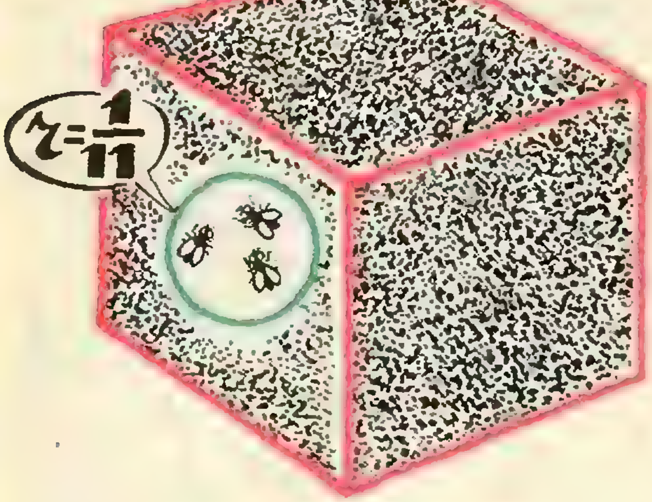


Рис. 3.

14. Несколько дуг окружности покрашены в черный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Покрасим в синий цвет дуги, симметричные черным относительно центра окружности. Поскольку сумма длин синих дуг равна сумме длин черных, то общая длина окрашенных дуг меньше длины окружности. Значит (принцип Дирихле!), найдется неокрашенная точка. Диаметр, проходящий через нее, и будет искомым.

«Рассмотрим отрезок AB. Пусть на нем лежат несколько черных отрезков общей длиной $1{,}5AB$. Тогда какая-то точка AB принадлежит по крайней мере двум черным отрезкам». Такое рассуждение помогает в следующей задаче.

15. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 *см* расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 *см*. (Окружности могут пересекаться или совпадать.) Доказать, что найдется прямая, параллельная AB, имеющая общие точки по крайней мере с двумя окружностями.

Рано или поздно повторится

16. Дан ряд

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots,$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди 100 000 001 первых членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Рассмотрим ряд остатков от деления данных чисел на 10 000. Остаток, стоящий на n-м месте, обозначим символом a_n. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_6=8$, $a_{10}=55$ и так далее. Различных остатков существует 10 000, различных пар остатков — $10\,000^2=100\,000\,000$. Рассмотрим пары a_1a_2; a_2a_3; a_3a_4;...; $a_{100\,000\,001}a_{100\,000\,002}$. По принципу Дирихле из этих 100 000 001 пары остатков по крайней мере две совпадают: $a_k=a_m$, $a_{k+1}=a_{m+1}$, где k и m меньше 100 000 002, k меньше m. По остатку суммы и одного из слагаемых однозначно определяется остаток второго слагаемого (проверьте), поэтому $a_{k-1}=a_{m-1}$, $a_{k-2}=a_{m-2}$ и так далее вплоть до $a_2=1=a_{m-k+2}$, $a_1==1=a_{m-k+1}$. Теперь ясно (почему?), что $a_{m-k}=0$.

17. Докажите, что для любого натурального n в ряду из условия

1
−
$\frac{8}{15}$
=
$\frac{7}{15}$

Рис. 4.

предыдущей задачи найдется число, оканчивающееся на n нулей.

18. Докажите, что существует степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00 001.

19. Пусть число A не делится на 2 и 5. Докажите, что для любого n существует степень числа A, при делении на 10^n дающая 1 в остатке.

20. Докажите, что существует кратное 1970 число, в десятичной записи которого участвуют только нули и единицы.

Таблица

В таблице $n \times n$ клеток расставлены целые числа от 1 до n^2. Нас будет интересовать следующее утверждение:

«При любой расстановке найдутся две клетки, имеющие общую сторону, такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, больше 5».

21. Докажите это утверждение

а) для $n=10$;

б) для всех n, больших 10;

в) для $n=9$.

22. Опровергните его для $n=5$.

Автору неизвестно, верно ли рассматриваемое утверждение для $n=6, 7, 8$.

Задачи

23. В доме 123 жильца, им вместе 3813 лет. Можно ли выбрать 100 из них, которым вместе не меньше 3100 лет?

24. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°. Верно ли аналогичное утверждение, если 26° заменить на 25°?

25. Докажите, что у любого дерева можно оборвать $^8/_{15}$ его листьев, оставив при этом не менее $^7/_{15}$ тени, которую давало дерево (тенью от ствола и веток пренебречь; число листьев можно считать делящимся на 15).

26. Двадцати одному мальчику дали 200 орехов. Докажите, что, как бы они их ни разделили, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов (может быть, по 0 орехов).

27. Даны 7 отрезков. Длина каждого больше 10 *см* и меньше 1 *м*. Докажите, что из каких-то трех можно составить треугольник.

28. Из ряда 1, 2, ... , 200 каким-то способом выбрано 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

(Окончание. Начало см. на стр. 16.)

для юных астрономов, приезжающих из разных мест СССР. Многие члены юношеской секции были активными участниками наблюдения солнечного затмения 1968 года.

В последние годы заметно расширилась сеть молодежных астрономических обществ и различных клубов и кружков, объединяющих около 3000 школьников. Помощь этим организациям осуществляется из пяти региональных методических центров, находящихся в отделах астрономии Московского и Бакинского дворцов пионеров, в обсерватории Алма-Атинского дворца пионеров, Крымской областной юношеской обсерватории (Симферополь) и детской обсерватории клуба юных техников Сибирского отделения АН СССР, которые направляют работу юных астрономов на развитие наблюдений с использованием современных методов и технических средств, на конструирование и изготовление различных астрономических приборов и организацию народных обсерваторий и астрономических лабораторий.

Большое внимание к работе юных астрономов со стороны Министерств просвещения СССР и РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Центральной станции юных техников, ВДНХ и Правления Всесоюзного общества «Знание» дало возможность шире развивать работу юношеских секций ВАГО. Все это позволило провести в 1969 году в Баку Первую Всесоюзную конференцию юных любителей астрономии, которая способствовала обмену и распространению лучшего опыта работы юношеских секций ВАГО.

Вице-президент ВАГО
профессор Л. С. Хренов

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М91. Двое играют в «крестики» и «нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считается любая, имеющая с ней общую сторону или общую вершину. Второй играющий каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом друг с другом). Докажите, что, как бы ни играл первый, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому больше некуда было поставить крестик.

Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешается за один ход ставить не три, а только два или только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнеров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и какое наибольшее число ходов могут «продержаться» крестики) или игра может продолжаться до бесконечности?

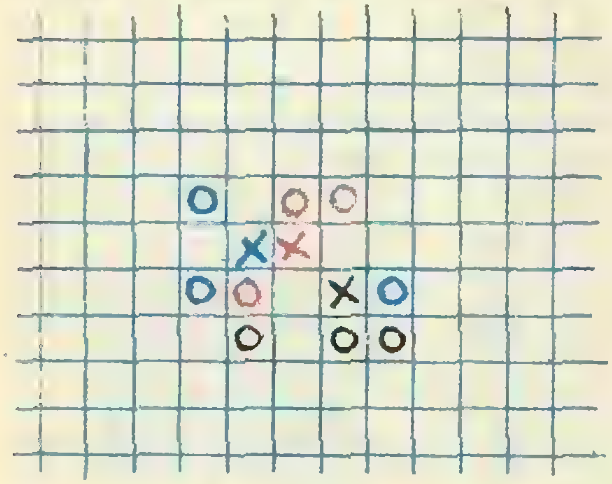


Рис. 1. Здесь изображена одна из позиций, которые могут возникнуть после третьего хода (черным цветом выделены крестик и нолики, поставленные на первом ходу, красным — на втором, голубым — на третьем).

Попробуйте изучить другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаются только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешается ставить сразу p крестиков, а второму — q ноликов.

А. П. Савин

М92. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом строго придерживаться такого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами и каждый пятый день решать задачи по математике. (В первый день Петя проделывал и то, и другое, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ездить в магазин и решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

М93. Каждое из чисел $x_1, \dots, x_n$ равно плюс или минус единице. Известно, что

$$x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0.$$

Докажите, что n делится на четыре.

А. М. Леонтович

М94. Докажите, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.

Л. Г. Лиманов

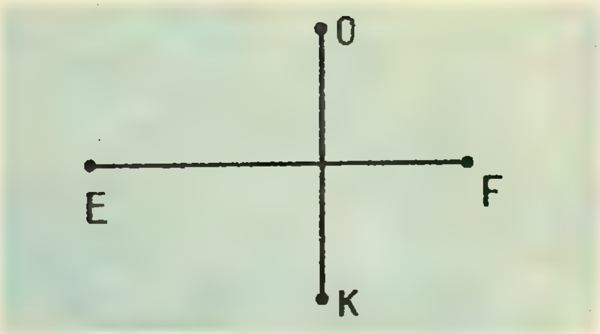


Рис. 2.

М95. На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия EF и опущен перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам EF и OK (рис. 2)?

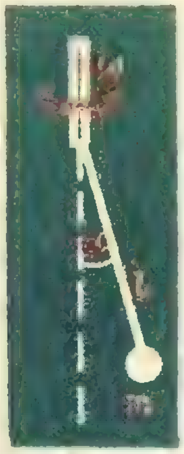


Рис. 3.

Ф103. Из пушки делают две серии выстрелов, наклонив ствол под углами 30° и 40° к горизонту. В каком случае попадания снарядов будут более кучными, если разброс вызван неточным прицеливанием, а не разбросом начальных скоростей снарядов? Сопротивление воздуха считать пренебрежимо малым.

Г. Л. Коткин

Ф104. В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через продолжительное время?

Ф105. Груз массы m прикреплен к стержню длины l. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси (рис. 3). Нарисуйте примерный график зависимости угла α, образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости ω вращения оси.

И. Ш. Слободецкий

Ф106. Два электрона находятся на расстоянии l друг от друга, причем в этот момент скорость одного из них равна нулю, а скорость другого равна v и направлена под углом 45° к линии, соединяющей электроны. Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии l друг от друга?

В. П. Казанцев

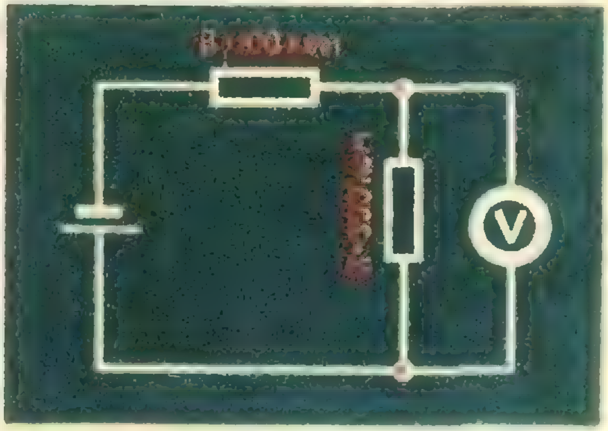
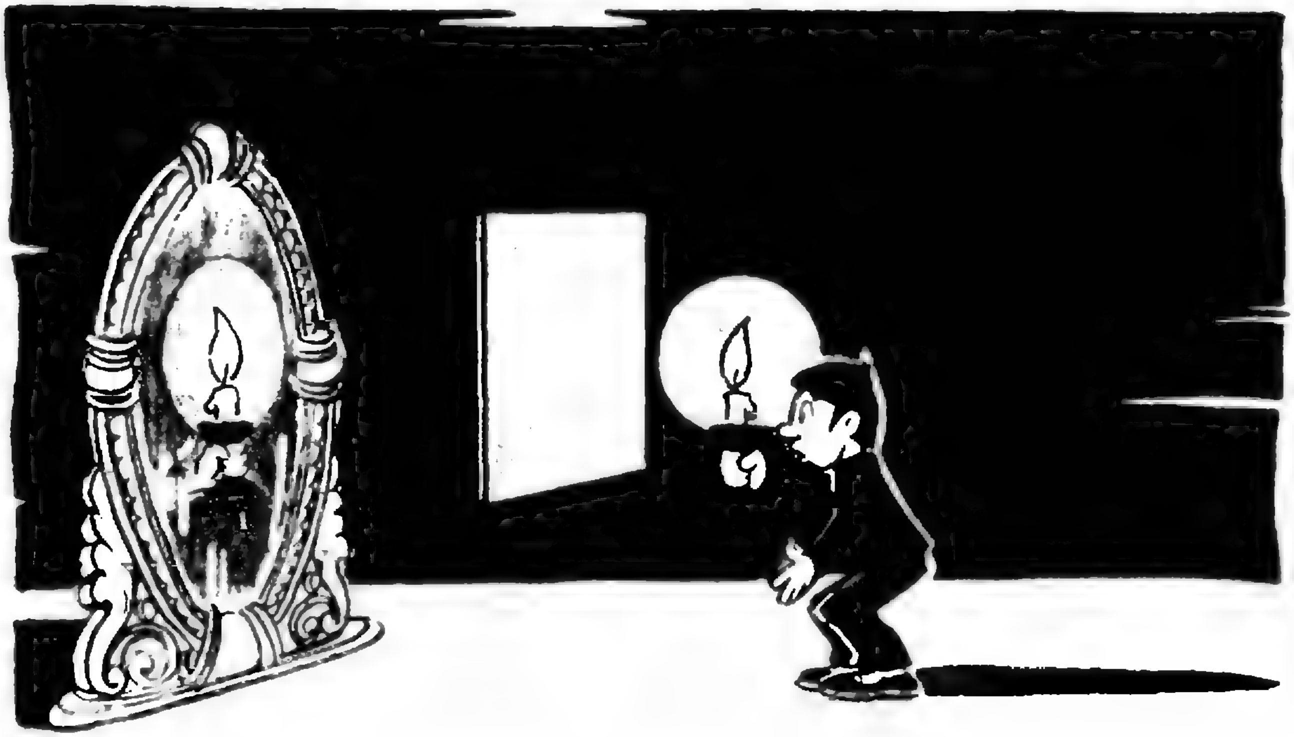


Рис. 4.

Ф107. В схеме, изображенной на рисунке 4, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении $R = 300$ *ком*. Каким должно быть сопротивление вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения U_R?



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М39—М49.

М39

Докажите, что целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m — данное целое число, большее единицы) тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = m$, $\varphi_3 = m^2 - 1$, $\varphi_4 = m^3 - 2m$, $\varphi_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, …, в которой $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$ для всех $k \geq 1$.

Например, все решения уравнения

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1 \tag{1}$$

в целых числах (x, y), $0 \leq x < y$, — это пары

$$(0, 1), (1, 3), (3, 8), (8, 21), \ldots \tag{2}$$

соседних членов последовательности 0, 1, 3, 8, 21, … , определяемой условиями $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{k+1} = 3\varphi_k - \varphi_{k-1}$ для всех $k \geq 1$.

Решим эту задачу для $m = 3$ (для других $m > 1$ решение совершенно аналогично.) Мы должны доказать, что, во-первых, все пары чисел (2) удовлетворяют уравнению (1) и, во-вторых, никакие другие пары неотрицательных целых чисел этому уравнению не удовлетворяют. (Заметим, что эту вторую и более трудную часть решения многие читатели, приславшие письма, упустили из виду.)

В последовательности (2) за каждой парой (x, y) следует пара (x_1, y_1), которую можно получить из (x, y) с помощью такого преобразования:

$$x_1 = y, \; y_1 = 3y - x. \tag{3}$$

Это преобразование $(x, y) \to (y, 3y - x)$ мы обозначим буквой T. Нетрудно проверить, что если пара (x, y) удовлетворяет уравнению (1), то пара $(x_1, y_1) = T(x, y)$ ему тоже удовлетворяет:

$$x_1^2-3x_1y_1+y_1^2=y^2-3y(3y-x)+(3y-x)^2=y^2-3xy+x^2. \qquad (4)$$

Отсюда сразу видно, что все пары (2) удовлетворяют уравнению (1): ведь пара (0, 1) ему удовлетворяет, а все остальные получаются из нее с помощью конечного числа преобразований T.

Докажем теперь, что других решений (x, y) в целых числах, подчиненных условиям $0 \leqslant x < y$, у уравнения (1) нет. Пусть (x_1, y_1) — одно из таких решений. Найдем такую пару (x, y), из которой эти x_1 и y_1 получаются по формулам (3),— для этого достаточно выразить x и y через x_1 и y_1:

$$x = 3x_1-y_1, \quad y = x_1. \qquad (5)$$

Такой переход от (x_1, y_1) к (x, y) — преобразование, *обратное* *) к T — мы будем обозначать через T^{-1}. Из равенств (4) следует, что если пара (x_1, y_1) удовлетворяет уравнению (1), то пара $(x, y) = T(x_1, y_1)$ ему также удовлетворяет. Покажем, что если, кроме того, $0 < x_1 < y_1$, то

$$0 \leqslant x < y. \qquad (6)$$

Представим равенство $x_1^2-3x_1y_1+y_1^2=1$ следующими двумя способами:

$$x_1^2+y_1(y_1-3x_1)=1, \qquad (7)$$

$$x_1(x_1-y_1)+y_1(y_1-2x_1)=1. \qquad (8)$$

Из равенства (7) сразу следует (x_1 и y_1 положительны!), что $-x = y_1-3x_1 \leqslant 0$, причем если $y_1-3x_1=0$, то $x_1=1$ и $y_1=3$. Из равенства (8) в свою очередь следует, что $y-x=y_1-2x_1>0$ (ведь x_1-y_1 отрицательно). Неравенства (6) доказаны. Заметим, что их можно переписать и так:

$$0 \leqslant x < x_1, \qquad (9)$$

поскольку $x_1 = y$. Итак, любое решение (x_1, y_1), $0 < x_1 < y_1$, после преобразования T^{-1} переходит в решение (x, y), для которого $0 \leqslant x < y$. Если при этом $x > 0$, то мы можем применить T^{-1} еще один или несколько раз, получая новые (меньшие по величине) решения. Действительно, как показывает (9), величина целого числа x при каждом преобразовании уменьшается. Поэтому через некоторое конечное число шагов мы должны будем остановиться, а остановиться мы можем лишь тогда, когда получим решение (x, y), у которого $x = 0$ и, следовательно, $y = 1$. Таким образом, мы доказали, что из каждого решения (x_1, y_1) за конечное число преобразований T^{-1} получается решение (0, 1). Отсюда следует, что каждое решение получится из (0, 1) за конечное число преобразований T (то есть что никаких других, отличных от (2), решений нет). Задача полностью решена.

Более наглядно это решение можно представить так. Будем изображать пару чисел (x, y), как обычно, точкой плоскости. Тогда уравнение $x^2-3xy+y^2=1$ задает на плоскости кривую, называемую *гиперболой*. (На обложке нарисовано целое семейство гипербол, задаваемых уравнениями $x^2-3xy+y^2=c$ с разными значениями параметра c, а интересующая нас — желтого цвета.) Решить это уравнение в целых числах — значит указать все точки с целочисленными координатами, лежащие на гиперболе. Одну такую точку указать легко: это — черная точка с координатами (0, 1). Все остальные (в пределах угла $0 \leqslant x < y$), как мы доказали, получаются из нее последовательным применением преобразования $T: (x, y) \to (y, 3y-x)$. Это преобразование T плоскости обладает такими свойствами:

1) Переводит каждую прямую на плоскости снова в прямую (такие преобразования называются *линейными*).

---

*) Понятие обратного преобразования обсуждалось в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция?» («Квант» № 1, 1970).

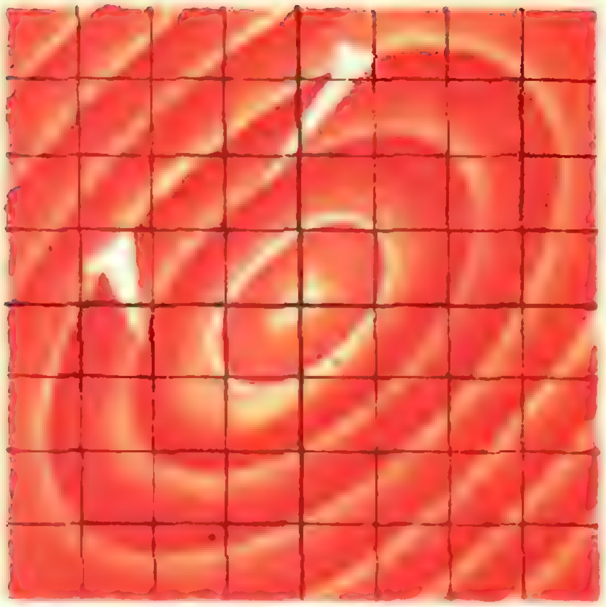


Рис. 1.

2) Переводит любую целочисленную точку снова в целочисленную.

3) Переводит в себя каждую гиперболу $x^2-3xy+y^2=c\neq 0$ (и каждый из четырех лучей с вершиной 0, 0), на которые распадается множество $x^2-3xy+y^2=0$; каждая точка под действием T «переезжает» по своей гиперболе (или лучу) в свое новое положение; точка (0, 0) остается на месте. Такое преобразование называется *гиперболическим поворотом* с центром (0, 0) по аналогии с обычным «круговым» поворотом.

Теми же свойствами обладает и обратное преобразование T^{-1}. Упомянем еще одно интересное свойство этих преобразований:

4) Площадь любой фигуры при преобразовании не меняется. (Белые четырехугольники, расположенные в верхней полуплоскости, переходят друг в друга при преобразованиях T и T^{-1}.)

Совершенно аналогично обстоит дело и при $m>3$. При $m=2$ все наши рассуждения также проходят без изменения, но геометрическая интерпретация несколько меняется. Вместо свойства 3) соответствующее преобразование $T:(x, y)\to(y, 2y-x)$ обладает таким (3'): оно переводит каждую прямую $y-x=c$ в себя; каждая точка «сдвигается» по своей прямой (при $c\neq 0$), а все точки, лежащие на прямой $y-x=0$, просто остаются неподвижными. (Такое преобразование называется *сдвигом*.) Проверьте это и начертите соответствующую картинку сами.

Любопытно, что и для случая $m=1$, то есть для уравнения $x^2-xy+y^2=1$ (оно определяет на плоскости *эллипс* *)), можно выписать аналогичное преобразование $T:(x, y)\to(y, y-x)$, которое переводит это уравнение и вообще каждый эллипс $x^2-xy+y=c$ в себя. Это преобразование называется *эллиптическим поворотом*. Оно так же, как и при $m>1$, переводит все целочисленные решения уравнения друг в друга, но в данном случае решений конечное количество (это не удивительно: ведь эллипс, в отличие от гипербол и прямых,— фигура ограниченная), а именно шесть, и вместо схемы

$$(0,1)\xrightarrow{T}(1,3)\xrightarrow{T}(3,8)\xrightarrow{T}(8,21)\to\ldots,$$

которую можно было бы нарисовать для уравнения (1), теперь получается такая:

$$\begin{tikzcd}
(-1,0) \arrow[r, "T"] & (0,1) \arrow[r, "T"] & (1,1) \arrow[d, "T"] \\
(-1,-1) \arrow[u, "T"] & (0,-1) \arrow[l, "T"] & (1,0) \arrow[l, "T"]
\end{tikzcd}$$

Л. Г. Лиманов

M40

Найдите сумму

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

Попробуйте решить следующую, более общую задачу: найти сумму

$$S_{n,k}=[1\cdot 2\ldots k]\cdot[n(n+1)\ldots(n-k+1)]+[2\cdot 3\ldots(k+1)]\cdot[(n-1)(n-2)\ldots(n-k)]+$$
$$+[3\cdot 4\ldots(k+2)]\cdot[(n-2)(n-1)\ldots(n-k-1)]+\ldots+[(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)]\times$$
$$\times[(k+1)k\ldots 2]+[(n-k+1)(n-k+2)\ldots n]\cdot[k(k-1)\ldots 1].$$

Задача состояла из двух заданий, причем первое было намного легче второго, допускало несколько различных решений. Приведем одно из них, достаточно интересное и поучительное, следуя рассуждениям *И. Алексеева* из г. Новомосковска Тульской обл. и *А. Аляева* из Пачелмы Пензенской обл.

---

*) См. статью И. М. Бронштейна «Эллипс» («Квант» № 9, 1970).

Прежде проверим, что

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ .\ .\ .\ +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (1)$$

Действительно, $1\cdot2=\frac{1\cdot2\cdot3}{3}$,

$$2\cdot3=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}-\frac{1\cdot2\cdot3}{3},$$

$$3\cdot4=\frac{3\cdot4\cdot5}{3}-\frac{2\cdot3\cdot4}{3},$$

$$n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}.$$

Отсюда и следует справедливость равенства (1).

Распишем теперь заданную сумму в виде треугольной таблицы

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5 6 7
. . . .
1 2 3 4 5 6 7 ... $n-1$
1 2 3 4 5 6 7 ... $n-1$ n

Находить значение этой суммы можно не только отысканием суммы столбцов и дальнейшим их сложением. Можно, напротив, отыскивать суммы по строкам таблицы. Поскольку

$$1+2+3+\ .\ .\ .\ +k=\frac{k(k+1)}{2},$$

мы придем к сумме, записанной в левой части равенства (1). Поэтому получим

$$n\cdot1+(n-1)\cdot2+\ .\ .\ .\ +1\cdot n=\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Более общую сумму, приведенную в условии задачи, можно отыскать с помощью комбинаторных соображений.

Напомним формулу для C_n^k — числа сочетаний из n элементов по k *):

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{1\cdot2\ .\ .\ .\ k}=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{k!}.$$

Очевидно равенство

$$[1\cdot2\ldots k]\cdot[n(n-1)\ldots(n-k+1)]+[2\cdot3\ldots(k+1)]\cdot[(n-1)(n-2)\ldots$$
$$\ldots(n-k)]+\ldots+[(n-k+1)(n-k+2)\ldots n]\cdot[k(k-1)\ldots1]=$$
$$=(k!)^2\,(C_k^k\cdot C_n^k+C_{k+1}^k\cdot C_{n-1}^k+C_{k+2}^kC_{n-2}^k+\ldots+C_n^k\,C_k^k).$$

Каждое слагаемое вида $C_{k+m}^kC_{n-m}^k$ (где $m=0, 1, 2, \ldots, n-k$), представляет число сочетаний (или выборок) по $2k$ элементов из $n+k$, но не всех возможных, а таких, образуя которые сперва выбирают k элементов из чис-

---

*) См. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте» № 1 1971.

ла определенных $k+m$ элементов, а затем еще k элементов из оставшихся $n-m$. Сказанное можно наглядно пояснить так. Разместим «в строчку» данные $n+k$ элементов и проведем вертикальную черту, отделяющую $k+m$ элементов слева от $n-m$ элементов справа. Выберем каким-то образом k элементов слева от черты и k элементов справа от черты, а затем образуем соединение каждой из таких «левых» выборок с каждой из таких «правых» выборок. Всего таких соединений будет, очевидно, $C_{k+m}^{k}\cdot C_{n-m}^{k}$.

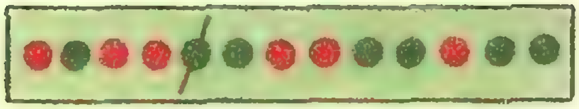


Рис. 2. Среди $m+k+1$ элементов выбираем сначала один (такой, что слева от него и справа от него находится не менее чем по k элементов), проводим по нему черту, а затем слева от черты и справа от черты выбираем по k элементов. На нашем рисунке $m=9$, $k=3$, $m+k+1=13$.

Теперь нетрудно доказать, что

$$C_{k}^{k}\cdot C_{n}^{k}+C_{k+1}^{k}\cdot C_{n-1}^{k}+C_{k+2}^{k}\cdot C_{n-2}^{k}+\ldots+C_{n}^{k}\cdot C_{k}^{k}=C_{n+k+1}^{2k+1}. \qquad (2)$$

Для этого достаточно установить взаимно однозначное соответствие между выборками из $n+k+1$ элементов по $2k+1$ и выборками из $n+k$ элементов такого вида: «k элементов слева от черты; черта; k элементов справа от черты», общее количество которых равно сумме, стоящей в левой части равенства (2). Итак, искомая сумма равна

$$(k!)^2\cdot C_{n+k+1}^{2k+1}=\frac{(n+k+1)!\,(k!)^2}{(2k+1)!(n-k)!}.$$

В частности, для первого задания **М40** имеем $k=1$ и поэтому сумма составит $C_{n+2}^{3}=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

Если приведенный путь рассуждений покажется вам трудным и тем более если он покажется вам интересным, рекомендуем заглянуть в книгу Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» (М., «Наука», 1969). Там, в частности, на стр. 57 доказана формула (24), аналогичная формуле (2).

В. Н. Березин

М41

Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Построить на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна к прямой XA.

Пусть K — точка пересечения отрезков XY и AB; по условию $XY\perp AB$ и $XK=KY$. Для любой точки X на окружности $\angle AXB=90^\circ$. Поэтому требование $YC\perp AX$ эквивалентно каждому из следующих условий:

$$YC\parallel BX,\quad \angle YCB=\angle CBX,$$
$$\triangle CYK=\triangle KBX,\quad CK=KB.$$

Таким образом, восставив в середине отрезка CB перпендикуляр к прямой AB, мы получим в пересечении его с окружностью две искомые точки (любую из них можно принять за X, тогда другая будет играть роль Y).

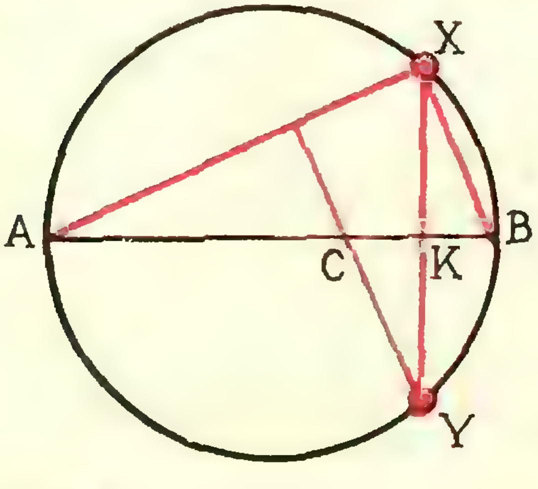


Рис. 3.

М42

Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной.

Докажем индукцией по n, что это утверждение справедливо для любого $(4n+1)$-значного числа. При $n=0$ оно очевидно. Предположим, что для некоторого n оно неверно, то есть существует такое число $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{4n-1}a_{4n}a_{4n+1}}$, что в сумме

$$+\begin{array}{cccccc} \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_{4n-1} & a_{4n} & a_{4n+1} \\ \hline a_{4n+1} & a_{4n} & a_{4n-1} & \cdots a_3 & a_3 & a_1 \\ & \leftarrow & & & \leftarrow & \end{array}$$

все цифры нечетны. Тогда сумма цифр a_1+a_{4n+1} нечетна и в местах, обозначенных стрелочками, не происходит переноса единицы в следующий разряд. Поэтому в сумме $(4n-3)$-значных чисел

$$+\begin{array}{c} \hline a_3 \;\cdots\; a_{4n-1} \\ \hline a_{4n-1} \;\cdots\; a_3 \end{array}$$

также все цифры нечетны, следовательно, наше утверждение неверно и для $(n-1)$. Доказательство закончено (подумайте, почему обычный «шаг индукции» — «если верно для n, то верно и для $(n+1)$» — можно заменить шагом в обратную сторону: «если неверно для n, то неверно и для $(n-1)$»!).

Заметим, что доказанное утверждение нельзя усилить: для чисел, у которых число цифр четно или имеет вид $(4n+3)$, утверждение задачи может не выполняться:

$11\,112\,222+22\,221\,111=33\,333\,333$, $72\,727\,262\,626+62\,626\,272\,727=135\,353\,535\,353$.

М43

Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на n^2 маленьких треугольничков. Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в цепочке?

Ответ: n^2-n+1. Для доказательства, что часто бывает на олимпиадах, достаточно сделать один неожиданный шаг: раскрасить треугольнички в шахматном порядке, как это сделано на рисунке. Остальное совсем просто. Во всем треугольнике красных треугольничков на n больше, чем желтых (в каждом горизонтальном ряду красных на один больше), а в цепочке цвета должны чередоваться, поэтому красных может быть только на один больше, чем желтых.

Одна из цепочек максимально возможной длины показана на рисунке. (Из сказанного выше ясно, что для того, чтобы цепочка имела длину n^2-n+1, необходимо и достаточно, чтобы она начиналась и кончалась в красных треугольничках и проходила через все без исключения желтые.)

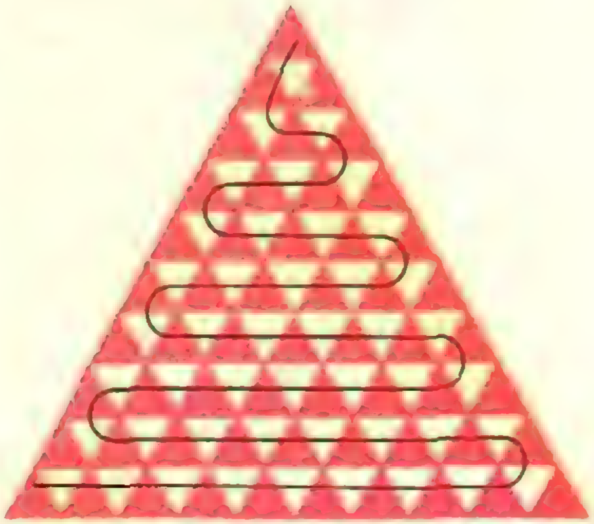


Рис. 4.

M44

Доказать, что для каждого натурального числа K существует бесконечно много натуральных чисел T, не содержащих в десятичной записи нулей и таких, что T и KT имеют одинаковые суммы цифр.

Пусть в числе K (в десятичной записи) k цифр. Тогда в роли T можно взять любое число 999...99, записываемое n девятками, где $n \geqslant k$; тогда и сумма цифр T, и сумма цифр KT равны $9n$ (в числе $KT = K(10^n—1)$ цифры, отстоящие друг от друга на n разрядов, дают в сумме 9; например,

$$743\,552 \cdot 99\,999\,999 = 743\,552 \cdot (10^8—1) =$$
$$= 74\,355\,200\,000\,000 — 743552 = 74355199256448;$$

почти очевидное доказательство для общего случая оставляем читателю).

M45

Доказать, что из любых 200 целых чисел можно выбрать 100, сумма которых делится на 100.

Попробуйте обобщить эту задачу: докажите, что из любых $2n—1$ целых чисел можно выбрать n, сумма которых делится на n, где $n \geqslant 2$.

Лемма. *Если утверждение задачи верно для $n = a$ и для $n = b$, то оно верно и для $n = ab$.*

Заметим, что свойство «сумма n целых чисел $x_1, \ldots, x_n$ делится на n» можно формулировать и так: «среднее арифметическое $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ — целое число».

Итак, пусть даны произвольные $2ab—1$ целых чисел. Поскольку утверждение верно при $n = b$ и $2ab—1 > 2b—1$, из данных $2ab—1$ чисел можно выбрать b, сумма которых делится на b. Затем из оставшихся (если их не меньше $2b—1$) выберем еще b чисел, обладающих этим свойством, и так далее.

Поскольку

$$2ab—1 = (2a—1)\,b + (b—1),$$

то эту операцию можно повторить $2a—1$ раз и получить $2a—1$ наборов по b чисел, в каждом из которых среднее арифметическое b чисел — целое. Поскольку утверждение верно для $n = a$, из этих $2a—1$ средних арифметических можно выбрать a, сумма которых делится на a. Ясно, что тогда ab чисел, составляющих соответствующие a наборов по b чисел, обладают нужным свойством: их сумма делится на ab. Лемма доказана (эту лемму, так же как и задачу, придумал *Ю. И. Ионин*).

Итак, для того чтобы доказать утверждение задачи для произведения $n = a_1 a_2 \ldots a_k$, достаточно доказать его для отдельных сомножителей $n = a_1$, $n = a_2$, ..., $n = a_k$ (и несколько раз применить лемму). Поэтому достаточно научиться доказывать это утверждение для простых сомножителей числа n. Например, чтобы решить задачу для $n = 100$, достаточно доказать два утверждения: «из любых 3 целых чисел можно выбрать 2, сумма которых делится на 2» и «из любых 9 целых чисел можно выбрать 5, сумма которых делится на 5». Первое очевидно, а второе можно доказать не очень длинным перебором. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом, а также попробовать придумать доказательство, которое годилось бы сразу для любого простого n. Одно такое доказательство мы изложим в следующем номере журнала.

M46

Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?

Ответ: две, одна или ни одной.

Примеры для каждого из этих случаев построить нетрудно. Многоугольника, у которого три или больше сторон равны наибольшей диагонали, не существует, поскольку две стороны, равные наибольшей диагонали, обязательно должны иметь общую вершину (рис. 5), а три стороны, каждые две из которых имеют общую вершину, могут быть только у треугольника, а у него нет диагоналей.

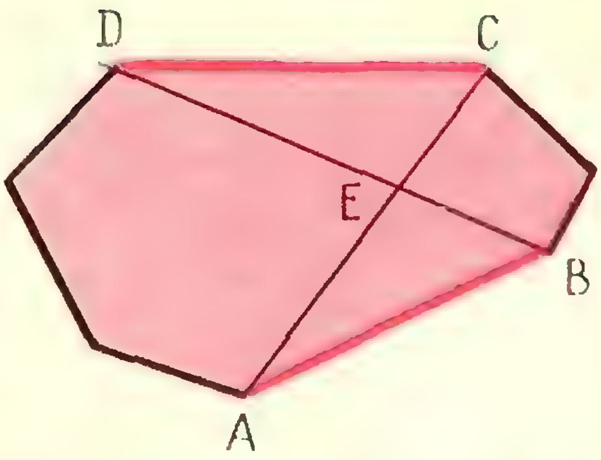


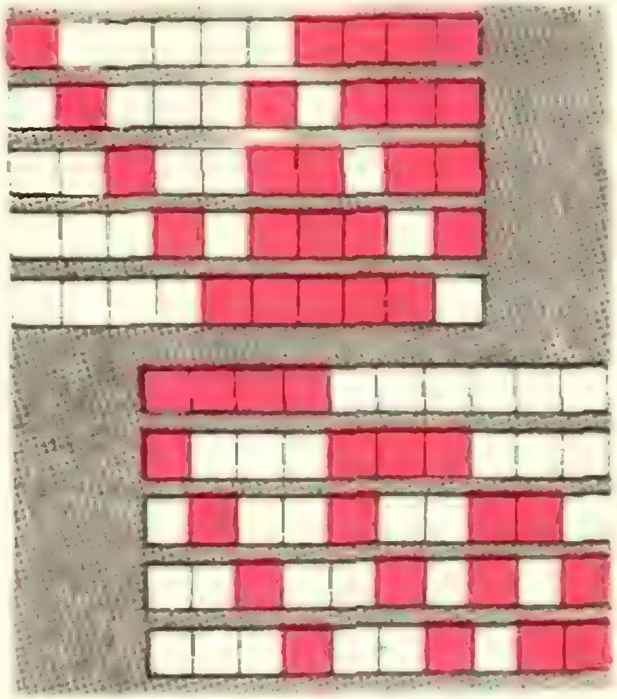
Рис. 5. Случай $AB = CD \geqslant \max\{AC, BD\}$ невозможен, поскольку
$$AB + CD < AE + EB + CE + ED = AC + BD.$$

M47

Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Доказать, что $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.

Выпишем числа одно под другим. В каждом разряде («столбце») 5 цифр. Из них можно составить 10 (неупорядоченных) пар. По всем n столбцам таких пар будет 10 n. Выясним, сколько среди них таких, которые состоят из одинаковых цифр, то есть пар (1, 1) и (2, 2). В каждом столбце таких пар либо 4, либо 6. Поэтому общее количество таких пар не меньше $4n$ и не больше $6n$. С другой стороны, количество таких пар равно $10m$, поскольку при сравнении двух любых чисел по всем n разрядам, по условию, получается ровно m таких пар, а всевозможных пар из 5 чисел — 10.

Итак, $4n \leqslant 10m \leqslant 6n$, что и требовалось доказать (см. рис. 6).



🟥	⬜	⬜	⬜	⬜	⬜	🟥	🟥	🟥	🟥
⬜	🟥	⬜	⬜	⬜	🟥	⬜	🟥	🟥	🟥
⬜	⬜	🟥	⬜	⬜	🟥	🟥	⬜	🟥	🟥
⬜	⬜	⬜	🟥	⬜	🟥	🟥	🟥	⬜	🟥
⬜	⬜	⬜	⬜	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	⬜

🟥	🟥	🟥	🟥	⬜	⬜	⬜	⬜	⬜	⬜
🟥	⬜	⬜	⬜	🟥	🟥	🟥	⬜	⬜	⬜
⬜	🟥	⬜	⬜	🟥	⬜	⬜	🟥	🟥	⬜
⬜	⬜	🟥	⬜	⬜	🟥	⬜	🟥	⬜	🟥
⬜	⬜	⬜	🟥	⬜	⬜	🟥	⬜	🟥	🟥

Рис. 6. Здесь представлены примеры случаев, когда в неравенствах, указанных в условии задачи, достигается равенство. Один из цветов (например, белый) соответствует цифре 1, другой (красный)— цифре 2.

M48

В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45°.

Нетрудно доказать, что для данного $\measuredangle BAC = \alpha < \frac{\pi}{2}$ существует ровно один (с точностью до подобия) треугольник ABC, в котором высота CH, биссектриса AD и ме-

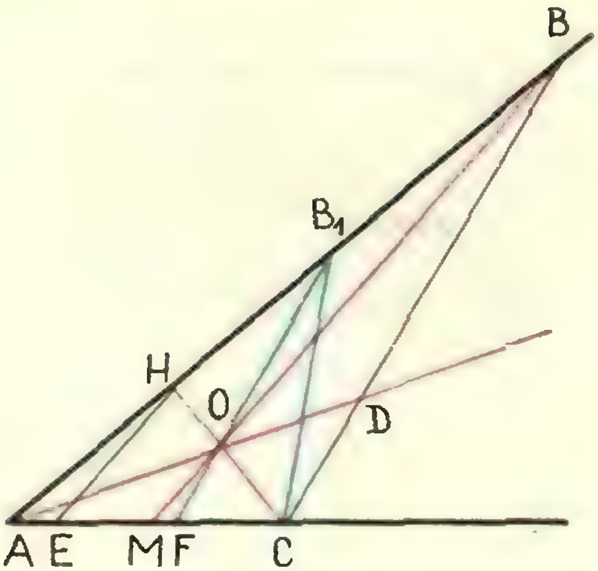


Рис. 7.

диана BM пересекаются в одной точке. Действительно, отложив на одной стороне угла $\angle A = \alpha$ (произвольный) отрезок AC, опустив на другую сторону угла перпендикуляр CH и обозначив его точку пересечения с биссектрисой угла A через O, мы найдем точку B пересечения второй стороны угла и прямой OM (где M — середина отрезка AC) и тем самым построим нужный треугольник ABC, — очевидно, что при заданных $\angle A$ и AC он определяется единственным образом. Заметим, что при этом угол B острый (поскольку точка H — основание высоты — лежит на стороне AB).

Докажем, что если $\angle A < \frac{\pi}{4}$, то $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$. Отложим на прямой AB отрезок $HB_1 = AH$. Тогда биссектриса B_1F угла B_1 равнобедренного треугольника AB_1C пройдет через точку O. Поскольку $\frac{AF}{FC} = \frac{AB_1}{B_1C} > 1$, то точка M лежит между A и F, поэтому B_1 лежит между A и B и $\angle BCA > \angle B_1CA > \frac{\pi}{2}$.

В этой задаче можно получить и более точный результат: найти точную оценку снизу для угла α при условии, что $\angle ACB = \gamma < \frac{\pi}{2}$. Для этого выразим γ как функцию от α. Проведем $HE \parallel BM$ (E — точка на AC). Тогда (рис. 7)

$$\frac{EM}{MC} = \frac{HO}{OC} = \frac{AH}{AC} = \cos\alpha, \quad \frac{HB}{AH} = \frac{EM}{AE} = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \frac{HB}{HC} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)},$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}.$$

Отсюда ясно, что функция $\gamma = \gamma(\alpha)$ на отрезке $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ монотонно убывает (чем больше α, тем больше $\sin\alpha$ и тем меньше $\cos\alpha$, а поэтому меньше и вся дробь, стоящая под знаком арктангенса). Найдем теперь α, для которого $\gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2}$. Это уравнение сводится к такому: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin^2\alpha\,(1-\cos\alpha) = \cos^3\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Итак, если $\gamma < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha > \alpha_0 = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\alpha_0 > \frac{\pi}{4}\right.$, поскольку $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; как можно убедиться по таблицам, величина угла, соотвествующего α_0, в градусах составляет примерно $51°50'$).

M49

На карточках написаны числа от 11 111 до 99 999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Доказать, что полученное 444 445-значное число не может быть степенью двойки.

Легко доказать, что это число делится на 11 111, пользуясь тем, что числа $10^5 A$ и A при любом целом A дают одинаковые остатки при делении на 11 111, а сумма $11\,111+11\,112+\ldots+99\,998+99\,999$ делится на 11 111. Но если число делится на 11 111, то оно, конечно, не может быть степенью двойки. (Это сразу следует, например, из теоремы о единственности разложения на простые множители.)

Наиболее удачные решения задач нам прислали *Э. Туркевич* из г. Черновцы (он нашел точную оценку угла α в задаче **М48**, решил задачи **М46** и **М49**) и *Р. Ахметшин* из г. Ош (**М42**, **М44**, **М47**).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф45, Ф59—Ф65

Вернемся еще раз к задаче Ф45. У нее есть довольно простое и красивое решение.

Ф45

Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Так как в любой точке диэлектрика все направления в плоскости, перпендикулярной к радиусу, равноправны, то вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля не может иметь составляющей, лежащей в этой плоскости. Поэтому вектор $\vec{B}$ может быть направлен только вдоль радиуса. Но все точки изолятора равноправны. Это означает, что векторы $\vec{B}$ и силовые линии магнитного поля или сходятся, или выходят из центра сферы. Но ведь силовые линии магнитного поля должны быть замкнутыми. Значит, это невозможно, и $\vec{B}=0$. Магнитное поле токов разряда конденсатора равно нулю.

Ф59

Какое из ребер проволочного куба следует удалить, чтобы сопротивление между точками A и B (рис. 8) изменилось как можно сильнее? Сопротивления всех ребер куба одинаковы.

Пронумеруем все ребра куба и его вершины. Ток, идущий по ребру *1*, разветвляется в вершине *1* на два потока, идущие затем по ребрам *7* и *8*. Аналогично, ток, идущий по ребру *2*, разветвляется на два равных потока в вершине *2* и так далее. Через ребро *4* идет ток, шедший по ребрам *7* и *12*... Ребру *4* эквивалентны ребра *5* и *6*. Это означает, что через ребра *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* идет ток вдвое больший, чем через ребра *7*, *8*, *9*, *10*, *11* и *12*. Ясно, что сопротивление схемы изменится больше всего, если из схемы удалить проводник, по которому идет наибольший ток. Из проволочного куба нужно удалить одно из ребер *1*, *2*, *3*, *4*, *5* или *6*.

Убедитесь в этом, подсчитав сопротивления соответствующих цепей.

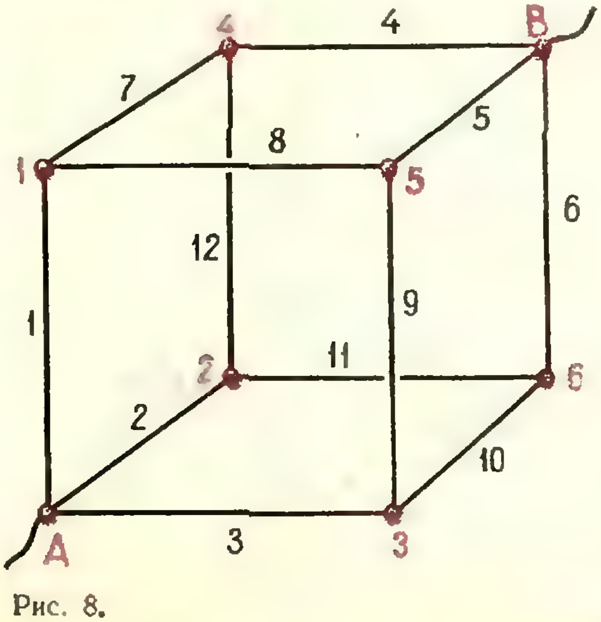


Рис. 8.

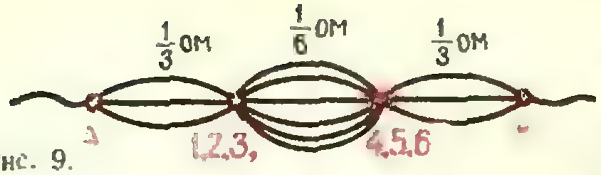


Рис. 9.

Несколько советов. Сопротивление куба между вершинами *A* и *B* подсчитать нетрудно. Для этого нужно лишь заметить, что в силу симметрии вершины *1*, *2* и *3* имеют одинаковый потенциал. Поэтому сопротивление цепи не изменится, если их соединить вместе. Конечно, и вершины *4*, *5* и *6* имеют тоже одинаковый потенциал и их тоже можно соединить. После этого вы получите цепочку (рис. 9), сопротивление которой подсчитать совсем легко. Если принять сопротивление одного ребра равным 1 *ом*, то сопротивление цепочки будет равно $^5/_6$ *ом*. Нетрудно найти сопротивление цепи в том случае, когда удалено одно из ребер *1*, *2*, *3*, *4*, *5* или *6*. Здесь тоже можно найти эквипотенциальные точки, соединив которые вы получите схему из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. Но прежде чем находить сопротивление цепи после удаления одного из ребер *7*, *8*, *9*, *10*, *11* или *12*, внимательно прочитайте статью Л. Р. Зильбермана «Преобразование электрических цепей» в «Кванте» № 3 за 1971 год. Вам понадобится метод, о котором рассказывается в этой статье.

Ф60

В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдет с ним, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку?

Нарисовав ход нескольких лучей, нетрудно убедиться в том, что после того, как между свечой и зеркалом поставили плоскопараллельную стеклянную пластинку, изображение свечи приблизится к зеркалу (рис. 10). Синие линии показывают ход лучей без пластинки, красные — с пластинкой.

Ф61

Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней о вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку равен *k*. Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол α?

На кубик при ударе о стенку действуют две силы: сила N нормальной реакции стенки и сила трения $F_{тр}$ (рис. 11). Разложим скорости кубика до и после столкновения со стенкой на составляющие, параллельные этим силам. Скорости $v_1 = v\sin\alpha$ и u_1 перпендикулярны к стенке, а скорости $v_2 = v\cos\alpha$ и u_2 параллельны ей. В направлении, перпендикулярном к стенке, между кубиком и стенкой, как обычно, происходит абсолютно упругий удар, в результате которого составляющая скорости кубика, перпендикулярная к стенке, меняется на противоположную: $u_1 = -v_1 = -v\sin\alpha$. Это означа-

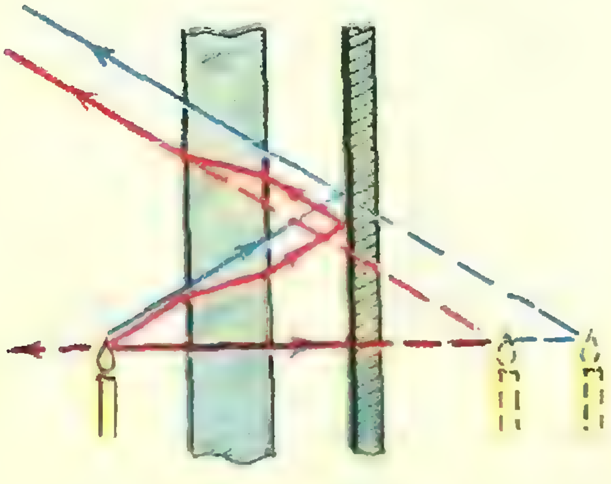


Рис. 10.

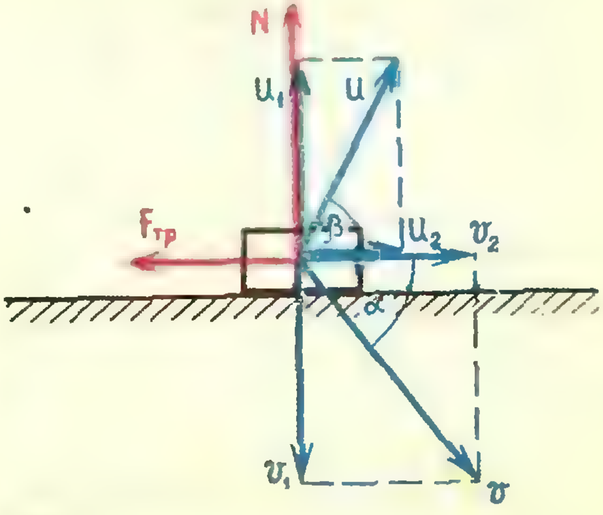


Рис. 11.

ет, что составляющая импульса кубика, перпендикулярная к стенке, меняется на $2mv\sin\alpha$ ($|u_1 - v_1| = 2v\sin\alpha$, m — масса кубика).

Если время соударения кубика со стенкой обозначить τ, а средняя величина силы реакции стенки равна $N_{\text{ср}}$, то, согласно второму закону Ньютона, изменение составляющей импульса кубика, перпендикулярной к стенке, равно импульсу силы $N_{\text{ср}}$, то есть

$$2mv\sin\alpha = N_{\text{ср}}\tau.$$

Если бы на кубик не действовала сила трения, то составляющая импульса кубика, параллельная стенке, не изменилась бы и кубик отскочил бы от стенки под тем же углом α, под которым двигался к ней до удара. Однако благодаря действию силы трения в нашем случае меняется и составляющая v_2 скорости кубика. Предположим вначале, что средняя сила трения $F_{\text{тр.ср}} = N_{\text{ср}}k$, действующая на кубик, тáкова, что за время взаимодействия кубика со стенкой составляющая скорости кубика, параллельная стенке, не успевает уменьшиться до нуля. В этом случае, согласно второму закону Ньютона,

$$mu_2 - mv_2 = -F_{\text{тр.ср}}\tau, \quad \text{или} \quad mu_2 = mv\cos\alpha - N_{\text{ср}}k\tau.$$

Но $N_{\text{ср}}\tau = 2mv\sin\alpha$, поэтому

$$mu_2 = mv\cos\alpha - 2kmv\sin\alpha,$$

или

$$u_2 = v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha).$$

Теперь найдем угол, под которым отскочит кубик:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|u_1|}{u_2} = \frac{v\sin\alpha}{v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2k\operatorname{tg}\alpha}.$$

Такой ответ получили *В. Гончаренко* из Майкопа Краснодарского края, *М. Гильбург* из Борислава Львовской области, *Н. Смирнов* из Горького, *Б. Заксас* из Усолья-Сибирского Иркутской области, *И. Григик* из Давид-Городка Брестской области, *А. Сенявин* из Москвы, *А. Анищенко* из Сарапула УАССР и *Кудек* из Ржева.

Однако это не полное решение задачи. Это заметили читатели А. Власов из Валдая, Б. Шпарберг из Могилева на Днепре, А. Жуков из Кировска Донецкой области и И. Берман из Черновцов.

Очевидно, наше решение справедливо, если $u_2 > 0$, то есть $2k\operatorname{tg}\alpha < 1$. При $\operatorname{tg}\alpha \to \frac{1}{2k}$ $\operatorname{tg}\beta \to \infty$ и $\beta \to \frac{\pi}{2}$. Что это означает?

Если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2k}$, то $u_2 = v(\cos\alpha - 2k\sin\alpha) = v\left(\cos\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\sin\alpha\right) = 0$. За время взаимодействия кубика со стенкой составляющая скорости кубика, параллельная стенке, обращается в нуль. А как же будет происходить столкновение со стенкой, если $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2k}$?

В этом случае кубик будет проскальзывать относительно стенки не все время удара, а до тех пор, пока составляющая его скорости, параллельная стенке, не обратится в нуль. Вместе с ней обратится в нуль и сила трения, действующая на кубик, и отскочит кубик под углом 90° к стенке.

Итак,

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2k\operatorname{tg}\alpha}\right) & \text{при} \quad \operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2k}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad \operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1}{2k}. \end{cases}$$

Ф62

Тонкая нерастяжимая веревка состоит из двух частей. Масса единицы длины одной из частей равна ρ_1, а другой — ρ_2. Веревка охватывает очень легкий обруч радиуса R, масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой охватывающей его веревки, концы прикреплены к полу (рис. 12). По участку веревки с массой единицы длины ρ_1 обруч катится со скоростью v_1. С какой скоростью будет катиться обруч по второму участку веревки?

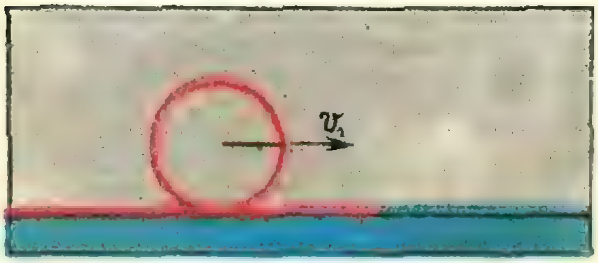
При переходе обруча с одного участка веревки на другой меняется потенциальная энергия веревки. Действительно, когда обруч движется по участку веревки с линейной плотностью ρ_1, потенциальная энергия веревочного кольца равна $m_1gR = \rho_1 2\pi R g R = 2\pi\rho_1 R^2 g$ (центр масс кольца находится в его центре). Когда же обруч движется по участку веревки с линейной плотностью ρ_2, она равна $m_2gR = 2\pi\rho_2 R^2 g$. Соответственно меняется и кинетическая энергия веревочного кольца. Так как нет потерь, то мы можем воспользоваться законом сохранения энергии.

Однако для этого нам нужно знать кинетическую энергию кольца массы m, движущегося без проскальзывания по плоскости со скоростью v. Можно воспользоваться результатом, полученным в статье А. К. Кикоина Вращательное движение тел» («Квант» № 1, 1971):

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Но мы получим эту формулу с помощью нехитрого приема.

Движущееся без проскальзывания кольцо в любой момент времени поворачивается вокруг мгновенного центра вращения — точки касания с плоскостью (рис. 13). Угловая скорость вращения кольца $\omega = \frac{v}{R}$. Это означает, что скорость точки A кольца перпендикулярна к отрезку OA и равна $OA\cdot\omega$. Из $\triangle OAD$ $OA = 2R\cos\alpha$. Поэтому $v_A = 2R\omega\cos\alpha = 2v\cos\alpha$. Аналогично, скорость точки B, диаметрально противоположной точке A, равна $v_B = 2v\cos(90^\circ - \alpha) = 2v\sin\alpha$. Кинетическая энергия маленьких участков с массами Δm вблизи точек A и B



$$K_{A+B} = \frac{\Delta m v_A^2}{2} + \frac{\Delta m v_B^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta m\,(4v^2\cos^2\alpha + 4v^2\sin^2\alpha) =$$

$$= 2\Delta m v^2.$$

K_{A+B} не зависит от α. Это означает, что в точности такой же энергией обладает и любая другая пара диаметрально противоположных точек кольца. Поэтому кинетическая энергия всего кольца равна mv^2. Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$m_1v_1^2 + m_1gR = m_2v_2^2 + m_2gR;$$

отсюда

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}v_1^2 + gR\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}v_1^2 + gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}.$$

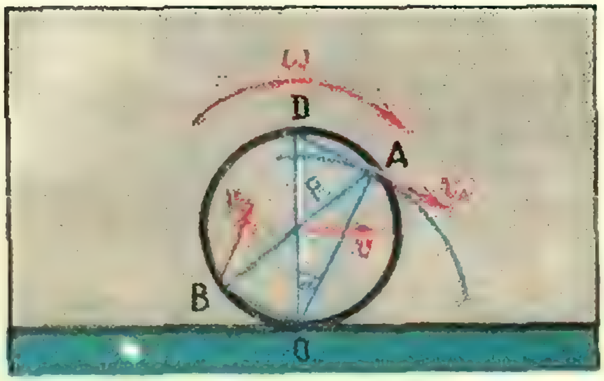


Рис. 13.

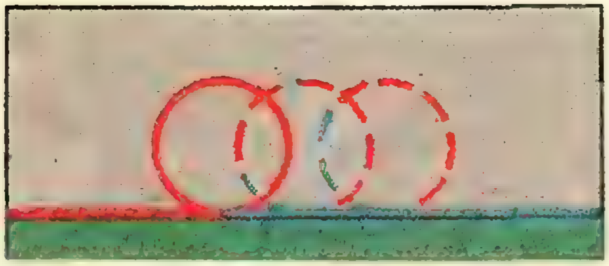


Рис. 14.

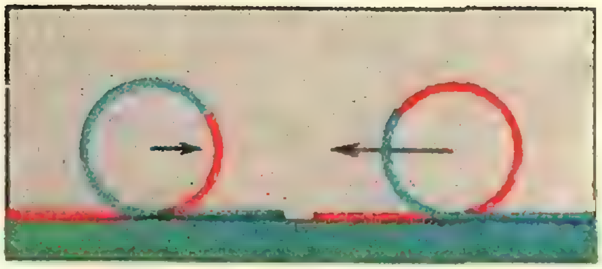


Рис. 15.

Посмотрим теперь, что мы получили. Если $\rho_1 > \rho_2$, то $\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 > 0$ и под корнем стоит положительное число при любой величине v_1, даже при $v_1 = 0$. Ответ при $v_1 = 0$ имеет такой смысл: если обруч стоит так, как показано на рисунке 14, и по случайным причинам начнет двигаться вправо с бесконечно малой скоростью, то, когда с него смотается красная веревка и намотается синяя, он будет иметь скорость $v_2 = \sqrt{gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}$.

Если $\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$, то при $v_1^2 < gR\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}$ подкоренное выражение становится отрицательным. Это означает, что при такой скорости обруч не сможет перейти на веревку с линейной плотностью ρ_2. Он намотает часть более тяжелой веревки (рис. 15), остановится и начнет двигаться в обратном направлении.

Правильное решение прислали *В. Якир* из Кишинева, *А. Власов* из Валдая Новгородской области, *И. Берман* из г. Черновцы УССР, *Б. Шпарберг* из Могилева БССР, *А. Анищенко* из Сарапула УАССР, *Е. Губарев* из Москвы.

Ф63

Человек, чтобы не поскользнуться на обледенелой горке, сбегает с нее. Почему это целесообразно?

На человека на горке действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила $\vec{F}_р$, равная сумме силы трения $\vec{F}_{тр}$ и силы $\vec{N}$ — нормальной реакции горки (рис. 16, *а*).

Так как момент силы тяжести относительно центра масс человека равен нулю, то человек будет сохранять равновесие и не «переворачиваться» только в том случае, если сила $\vec{F}_р$ проходит через его центр масс.

Если трение подошв обуви о горку велико и человек стоит на горке, то сумма сил, действующих на человека, равна нулю. То есть сила $\vec{F}_р$ направлена вертикально и равна силе тяжести.

Иное дело, если трение мало. Разберем вначале предельный случай: $\vec{F}_{тр} = 0$. Тогда человек не будет падать, если он перпендикулярен к горке (рис. 16, *б*). Только в этом случае сила $\vec{N}$ реакции горки проходит через центр масс человека. Но равнодействующая $\vec{R}$ сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ при этом будет равна нулю. Она направлена параллельно наклонной плоскости и равна $mg \sin\alpha$. Поэтому человек должен спускаться с ускорением $a = g \sin\alpha$.

Если трение мало, но не равно нулю, то ускорение человека должно быть меньше. Записав II закон Ньютона, мы найдем что оно равно $a = g\sin\alpha - \frac{F_{тр}}{m}$.

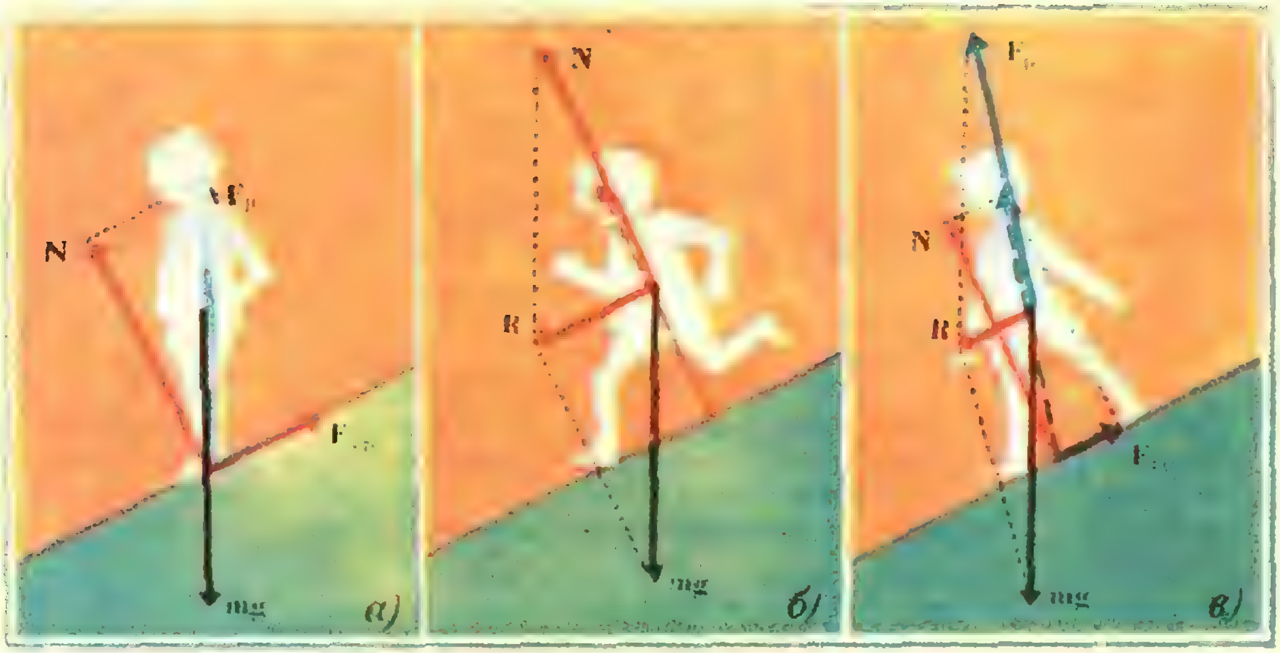


Рис. 16.

Итак, человек может сохранять равновесие, если он бежит с ускорением $a = g\sin\alpha - \frac{F_{\text{тр}}}{m}$, составляя с горкой некоторый угол, определяемый величиной силы трения. По существу, при этом человек так же, как, впрочем, и при обычной ходьбе, падает на вынесенную вперед ногу (рис. 16, *в*). Равновесие сохраняется как бы «в среднем» за время, много большее времени одного шага.

Ф64

С деревянным шаром и высоким сосудом с водой проводятся четыре опыта: в первом опыте они взвешиваются, когда шарик плавает в сосуде (рис. 17, *а*), во втором опыте при взвешивании шарик привязан к дну сосуда (рис. 17, *б*), в третьем опыте он удерживается в сосуде с помощью тонкого стержня (рис. 17, *в*) и, наконец, в четвертом опыте шарик всплывает во время взвешивания (рис. 17, *г*). В каком из опытов масса гири, уравновешивающей сосуд с шариком, больше?

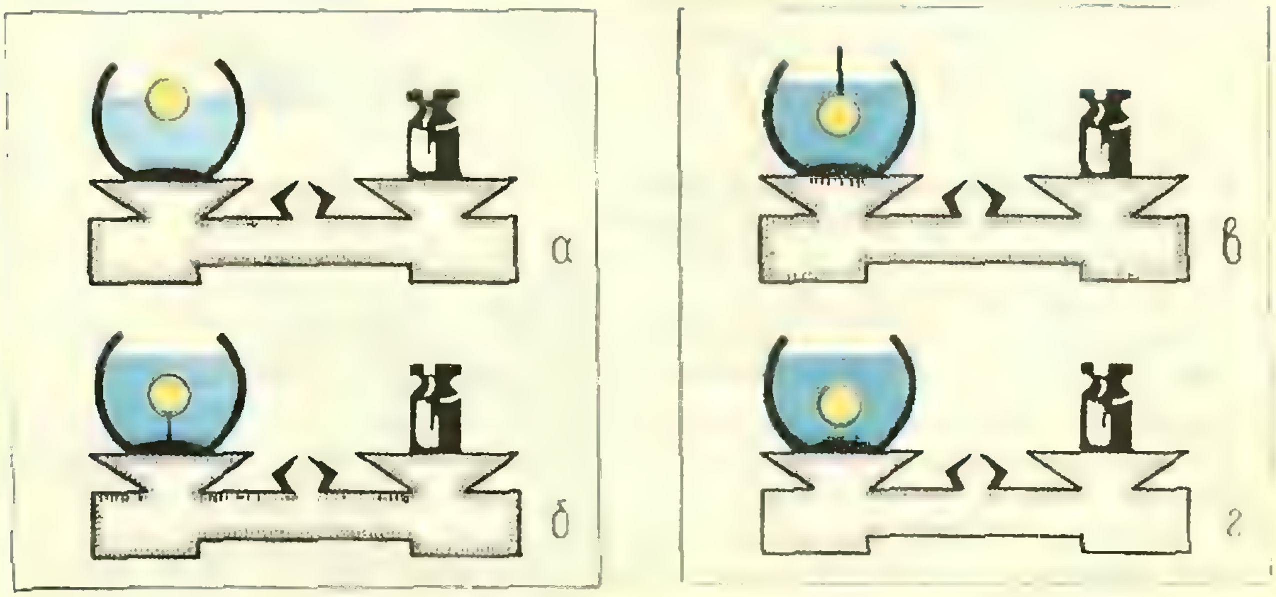


Рис. 17

В первом и во втором опытах ответ очевиден: масса гири должна быть равна массе сосуда с водой и шариком. Во втором опыте уровень воды больше, чем в первом, и, значит, больше сила давления воды на дно сосуда, но зато на дно действует со стороны шарика через нить сила, направленная вверх.

В третьем опыте к силе тяжести, действующей на сосуд, воду и шарик, прибавляется еще и сила, действующая на систему со стороны стержня. Значит, масса гири должна быть больше, чем в первом и втором опытах.

Если погруженный в воду шарик начинает всплывать, то его скорость увеличивается до тех пор, пока сила сопротивления (она зависит от скорости) не станет равна разности архимедовой выталкивающей силы и силы тяжести. После этого шарик будет двигаться равномерно. Рассмотрим вначале последний случай. Так как шарик движется равномерно, то действующие на него силы уравновешены, то есть сила F, действующая на шарик со стороны воды, направлена вверх и равна по величине силе тяжести mg. Согласно III закону Ньютона это означает, что на воду со стороны шарика действует сила $-F$, равная mg. Таким образом, на чашку весов будет действовать сила, по величине равная сумме сил тяжести, действующих на шарик, сосуд и воду. То есть масса гири должна быть такой же, как в первом и втором опытах.

Рассмотрим теперь случай, когда шарик всплывает ускоренно. При этом в тот момент, когда шарик только начинает всплывать и на него не действует сила сопротивления (пропорциональная при малых скоростях скорости шарика), сосуд с шариком весит столько же, сколько и в третьем опыте. Действительно, согласно III закону Ньютона на воду со стороны шарика в этом случае, как в третьем, так и в четвертом опытах, действует только сила F_0, равная выталкивающей архимедовой силе, действующей на шарик со стороны воды. Она равна ρgV, где V — объем шарика и ρ — плотность воды. Это означает, что в обоих случаях сила давления на чашку весов равна сумме сил тяжести, действующих на воду, сосуд, и силы F_0.

Когда же ускорение шарика в четвертом опыте уменьшается благодаря сопротивлению воды, уменьшается и сила, действующая на воду со стороны шарика: в этом случае сила равна по величине разности архимедовой силы и силы сопротивления.

Мы получили много писем с решением этой задачи, но до конца разобрались в ней только два читателя: *Н. Федин* из Омска и *Н. Смирнов* из Горького.

Ф65

Пластины плоского конденсатора заряжены до потенциалов $+\varphi$ и $-\varphi$ относительно земли. Емкость конденсатора, образованного пластинами, равна C, а емкость конденсаторов, которые образует каждая из пластин с землей, C_1. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля между пластинами, если одну из них заземлить?

Нарисуем эквивалентную схему цепи (рис. 18). Так как разность потенциалов между пластинами конденсатора емкости C равна 2φ, то заряд каждой из пластин равен

$$q = C\cdot 2\varphi = 2C\varphi.$$

На пластинах же конденсаторов емкостью C_1 в этом случае находятся заряды $q_1 = C_1\varphi$. Это означает, что заряд пластины II равен

$$Q = q+q_1 = (2C + C_1)\varphi.$$

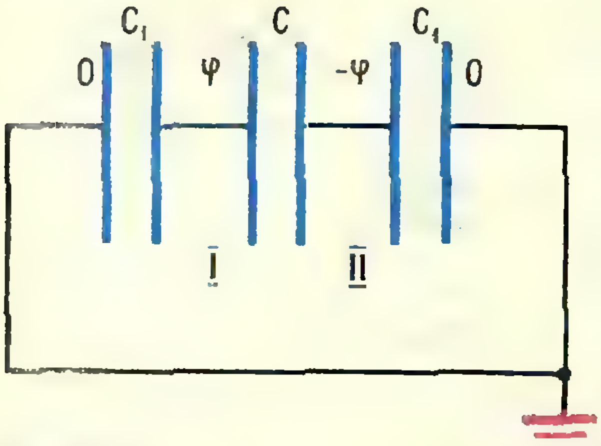


Рис. 18.

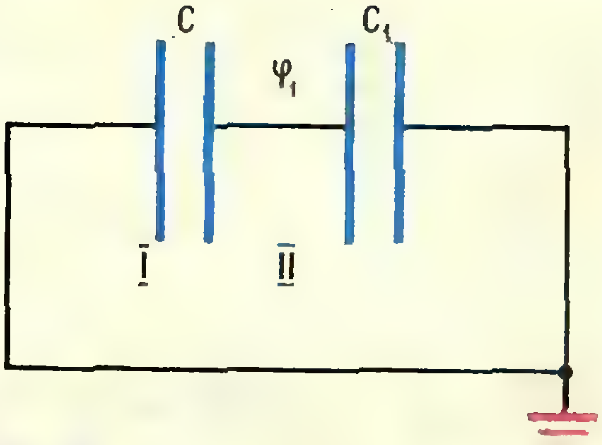


Рис. 19.

После того как пластина I будет заземлена, цепь станет такой, как показано на рисунке 19. При этом потенциалы пластин тоже изменятся. Обозначим потенциал пластины II через φ_1. На пластинах конденсатора емкости C будет заряд $q' = C\varphi_1$, а на пластинах конденсатора C_1 — заряд $q_1' = C_1\varphi_1$. Суммарный же заряд пластины II должен быть равен Q. Поэтому

$$(2C + C_1)\varphi = C_1\varphi_1 + C\varphi_1.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{2C + C_1}{C + C_1}\varphi.$$

Так как напряженность поля в конденсаторе равна $\frac{\Delta\varphi}{d}$ ($\Delta\varphi$ — разность потенциалов пластин и d — расстояние между ними), то

$$\frac{E}{E_1} = \frac{2\varphi}{\varphi_1} = \frac{2(C + C_1)}{2C + C_1}.$$

Такое решение прислали *А. Жуков* из Кировска Донецкой области и *Н. Федин* из Омска.

И. Ш. Слободецкий

ТРИ ЗАДАЧИ

1. Сколько различных пар натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, беря каждую из них лишь один раз (например, 136 и 245 978, 9742 и 13865 и т. д.)? Какая из этих пар имеет наибольшее произведение?

2. Восстановите пример на деление:

```
××  ×××  ××× | ×××
××  ××       |-------
-----------  |×7×××
    ×××
    ×××
    -----
    ××× ×
     ×× ×
    -------
       × ×××
       × ×××
```

3. Дан полукруг радиуса R. Найти круг наименьшего радиуса, в который можно поместить без наложений друг на друга части, получаемые разбиением полукруга на секторы (размер и число секторов могут быть произвольными).

О задачах по фотометрии

В. Е. Белонучкин

Большие затруднения у поступающих в институты вызывают обычно задачи по фотометрии.

В значительной степени это связано с неумением правильно применять закон обратных квадратов.

Чтобы ясно представить смысл того или иного закона, надо понять, из каких соображений и в каких предположениях он получен, когда он справедлив и когда нет, как его надо уточнить, если нельзя применить сразу.

Что же такое закон обратных квадратов?

Вспомним его содержание: освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

А что такое освещенность? Как известно, это отношение светового потока к площади, на которую он падает; если свет исходит из точки O (рис. 1) и равномерно распространяется во все стороны, то, например, до площадки P_1 и площадки P_2, которые видны из точки O в одинаковых телесных углах, дойдут одинаковые световые потоки. А площади пропорциональны квадратам расстояний от точки O. Следует отметить, что это рассуждение справедливо для точечного источника, который равномерно излучает свет по разным направлениям, то есть в любые два одинаковых телесных угла излучаются одинаковые световые потоки.

Если источник света обладает такими свойствами, то закон обратных квадратов — это просто конкретное выражение закона сохранения энергии: в силу прямолинейности распространения света одна и та же энергия (один и тот же световой поток) попадает на площадку, загораживающую данный телесный угол, независимо от того, на каком расстоянии от источника находится эта площадка.

Поэтому исчерпывающей характеристикой точечного источника света является сила света — световой поток, излучаемый источником в единичный телесный угол. Если с помощью какого-либо оптического элемента (линзы, зеркала) получено изображение, то оно, естественно, также является источником света. Что можно сказать о его силе света?

К сожалению, многие склонны считать очевидным, что сила света изображения всегда равна силе света источника. Так ли это? Далеко не всегда. При этом мы не имеем в виду поглощение и рассеяние света линза-

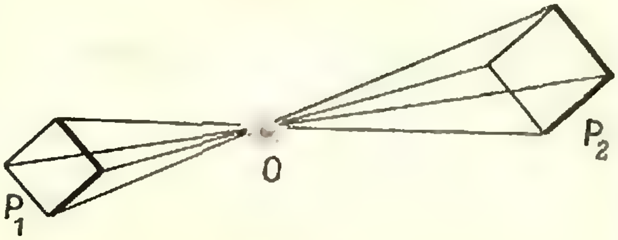


Рис. 1.

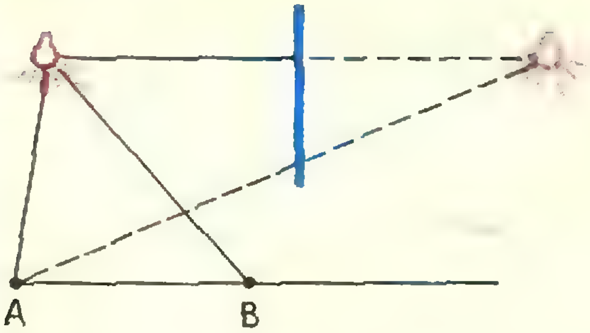


Рис. 2.

ми и зеркалами; эти потери учитывать мы не будем. Есть другие причины различий в силе света источников и их изображений.

Во-первых, изображение практически никогда не излучает одинаково во всех направлениях; связано это, в частности, с конечными размерами линз и зеркал. Плоское зеркало, например, не меняет силы света: сила света изображения равна силе света источника. Однако, нужно учитывать, что изображение излучает свет не во всех направлениях. Действительно, точку *A* (рис. 2) освещают и лампа, и ее изображение в зеркале, а точку *B* изображение освещать не может. Сила света изображения в этом направлении равна нулю.

Рассмотрим другой пример. Источник *O* освещает экран *P* через рассеивающую линзу *Л* (рис. 3). Изображение источника *O′* находится ближе к экрану, чем источник; если у него сила света такая же, как у источника, то экран освещен ярче, чем было бы без линзы. А что даст прямое рассмотрение световых потоков?

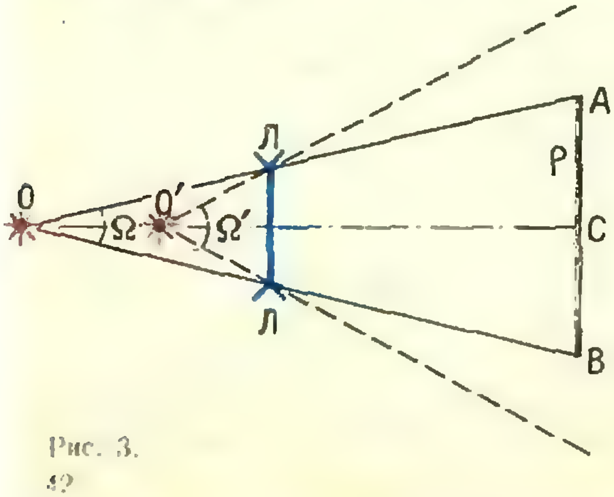


Рис. 3.

Когда не было линзы, на экран попадал весь свет, который шел в конусе *AOB*. При наличии линзы часть этого света проходит мимо экрана, и освещенность экрана должна уменьшиться.

Очевидно, это связано с тем, что сила света изображения *O′* меньше силы света источника *O*. Действительно, ведь силой света называется отношение светового потока к телесному углу, а мы видим, что после линзы свет распространяется в больший телесный угол, причем

$$\frac{\Omega}{\Omega'}=\frac{(O'Л)^2}{(OЛ)^2}.$$

Следовательно, $\frac{I_0}{(OЛ)^2}=\frac{I_1}{(O'Л)^2}$. Если освещенность экрана без линзы была $E_0=\frac{I_0}{(OC)^2}$, то с линзой

$$E_1=\frac{I_1}{(O'C)^2}=\frac{E_0\,(O'Л)^2\,(OC)^2}{(OЛ)^2\,(O'C)^2}<E_0.$$

Отношение сил света изображения и источника всегда равно отношению квадратов их расстояний от оптического элемента, создающего изображение. Докажем это, например, для изображения в вогнутом зеркале.

Пусть *O* — источник света, а *O′* — его изображение в зеркале *AB* (рис. 4). Тогда световой поток, излучаемый источником в конус *AOB*, после отражения от зеркала и прохождения точки *O′* распространяется в конусе *A′O′B′*, по величине равном *AO′B*. (Под величиной конуса, естест-

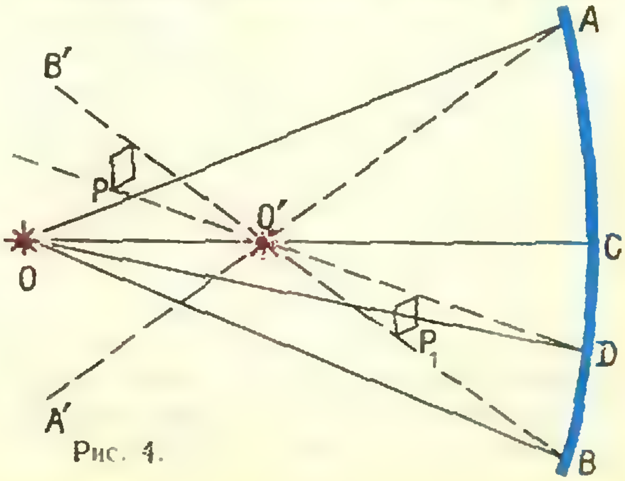


Рис. 4.

венно, подразумевается соответствующий ему телесный угол.)

Пусть сила света источника O равна I. Световой поток распространяется в конусе AOB и равен $I\frac{S_{AB}}{(OC)^2}$, где S_{AB} — площадь поверхности зеркала AB. От изображения O' световой поток идет в телесный угол, равный $\frac{S_{AB}}{(O'C)^2}$; значит, сила света изображения

$$I' = I\frac{(O'C)^2}{(OC)^2}.$$

И для этого случая мы получили ожидаемое соотношение.

Интересно отметить еще один факт. Рассмотрим освещенности площадок P и P_1 (рис. 4). Для P все ясно: левая ее поверхность освещена источником O, и освещенность

$$E = \frac{I}{(OP)^2};$$

правая поверхность освещена изображением O', ее освещенность

$$E' = \frac{I'}{(O'P)^2}.$$

А что делается на поверхности площадки P_1? Через эту площадку должен пройти весь свет, отражающийся на участке зеркала между точками B и D. Этот поток осветит правую поверхность площадки; ее освещенность

$$E_{P_1} = E_{BD}\frac{S_{BD}}{S_{P_1}} = E_{BD}\frac{(O'C)^2}{(O'P_1)^2}.$$

С другой стороны,

$$E_{BD} = \frac{I}{(OC)^2} = \frac{I'}{(O'C)^2}.$$

Таким образом, освещенность правой стороны площадки P_1, обозначенная E_{P_1}, равна $\frac{I'}{(O'P_1)^2}$, как будто эта сторона площадки освещается изображением O'. Это, впрочем, и естественно, так как свет уже отразился от зеркала.

Левая сторона площадки P_1 освещается самим источником O, и ее освещенность равна $\frac{I}{(OP_1)^2}$ *).

Когда же сила света изображения равна силе света источника? Тогда и только тогда, когда расстояния от источника и от изображения до оптического элемента (линзы, зеркала), создающего это изображение, равны между собой. В частности, сила света изображения, полученного в плоском зеркале, всегда равна силе света источника. В собирающей линзе и вогнутом зеркале такое равенство осуществляется при расположении источника на двойном фокусном расстоянии, а в рассеивающей линзе и выпуклом зеркале получить изображение действительного источника света той же силы, что и сам источник, невозможно.

Почему сделана оговорка относительно действительного источника? Давайте проверим, нельзя ли получить в рассеивающей линзе изображение на том же расстоянии от нее, что и источник. Если абсолютную величину фокусного расстояния линзы обозначить F, то формула линзы в интересующем нас случае будет выглядеть так: $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d}$, откуда $d = -2F$. Знак «минус» перед расстоянием от линзы до изображения означает мнимость изображения. Очевидно, мнимым должен быть источник. Проще говоря, на линзу должен падать сходящийся пучок света. Пример такой ситуации показан на рисунке 5, где $Л_1$ и $Л_2$ — соответственно собирающая и рассеивающая линзы с одинаковыми по величине фокусными расстояниями, а O — источник света. Если убрать $Л_2$, то мы получим изображение O' с той же силой света, что и источник.

---

*) Отметим, что при решении задачи мы считали равными некоторые расстояния, например OA, OB, OC и OD, которые, конечно, не точно равны друг другу. Разница между ними может считаться малой, если по сравнению с ними малы расстояния AC, CD и т. д.

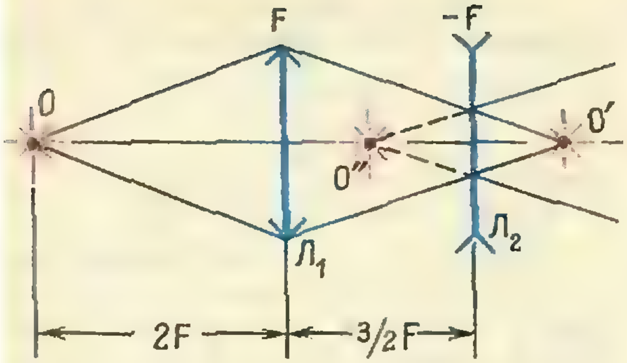


Рис. 5.

Предоставляем читателю убедиться, что такая же сила света будет и у изображения O''.

Следует обратить внимание на то, что вопрос о силе света окончательного изображения решался последовательно, в два этапа. Конкретно, ни $\frac{(OЛ_1)^2}{(Л_1O'')^2}$, ни $\frac{(OЛ_1)^2}{(Л_2O'')^2}$, ни $\frac{(OЛ_2)^2}{(Л_2O'')^2}$ не определяют отношения сил света источников O и O'', хотя часто можно встретить решения, в которых одно из этих отношений принимается за отношение сил света изображения и источника.

Вообще всегда несколько линз можно заменить одной, полностью им эквивалентной. Но такая линза, как правило (исключением является случай, когда линзы прижаты друг к другу вплотную), не может считаться тонкой. У нее две не совпадающие друг с другом главные плоскости, от которых следует отсчитывать расстояния до источника и до изображения. У тонкой линзы обе главные плоскости совпадают друг с другом и с плоскостью самой линзы.

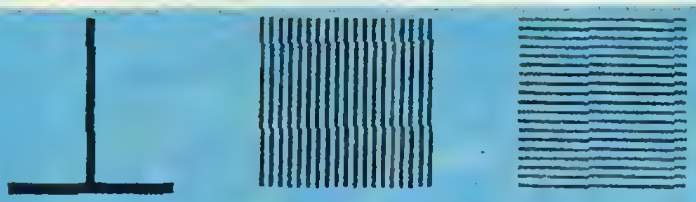
1. Какова сила света изображения, если источник помещен в фокальной плоскости собирающей линзы?.

2. В воде на глубине H расположен точечный источник света силы I. На одной вертикали с ним на высоте H над поверхностью воды находится небольшой экран. Найти освещенность экрана. Показатель преломления воды n.

3. На оси собирающей линзы на расстоянии a от нее находится точечный источник света. По другую сторону линзы ставится экран. При расстояниях от линзы до экрана, равных $в$ и c, освещенность светлого пятна на экране оказывается одинаковой. Определить фокусное расстояние линзы.

4. В системе оптической связи передающий луч лазера имеет вид конуса с углом при вершине $A = 10^{-4}$ *рад* (угол расходимости пучка). В приемном устройстве световая энергия фокусируется с помощью линзы диаметра $D = 1$ *м* на фотоэлемент. Оказалось, что при изменении расстояния L между передатчиком и приемником с 5 до 10 *км* сигнал на выходе фотоэлемента уменьшился в 2 раза (из-за поглощения в атмосфере). Во сколько раз изменится сигнал при увеличении расстояния с 10 до 20 *км*?

ОБМАНЫ ЗРЕНИЯ



Взгляните на рисунок слева, на котором видны две линии — горизонтальная и вертикальная. Наверное, вам кажется, что вертикальная линия по крайней мере на $^1/_3$ длиннее горизонтальной, в то время как они совершенно одинаковы.

А вот взгляните на два квадрата. Один прочерчен вертикальными линиями, другой — горизонтальными. Конечно, всякий скажет, что второй квадрат шире и промежутки между горизонтальными полосками шире, чем между вертикальными. А между тем они совершенно одинаковы. Поэтому люди низкого роста, которые хотят казаться более высокими, часто носят платья с вертикальными полосами.

(Б. Донат. Физика в играх. Изд-во детской литературы, М.—Л., 1937.)

Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году

Т. И. Берхина, Э. М. Кан

Вступительные экзамены в МТИ проводятся в полном соответствии с программой по математике для поступающих в вузы. Как и во всех технических вузах, математика является профилирующим предметом при поступлении в МТИ.

На факультетах энерго-механическом и текстильного машиностроения абитуриенты сдают два экзамена по математике: письменный и устный. На механико-технологическом, химико-технологическом и инженерно-экономическом факультетах проводится один экзамен по математике — устный. На всех факультетах медалисты сдают экзамен по математике.

Разберем один из вариантов, предлагавшийся на письменном экзамене.

Вариант

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x + 1}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_5^4 (x-1)^2 + \log_5^2 (x-1)^3 = 25.$$

3. Упростить при $0 < a \leqslant 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1) + \left(\sqrt[3]{a\sqrt{a}} - 1\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}.$$

4. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α, боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

Разбор задач варианта

1. Находим ОДЗ уравнения $x \neq \frac{\pi}{2} l$, $x \neq \frac{\pi}{4}(4m-1)$ (l, $m=0, \pm 1, \ldots$). Теперь преобразуем левую часть: $(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = \cos 2x$,

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \cos 2x,$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x \sin 2x,$$

$$\cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0. \qquad (*)$$

Так как второй сомножитель в (*) отличен от нуля ($\sin 2x \neq 2$), то $\cos 2x = 0$ и

$$x = \frac{\pi}{4}(2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Учитывая ОДЗ, исключаем те значения x, которые получаются при нечетных k.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4}(4n+1) \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Решение этого примера не вызвало особых затруднений, однако многие получили лишние корни, так как не учитывали ОДЗ.

2. ОДЗ уравнения таково: $x > 1$. Преобразуем левую часть, используя свойства логарифмов:

$$16 \log_5^4 (x-1) + 9 \log_5^2 (x-1) = 25.$$

Решая полученное биквадратное уравнение, которое равносильно заданному, находим

$$\log_5^2(x-1)=1 \text{ или } \log_5^2(x-1) = -\frac{25}{16}.$$

Последнее равенство невозможно, остается $\log_5(x-1) = \pm 1$, откуда $x_1=6$, $x_2 = \frac{6}{5}$.

Типичная ошибка: многие абитуриенты забывали возводить в соответствующую степень показатели 2 и 3 при вынесении их за знак логарифма.

3. Сначала находим допустимые значения a и b: $a \neq -b$. Преобразуем исходное выражение:

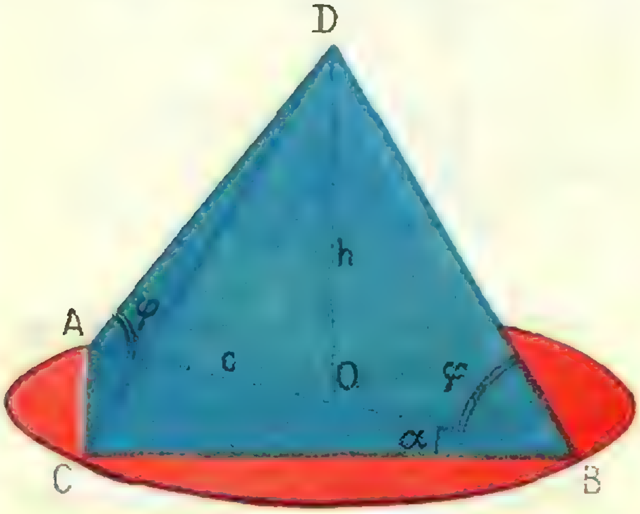
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt{a}-1)^2 - \left(\frac{\sqrt[6]{a}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+a-2\sqrt{a}+1 - (2\sqrt[6]{a})^3\right]^{\frac{1}{2}} = \left[a-2\sqrt{a}+1\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\sqrt{a}-1| = 1-\sqrt{a}.$$

При решении этого примера абитуриенты не всегда обращали внимание на условие $0 < a \leqslant 1$ и поэтому допускали ошибку при извлечении квадратного корня.

4. Высота пирамиды (см. рисунок) пройдет через центр O круга, описанного около основания, так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Известно, что в прямоугольном треугольнике центр описанного круга лежит в середине гипотенузы. Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} h$. Из ΔABC находим



$$BC = c\cos\alpha, \quad AC = c\sin\alpha,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}.$$

Высоту пирамиды находим из прямоугольного $\Delta\, DOA$: $DO = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi$. Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}\,\frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{1}{24}c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Ответ: $V = \frac{1}{24}c^3\sin 2\alpha \operatorname{tg}\varphi$.

В этой несложной задаче некоторые абитуриенты испытывали затруднения при построении чертежа (неверно была изображена высота).

Разберем еще несколько примеров, предлагавшихся на письменном и устном экзаменах.

1. *Решить уравнение*

$$7\cos x + 2\sin 3x\cos 2x - \sin 5x = 5.$$

Преобразуя второй член в сумму, приводим уравнение к виду

$$7\cos x + \sin x = 5.$$

Теперь можно использовать половинный угол для сведения уравнения к однородному или решать это уравнение с помощью введения вспомогательного угла.

Ответ:

$$x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi$$

$$(n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

2. *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{2}{9}}[\log_3(x^2-6)] > 0.$$

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-6>0, \\ 0<\log_3(x^2-6)<1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2-6>0, \\ 1<x^2-6<3. \end{cases}$$

Второе неравенство включает в себя первое, из него и находим $7<x^2<9$, $\sqrt{7}<|x|<3$.

Ответ:

$\sqrt{7}<x<3$ или $-3<x<-\sqrt{7}$.

В этой задаче многие абитуриенты не учитывали, что основание внешнего логарифма меньше 1, а некоторые забыли про знак модуля и потеряли вторую часть ответа.

В заключение приводим один вариант письменной работы и отдельные задачи из письменных работ и устных экзаменов для самостоятельного решения.

Вариант

Решить уравнения:

1. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x-\sin x\sin 3x-$

$$-\sin 2x\sin 3x=0.$$

2. $2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3-$

$$-\lg\left(\sqrt[x]{3}+27\right)=0.$$

3. Упростить:

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-$$

$$-\sqrt[6]{x}.$$

4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

Отдельные задачи

Решить уравнения:

5. $\sin^4 x+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x.$

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\cos 7x.$

7. $\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$

8. Преобразовать в произведение:

$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$

$$+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

9. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi.$

Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решить уравнения:

10. $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0.$

11. $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20.$

12. $\lg^2 10x+\lg x=19.$

13. $4^{\log_2 x}+x^2=8.$

14. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$

Решить неравенства:

15. $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}>5\cdot 0{,}04^{x-1}.$

16. $0{,}8^{\frac{3-x}{1-x}}<\frac{16}{25}.$

17. $\lg x^2<\lg^3 x.$

18. $(x^2-4)\log_{0{,}5}x>0.$

19. $\log_{0{,}5}(2x+6)>\log_{0{,}5}(x+8).$

20. $\frac{|2x-3|-x}{x-2}>0.$

21. При каких значениях a уравнение

$(5a-1)x^2-(5a+2)x+(3a-2)=0$

имеет равные корни?

22. Упростить:

$$4x^4\left(\frac{x}{a}\sqrt[0{,}2]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-5\sqrt[0{,}4]{\sqrt[5]{a}\,x^{-0{,}6}}+$$

$$+\frac{3x}{a}\sqrt[0{,}2]{a^{-0{,}2}\sqrt{ax^{-1}}}$$

23. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

24. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Определить углы прямоугольного треугольника.

Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году

А. Г. Кушниренко, С. В. Фомин

Письменный экзамен по математике сдается при поступлении на следующие гуманитарные факультеты МГУ: психологический, экономический и отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета *). Об уровне требований по математике, предъявляемых к абитуриентам, поступающим на эти факультеты, можно судить по приведенным ниже вариантам письменного экзамена 1970 года, а также по вариантам 1969 года **).

На отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета на письменную работу давалось 5 часов (300 минут). Для получения пятерки требовалось решить первые три задачи и любые две из последних четырех. Практически пятерка ставилась и за чуть худшую работу, а положительную оценку получали во всяком случае те абитуриенты, которые решили не менее двух задач, из которых хотя бы одна входила в число первых трех задач.

Варианты письменного экзамена на отделении экономической кибернетики экономического факультета здесь не приводятся, с уровнем требований по математике на этом отделении лучше познакомиться по вариантам 1969 года.

На психологическом факультете и на отделении политической экономии экономического факультета на письменную работу отводилось 4 часа (240 минут) и для получения пятерки требовалось решить все 4 задачи. Практически пятерка ставилась и за чуть худшую работу, а положительную оценку гарантировало решение любых двух задач. Ниже мы разберем решения некоторых задач подробно, а к некоторым дадим лишь ответы.

мые ниже варианты являются реальными (не сборными).

Филологический факультет

Вариант

1. В соревнованиях участвовали три байдарки. Первая байдарка проходит каждые 100 *м* на 2 *сек* быстрее второй и на 3 *сек* быстрее третьей. За какое время первая байдарка прошла один километр, если за каждые 30 *сек* вторая байдарка опережает третью на 60/13 *м*?

2. Найти все x, для которых $0{,}5<x<2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax)<1$ при всех a из промежутка $0<a<2$.

---

*) На отделении экономической кибернетики экономического факультета и на отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета сдается также и устный экзамен по математике.

**) Их можно найти в статье «Гуманитарии сдают математику» («Квант» № 4, 1970).

3. Найти все x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$ и являющиеся решением уравнения $1+\cos x+\cos 2x = \sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

4. Доказать, что $11n^2-14n+3 \geqslant 0$ при всех целых n.

5. Не пользуясь таблицами, доказать, что $\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492$

6. В окружность вписан треугольник со сторонами 7, 24, 25. Вычислить площадь кругового сегмента, стянутого хордой, длина которой 7.

7. Сколькими способами сумму 4 руб. 96 коп. можно составить из монет по 2 и 15 коп.?

Решения задач

1. О т в е т: первая байдарка прошла 1 *км* за 230 *сек*.

2. Прежде всего докажем, что при $0{,}5 < x < 2{,}5$ выполняется неравенство $3x-x^2>1$. Действительно, $3x-x^2 = \frac{9}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, но при наших ограничениях $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 < 1$, следовательно, $3x-x^2 > \frac{5}{4} > 1$. Поскольку основание логарифма больше 1, неравенство можно переписать так: $3x-x^2 > 3a-ax$ или

$$x(3-x) > a(3-x). \tag{*}$$

Мы должны найти все x из промежутка $0{,}5 < x < 2{,}5$, которые являются решением неравенства (*) при всех a из промежутка $0<a<2$. Для любого x из промежутка $0{,}5 < x < 2{,}5$ выполняется неравенство $3-x>0$, и, значит, неравенство (*) эквивалентно неравенству $x>a$.

При всех a из промежутка $0<a<2$ неравенству $x>a$ удовлетворяют все $x \geqslant 2$; учитывая неравенство $0{,}5<x<2{,}5$, получаем о т в е т: $2 \leqslant x < 2{,}5$.

3. $1+\cos x+\cos 2x = \sin x+\sin 2x+\sin 3x$,

$\cos x\,(1+2\cos x) = \sin 2x\,(1+2\cos x)$, $\cos x\,(1+2\cos x)(1-2\sin x) = 0$.

Последнее уравнение эквивалентно исходному. Будем решать его и для каждой серии ответов проверять условие $\frac{\pi}{2} < \left|3x-\frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$.

I. $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Отсюда $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right| = \left|3\frac{\pi}{2}+3\pi k-\frac{\pi}{2}\right| = |(3k+1)\pi|$. При $k=0$ $\left|3x-\frac{\pi}{2}\right| = \pi$, то есть наше условие выполняется $\left(\frac{\pi}{2} < \pi \leqslant \pi\right)$, и, значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot 0 = \frac{\pi}{2}$ является ответом задачи. Если же $k \neq 0$, то, как легко видеть, $|(3k+1)\pi| \geqslant 2\pi$ и из серии корней вида $\frac{\pi}{2}+k\pi$ только $x=\frac{\pi}{2}$ удовлетворяет нашему условию.

II. $1+2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. Отсюда

$$\left|3x-\frac{\pi}{2}\right| = \left|\pm 2\pi + 6k\pi - \frac{\pi}{2}\right| = \left|(3k\pm 1)2\pi - \frac{\pi}{2}\right|.$$

При любом k последнее выражение слишком велико:

а) $k=0$, $\left|(3k\pm 1)2\pi-\frac{\pi}{2}\right| = \left|\pm 2\pi-\frac{\pi}{2}\right| \geqslant \frac{3\pi}{2}$;

б) $k \neq 0$, $\left|(3k\pm 1)2\pi-\frac{\pi}{2}\right| \geqslant |(3k\pm 1)2\pi| - \left|\frac{\pi}{2}\right| \geqslant 4\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$.

Таким образом, ни одно значение x из серии $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ не удовлетворяет условию.

III. $1 - 2\sin x = 0$; а) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; б) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

а) $\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\frac{\pi}{2} + 6k\pi - \frac{\pi}{2}\right| = |6k\pi|$. Если $k = 0$, то

$\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| = 0 < \frac{\pi}{2}$; если $k \neq 0$, то $\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant |6\pi| > \pi$.

б) $\left|3x - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\frac{5}{2}\pi + 6k\pi - \frac{\pi}{2}\right| = |2\pi + 6k\pi| \geqslant 2\pi$.

Таким образом, ни одно из решений уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию. Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Найдем, при каких x трехчлен $11x^2 - 14x + 3$ меньше нуля. Этот трехчлен имеет корни $x_1 = \frac{3}{11}$, $x_2 = 1$. Таким образом, $11x^2 - 14x + 3 < 0$ при $\frac{3}{11} < x < 1$. Но в последнем промежутке нет ни одного целого числа, значит, при всех целых n $11n^2 - 14n + 3 \geqslant 0$.

5. Очевидно, $\operatorname{tg} 208^\circ = \operatorname{tg} 28^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin 492^\circ = \sin 48^\circ > \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Но $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $\operatorname{tg} 208^\circ < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin 492^\circ$, что и требовалось доказать.

6. Указание: по теореме, обратной к теореме Пифагора, наш треугольник прямоугольный ($7^2 + 24^2 = 25^2$). Ответ: $\frac{625}{4} \arcsin\frac{7}{25} - 42$.

7. Заметим, что каждый способ вполне определяется числом 15-копеечных монет. Посмотрим, каково может быть это число. Поскольку общая сумма (496 коп.) четна и любая сумма, составленная из 2-копеечных монет также четна, то число 15-копеечных монет должно быть четно. Кроме того, это число неотрицательно и не слишком велико, так как в любом способе сумма, составленная из 15-копеечных монет, неотрицательна и не превосходит 496, то есть $0 \leqslant 2n \cdot 15 \leqslant 496$. Легко видеть, что никаких других условий на число 15-копеечных монет нет: если мы составим из четного числа 15-копеечных монет любую сумму, не превосходящую 496 коп., то недостающую сумму (она четна) всегда можно составить из 2-копеечных монет. Осталось решить в целых числах неравенство $0 \leqslant 2n \cdot 15 \leqslant 496$, или $0 \leqslant n \leqslant 16\frac{16}{30}$. Ясно, что это неравенство имеет 17 целых решений: $n = 0, 1, 2, \ldots, 16$.

Ответ: 17 способов.

Наибольшие затруднения в этом варианте вызвали задачи 2 и 3, скорее всего из-за не совсем обычной формулировки. Судя по работам, некоторые абитуриенты не сумели до конца понять условия этих задач. Так, например, в задаче 3 некоторые абитуриенты просто решали (притом не всегда верно) тригонометрическое уравнение, не учитывая дополнительного условия на x. Другие абитуриенты, получив бесконечное число решений тригонометрического уравнения и понимая, что нужно проверять выполнение дополнительного условия, не смогли провести такую проверку. «Раскрыв модуль» в дополнительном условии, многие не смогли довести проверку до конца.

Психологический факультет (дневное отделение)

Вариант I

1. Два одинаковых парохода отправляются от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй — от пристани B вверх по течению. Каждый пароход, дойдя до конечного пункта, стоит там 45 *мин* и возвращается обратно. Если пароходы отправляются от начальных пунктов одновременно, то на обратном пути они встречаются в точке K, которая в 2 раза ближе к A, чем к B. Если первый пароход отходит от A на 1 час позже, чем второй пароход отходит от B, то на обратном пути они встречаются в 20 *км* от A. Если первый пароход отходит от A на 30 *мин* раньше, чем второй отходит от B, то на обратном пути пароходы встречаются в 5 *км* выше K. Найти скорость реки и время, за которое второй пароход доходит от A до K.

2. Найти все действительные значения a, при которых уравнение

$$x^8+ax^4+1=0$$

имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

3. Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos x^2}\left(\frac{3}{x}-2x\right)<\log_{\cos x^2}(2x-1).$$

4. В правильную треугольную пирамиду помещены 3 шара так, что 1-й шар касается всех боковых граней пирамиды и 2-го шара, а 2-й шар касается боковых граней и 3-го шара, а 3-й шар касается боковых граней, основания пирамиды и 2-го шара. Какую долю объема пирамиды занимают три шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

Решения задач

1. По условию задачи пароходы одинаковы, значит, и скорости пароходов в стоячей воде одинаковы. Обозначим эту скорость через v (*км/ч*). Обозначим через v_0 (*км/ч*) скорость реки, через S (*км*) — расстояние между A и B. Ниже время будем измерять в часах и размерности всех величин будем опускать. Сравнивая времена, которые затратили пароходы на путь от момента выхода до момента встречи на обратном пути (включая и стоянку), составляем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{\frac{2S}{3}}{v-v_0}=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{\frac{S}{3}}{v+v_0},\\[2mm] \dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{S-20}{v-v_0}+1=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{20}{v+v_0},\\[2mm] \dfrac{S}{v+v_0}+\dfrac{\frac{2S}{3}+5}{v-v_0}=\dfrac{S}{v-v_0}+\dfrac{\frac{S}{3}-5}{v+v_0}+\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $v=3v_0$, а из первого и третьего находим: $v_0=7{,}5$; $v=22{,}5$. Подставляя во второе уравнение эти значения v и v_0, находим $S=30$, откуда $AK=10$. Значит, второй пароход доходит от A до K за $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ часа. Ответ: скорость реки 7,5 *км/ч*, и второй пароход доходит от A до K за 20 *мин*.

2. Нетрудно догадаться, что исходное уравнение сводится к квадратному. Уравнения такого вида разбираются в школьном учебнике. Положим $x^4=t$. Тогда уравнение перепишется в виде $t^2+at+1=0$. Пусть t_1 и t_2 — действительные корни этого уравнения. Легко видеть, что t_1 и t_2 должны быть положительны и различны. Предположим для определенности, что $0<t_1<t_2$. Тогда исходное уравнение имеет следующие корни (занумерованные в порядке возрастания): $x_1=-\sqrt[4]{t_2}$, $x_2=-\sqrt[4]{t_1}$, $x_3=\sqrt[4]{t_1}$, $x_4=\sqrt[4]{t_2}$.

Чтобы эти четыре корня образовывали арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$ или $\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}=2\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}$, то есть $2\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}-\sqrt[4]{t_1}$, $3\sqrt[4]{t_1}=\sqrt[4]{t_2}$, $81t_1=t_2$.

Теперь воспользуемся теоремой Виета. Если $81t_1=t_2$, то $81t_1^2=t_1\cdot t_2$. Но по теореме Виета $t_1t_2=1$, поэтому $81t_1^2=1$, $t_1=\pm\frac{1}{9}$, $t_2=\pm 9$. Но мы требуем, чтобы t_1 и t_2 были положительны, значит, $t_1=\frac{1}{9}$, $t_2=9$. Таким образом, найденные значения t_1 и t_2 являются единственно возможными. Посмотрим, могут ли получиться такие корни при каких-нибудь значениях a. Снова по теореме Виета находим, что единственно возможным значением a является $a=-(t_1+t_2)=-9\frac{1}{9}$. Но есть теорема, обратная к теореме Виета, о том, что если $x_1x_2=q$ и $x_1+x_2=-p$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$. Значит, числа $\frac{1}{9}$ и 9 действительно являются корнями уравнения $t^2-\left(\frac{1}{9}+9\right)t+\frac{1}{9}\cdot 9=0$.

Ответ: $a=-9\frac{1}{9}$.

Бóльшая часть абитуриентов не пользовалась теоремой Виета, а записывала корни в виде

$$t_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},\quad t_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2},$$

откуда и находила a. Решение получалось сложнее и длиннее.

3. Легко видеть, что ОДЗ задается тремя неравенствами:

1) $\frac{3}{x}-2x>0$, 2) $2x-1>0$, 3) $0<\cos x^2<1$.

При таких x исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{3}{x}-2x>2x-1.$$

Осталось решить систему четырех неравенств:

1) $\frac{3}{x}-2x>0$, 2) $2x-1>0$, 3) $0<\cos x^2<1$, 4) $\frac{3}{x}-2x>2x-1$.

Из второго неравенства $2x-1>0$, $x>\frac{1}{2}$. Теперь мы можем домножить первое неравенство на x: $3-2x^2>0, x^2<\frac{3}{2}$. Поскольку $\pi>3$ и $x^2<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $0<x^2<\frac{\pi}{2}$ и неравенство $0<\cos x^2<1$ выполняется автоматически. Последнее неравенство можно также домножить на x: $3-4x^2+x>0$, откуда $-\frac{3}{4}<x<1$. Сопоставляя три неравенства: $x>\frac{1}{2}$, $x^2<\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{4}<x<1$, находим ответ: $\frac{1}{2}<x<1$.

4. Ответ: $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9\operatorname{tg}\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^9\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^{15}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Экономический факультет (дневное отделение)

Вариант

1. Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен 150 *куб. см*, площадь полной поверхности равна 280 *кв. см*, периметр основания равен 40 *см*. Найти размеры бруска.

2. В квадрате $ABCD$ площади 1 сторона AD продолжена за точку D и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D. Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N, причем длина отрезка ON равна a. Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K, причем $\angle BKL = \alpha$. Найти площадь многоугольника $BKLMN$.

3. Решить уравнение $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x$.

4. Решить уравнение $|z| \cdot i - z = 1 + 2i$.

Решения задач

1. Обозначим стороны основания бруска через x (*см*) и y (*см*), а высоту бруска через z (*см*). Пусть для определенности $x \geqslant y$. Тогда

$$\begin{cases} xyz = 150, \\ 2(xy + yz + xz) = 280, \\ 2(x + y) = 40, \\ x \geqslant y. \end{cases} \qquad (*)$$

Из первого и третьего уравнений $xy = \frac{150}{z}$ и $x + y = 20$. Подставив эти выражения во второе уравнение, получим уравнение относительно z: $\frac{15}{z} + 2z = 14$, откуда $z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{2}$. Теперь нам известны сумма $x + y$ и произведение $xy = \frac{150}{z}$ чисел x и y, значит, x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - 20t + \frac{300}{7 \pm \sqrt{19}} = 0$. Решая его, находим

$$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - \frac{300}{7 \pm \sqrt{19}}}$$

При $z = \frac{7 - \sqrt{19}}{2}$ дискриминант этого уравнения отрицателен: $100 - \frac{300}{7 - \sqrt{19}} < 100 - \frac{300}{7 - 4} = 0$, а при $z = \frac{7 + \sqrt{19}}{2}$ дискриминант положителен и меньше 100. При этом значении z $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, то есть $x > 0$, $y > 0$. Легко видеть, что числа $z = \frac{7 + \sqrt{19}}{2}$, $x = 10 + \sqrt{100 - \frac{300}{7 + \sqrt{19}}}$, $y = 10 - \sqrt{100 - \frac{309}{7 + \sqrt{19}}}$ действительно являются решением системы (*).

Ответ: стороны основания равны $10 \pm \sqrt{100 - \frac{300}{7 + \sqrt{19}}}$, высота равна $\frac{7 + \sqrt{19}}{2}$.

Почти ни у кого из абитуриентов составление правильной системы уравнений в этой задаче не вызвало затруднений. Однако решение полученной системы многим оказалось не под силу. Некоторые абитуриенты, найдя два значения z, формально находили соответствующие значения x и y, не заботясь о том, что в одном из указанных ими ответов x и y не являются действительными числами.

2. Ответ: $S_{BKLMN} = 1 + \frac{(1+3\operatorname{tg}\alpha)^2}{2\operatorname{tg}\alpha} - \frac{7}{8}\sqrt{a^2-16}$.

3. $\log_2\log_2 x = \log_4\log_4 2x$, $\log_4(\log_2 x)^2 = \log_4\log_4 2x$, $(\log_2 x)^2 = \log_4 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$,

$$(\log_2 x - 1)\left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*), как легко видеть, является следствием исходного, то есть всякий корень исходного уравнения удовлетворяет (*). Найдя корни (*) и проверив их подстановкой в исходное уравнение, получаем ответ: $x = 2$.

4. Запишем комплексное число z в виде $z = x + iy$, где x, y — действительные числа. По определению $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, в частности, $|z|$ — действительное число. Перепишем уравнение в виде $|z|\cdot i - (x+iy) = 1+2i$. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда у них равны действительные и мнимые части. Поэтому решаемое уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} -x = 1, \\ |z| - y = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = -1$, поэтому $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+y^2}$, и для определения y получаем уравнение $\sqrt{1+y^2} = y+2$. Возведя обе части в квадрат и сделав проверку, находим $y = -\frac{3}{4}$, то есть $z = -1 - \frac{3}{4}i$.

Хотя для решения задачи 4 не требуется знаний, выходящих за рамки «Программы вступительных экзаменов по математике для поступающих в высшие учебные заведения СССР», с этой задачей абитуриенты справились очень плохо. Большинство поступавших обнаружило незнание определений модуля комплексного числа и равенства комплексных чисел.

Психологический факультет (вечернее отделение)

Вариант

1. Найти все действительные значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+ax+a=0$ действительны и удовлетворяют соотношениям $x_1<x_2$, $x_1^2x_2=a^2$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{x}}\log_{\frac{x+1}{x}}\frac{x}{3} \leqslant \log_{\frac{x-1}{x}}\log_{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x}{2}-1\right).$$

3. Садовник при сдельной работе первый день работал так: полдня копал яму, следующие полдня сажал кусты; заработал 3 рубля. На другой день он полдня сажал кусты и полдня косил траву; заработал за этот день 2,5 рубля. На третий день он полдня копал яму и полдня косил траву; заработал 3,5 рубля. Сколько он заработает денег, если весь день будет косить траву?

4. В тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, вписан шар. Найти отношение площади его поверхности к площади поверхности тела, зная, что один из острых углов треугольника равен α.

Решения задач

1. По теореме Виета $x_1x_2 = a$. Поэтому, если $x_1(x_1x_2) = a^2$, то $x_1a = a^2$, или $a(x_1-a) = 0$. Ясно, что $a\neq 0$, так как при $a = 0$ $x_1 = x_2 = 0$ и условие $x_1<x_2$ не выполнено. Значит, $x_1-a = 0$, $x_1 = a$. Но

$x_1x_2=a\neq 0$, поэтому $x_2=1$. Опять по теореме Виета

$$x_1+x_2=-a,$$

поэтому $1+a=-a$, откуда $a=-\frac{1}{2}$. Но решение задачи на этом не окончено.

Проверка. При $a=-\frac{1}{2}$ корни нашего уравнения равны 1 и $-\frac{1}{2}$. Возьмем $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=1$. Тогда $x_1<x_2$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, то есть $x_1^2\ x_2=a^2$ и значение $a=-\frac{1}{2}$ удовлетворяет всем условиям задачи. Ответ: $a=-\frac{1}{2}$.

2. Чтобы обе части неравенства имели смысл, необходимо и достаточно выполнения следующих неравенств:

1) $\frac{x}{3}>0$; 2) $\frac{x}{2}-1>0$;

3) $\frac{x+1}{x}>0$, $\frac{x+1}{x}\neq 1$;

4) $\frac{x-1}{x}>0$, $\frac{x-1}{x}\neq 1$;

5) $\log_{\frac{x+1}{x}}\frac{x}{3}>0$;

6) $\log_{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x}{2}-1\right)>0$.

Из 1) и 2) следует, что $x>2$. Из $x>2$ следует, что $\frac{x+1}{x}>1$ и $\frac{x-1}{x}<1$; значит, 3) и 4) выполняются автоматически. Поскольку при $x>2$ $\frac{x+1}{x}>1$от, 5) эквивалентно неравенству $\frac{x}{3}>1$ или $x>3$, а 6) эквивалентно неравенству $\frac{x}{2}-1>1$ или $x>4$. Таким образом, ОДЗ задается неравенством $x>4$.

Поскольку $\frac{x-1}{x}<1$ и $\frac{x+1}{x}>1$ при $x>4$, то исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\log_{\frac{x+1}{x}}\frac{x}{3}\geqslant\log_{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x}{2}-1\right),$$

а последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{x}{3}\geqslant\frac{x}{2}-1,$$

решая которое, находим $x\leqslant 6$. Учитывая ОДЗ, получаем окончательный ответ: $4<x\leqslant 6$.

3. Ответ: 3 рубля.

4. Ответ: $\frac{2\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^3}$.

Экономический факультет (вечернее отделение)

Вариант

1. Из разных концов вагона движущегося поезда навстречу друг другу выходят два человека. Первый движется в сторону головного вагона поезда и имеет относительно вагона скорость 0,5 *м/сек*. Второй имеет относительно земли скорость 63 *км/ч*. Через 5 *сек* после начала движения расстояние между ними сокращается до одной пятой длины вагона и составляет одну сороковую часть пути, проходимого поездом за 5 *сек*. Найти скорость поезда.

2. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах $AB=6$ и $BC=8$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен отрезку AC. Известно, что периметр многоугольника $AMNCD$ относится к периметру треугольника MBN, как 7 : 3. Найти длину отрезка MN.

3. Решить уравнение $\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$.

4. Решить неравенство $2^{2x-1}>1-2^{x-1}$.

Решения задач

1. Ответ: скорость поезда равна $\frac{170}{9}$ *м/сек* $\approx 18{,}9$ *м/сек*.

2. По условию задачи $MN \parallel AC$, поэтому $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$. В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны: $\frac{MB}{BN}=\frac{AB}{BC}$. Но $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$, поэтому удобно взять $MB=3x$, тогда $BN=\frac{4}{3}MB=4x$. Выражая периметры $AMNCD$ и MBN через x, получаем уравнение $\frac{28-2x}{12x}=\frac{7}{3}$, откуда $MN=5x=\frac{14}{3}$. Ответ: $MN=\frac{14}{3}$.

3. Ответ: $x=\frac{\pi n}{4}$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

4. Ответ: $x>0$.

Наиболее распространенными ошибками в этом варианте были ошибки в решении простейших тригонометрических и показательных уравнений, к которым приводятся задачи 3 и 4. Так, например, многие абитуриенты неверно решили уравнение $\sin 4x=0$ в задаче 3 и уравнение $2^x=-2$ в задаче 4.

В заключение предлагаем несколько задач из других вариантов для самостоятельного решения.

Дневное отделение психологического факультета

1. Найти все отличные от нуля действительные значения a, при которых уравнение $x(x^{12}-ax^6+a^4)=0$ имеет ровно пять действительных корней, образующих арифметическую прогрессию.

2. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{\cos x^2}\left(\frac{5}{2x}-2x\right)>$ $>\log_{\cos x^2}(2x-1)$.

Вечернее отделение психологического факультета

3. Найти все действительные значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+ax+1=0$ действительны и удовлетворяют соотношениям $x_1<x_2$, $x_1+2x_2=4$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\log_{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}\left(x-\frac{3}{4}\right)\leqslant\log_{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\log_{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}(2-x).$$

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ АБИТУРИЕНТОВ

22 декабря 1970 года в Московском институте стали и сплавов ректорат совместно с кафедрой высшей математики провел совещание преподавателей математики средних школ города Москвы, посвященное обсуждению математической подготовки абитуриентов технических вузов.

С совместным докладом «О необходимом уровне математической подготовки абитуриентов» выступили зав. кафедрой высшей математики профессор И. Е. Базилевич и профессор М. А. Акивис. В докладе было отмечено, что при изучении курса высшей математики во втузе особенно часто приходится использовать следующие разделы школьного курса математики: преобразования алгебраических и тригонометрических выражений, свойства основных элементарных функций и их графики, решение различного рода уравнений, неравенств и систем уравнений или неравенств, понятия абсолютной величины действительного числа и арифметического корня, основные теоремы и формулы геометрии и т. д.

Однако именно этими разделами плохо владеют многие абитуриенты и студенты первых курсов. Докладчики подчеркнули, что многие абитуриенты не умеют правильно и грамотно оформлять свои работы, что связано с неумением четко и последовательно мыслить.

В заключение доклада были сформулированы некоторые положения, выполнение которых должно способствовать повышению уровня математической подготовки абитуриентов:

а) на протяжении всего обучения математике в средней школе следует обращать внимание на логическую обоснованность и стройность курса; учащиеся должны уметь правильно мыслить, рассуждать и грамотно оформлять свои мысли;

б) при решении разного рода уравнений и неравенств следует использовать понятие области допустимых значений и приучать учащихся следить за изменением этой области при тех или иных преобразованиях;

в) особое внимание надо обратить на технику тождественных преобразований алгебраических и тригонометрических выражений; следует требовать запоминания основных формул алгебры, тригонометрии и геометрии;

г) следует добиваться твердого знания свойств и графиков основных элементарных функций; эти свойства должны использоваться при решении уравнений и неравенств;

д) при решении геометрических задач учащиеся должны уметь делать правильный чертеж и проводить четкое обоснование всех построений и вычислений;

е) действующая школьная программа по математике не содержит некоторых тем, знание которых желательно при изучении курса математики во втузе. К ним относятся теория соединений, бином Ньютона, теорема Безу и решение двучленных уравнений. Эти темы следует включать в тематику факультативных занятий по математике. Кроме того, на этих занятиях следует более глубоко, чем это предусмотрено программой, изучать комплексные числа и обратные тригонометрические функции.

В докладе доцента В. В. Гольдберга были освещены наиболее распространенные ошибки, допускаемые абитуриентами на приемных экзаменах.

Наибольшее число ошибок в работах абитуриентов встречается при решении показательных и логарифмических уравнений и особенно неравенств; уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины; при записи общего вида углов, соответствующих данному значению тригонометрических функций, и особенно при решении простейших тригонометрических неравенств; при построении графиков простейших трансцендентных функций.

Часто приходится встречаться с ошибками логического характера, особенно в курсе геометрии: учащиеся путают теорему с определением, прямую теорему с обратной; свойства некоторых частных классов фигур переносят на более общие классы (считают, что всегда медиана совпадает с биссектрисой или высотой треугольника, и т. п.); не владеют методом математической индукции; не видят необходимости в доказательстве свойств некоторых функций (тригонометрических, показательной, логарифмической).

Еще раз было обращено внимание на плохое оформление письменных работ многими абитуриентами. При записи решения задач отсутствует логическая последовательность, ряд необходимых обоснований (особенно в геометрии) оказывается пропущенным.

Докладчик указал ряд конкретных ошибок, допущенных абитуриентами при решении письменных работ в 1970 году.

При решении иррационального уравнения

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$$

многие абитуриенты после возведения в куб заменяли $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ на $\sqrt[3]{x-1}$, приобретая при этом посторонний корень $(x=0)$.

При решении неравенств часто делаются преобразования, приводящие к посторонним решениям. Эти посторонние решения отбросить с помощью проверки трудно, поскольку они могут заполнять целый промежуток.

Так, решая неравенство

$$x>\sqrt{2x+24}$$

возведением в квадрат, многие получали ответ $x>6, -12<x<-4$, не замечая, что все значения x из второго промежутка не удовлетворяют данному неравенству (этого не случилось бы, если бы поступающие заметили, что из условия вытекает неравенство $x>0$). При решении неравенства

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant(x^2+x+1)^3$$

многие правильно видели, что надо рассмотреть случаи $x^2+x+1>1$ и $0<x^2+x+1<1$, но забывали, что, поскольку неравенство нестрогое, решениями его будут и те значения x, для которых $x^2+x+1=1$, то есть $x=0$ и $x=-1$.

Неумение правильно оперировать с абсолютной величиной и арифметическим корнем приводило к многочисленным ошибкам. Так, например, решая уравнение

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{2}\cos 3x,$$

где

$$\pi<x<\frac{3}{2}\pi,$$

многие писали

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sin x+\cos x$$

вместо правильного

$$\sqrt{1+\sin 2x}=|\sin x+\cos x|=$$
$$=-\sin x-\cos x,$$

поскольку $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$.

При упрощении выражения

$$\left(a+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

при $x=4(a-1)$, $1<a<2$ приходилось преобразовывать выражение $\sqrt{(a-2)^2}$.

Многие при этом писали

$$\sqrt{(a-2)^2}=a-2$$

вместо правильного

$$\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|=2-a,$$

так как $1<a<2$.

Основным недостатком при решении тригонометрических уравнений было плохое знание тригонометрических формул, неумение решать простейшие тригонометрические уравнения.

Решая уравнение

$$\frac{1+\operatorname{tg}x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1-\operatorname{tg}x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x,$$

некоторые поступающие вообще не знали, что делать с левой частью этого уравнения. Те же, кто видел там две бесконечно убывающие геометрические прогрессии, правильно писали, что левая часть имеет смысл, если $|\operatorname{tg}x|<1$, то есть $-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$, но, решив уравнение, оставляли обе серии решений:

$$x_1=k\pi \text{ и } x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Уравнение

$$3\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}2x$$

многие решали нерационально, выражая $\operatorname{tg}2x$ и $\operatorname{tg}3x$ через $\operatorname{tg}x$, в результате получали сложное алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg}x$. Быстрее же всего приводило к цели такое преобразование:

$$3(\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x)=\operatorname{tg}3x(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x),$$

и, поскольку в ОДЗ $1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x\neq0$,

$$3\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}=\operatorname{tg}3x,$$

или $-3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}3x$.

При решении уравнения

$$8\cos^4 x=3+5\cos 4x$$

часть поступавших приходила к уравнению четвертой степени относительно $\cos x$, решить которое им не удавалось. Этого не случилось бы, если бы они свели данное уравнение к алгебраическому уравнению относительно $y=\cos 2x$.

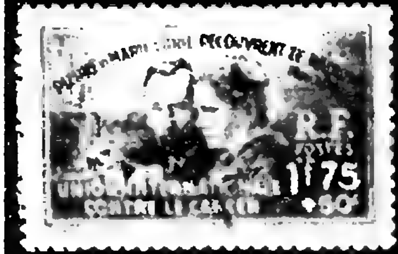
При таком решении получается квадратное уравнение

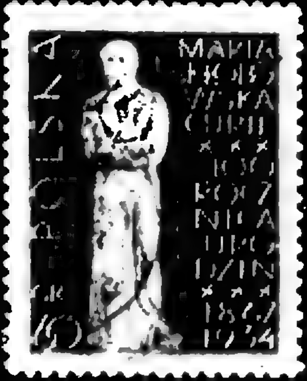
$$2y^2-y-1=0.$$

При решении геометрических задач, кроме указанных выше логических ошибок, докладчик отметил неграмотные чертежи (неверное изображение осевого сечения конуса, полюсов шара — по этому поводу см. статью Н. М. Бескина в нашем журнале № 12 за 1970 год), незнание свойств пирамиды с равнонаклонными ребрами или гранями, неумение построить линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями пирамиды или найти центры вписанного и описанного около пирамиды шаров. Большие трудности вызывают у абитуриентов зазачи, где даны нелинейные элементы (площадь, объем) или дано соотношение между какими-то элементами (сумма катетов, отношение боковой и полной поверхностей и т. п.).

В конце совещания от имени учителей выступили ученый секретарь секции средней школы Московского математического общества А. Я. Маргулис и старший методист по математике Института усовершенствования учителей С. М. Гуль, которые, в частности, указали на безусловную полезность таких совещаний и пожелали, чтобы подобные совещания проводились и в будущем.

М. Л. Смолянский,
Г. Н. Дьяченко,
В. В. Гольдберг





60
1867-1934

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МАРИИ И ПЬЕРУ КЮРИ

Мария Склодовская-Кюри (1867—1934) родилась в Варшаве. В 1833 году окончила с золотой медалью гимназию, но не могла получить в Польше высшего образования. С большим трудом ей удалось поступить в 1891 году в Парижский университет.

С 1895 года Мария Склодовская работала в лаборатории известного французского физика и химика Пьера Кюри (1859—1906), женой которого она стала. В 1897 году М. Кюри занялась изучением открытого французским ученым Анри Беккерелем излучения солей урана. Заинтересовавшись работами жены, в них вскоре принял участие и Пьер Кюри. Совместные исследования Марии и Пьера привели в 1898 году к открытию полония (названного в честь родины Марии — Польши) и радия.

Супруги Кюри впервые установили, что радиоактивные лучи вызывают изменения в клетках живых организмов.

После смерти мужа, в 1906 году, Мария Кюри заняла его место профессора и заведующего кафедрой в Парижском университете, где была первой женщиной профессором, и впервые начала читать курс лекций по радиоактивности.

За свои работы, сыгравшие огромную роль в создании современной физики, Мария Кюри была избрана членом академий наук многих стран. В 1907 году она была избрана членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, а в 1926 году — почетным членом Академии наук СССР. В 1903 году Марии Кюри совместно с Анри Беккерелем и Пьером Кюри была присуждена Нобелевская премия; в 1911 году ей присуждают эту премию вторично.

Первая марка с портретом Марии Кюри вышла в 1935 году в Турции. В 1938 году в честь 40-летия открытия радия вышли марки во Франции, французских колониях (21 страна), Афганистане и на Кубе с изображением Марии и Пьера Кюри, рассматривающих пробирку с открытым ими радием (рисунок всех марок одинаковый; на фото приведена французская марка).

Марку с портретом Марии и Пьера Кюри в 1938 году выпустило княжество Монако. Портрет Марии Кюри изображен также на марке Суринама (выпуск 1950 г.). Много марок, посвященных Марии Кюри, вышло на ее родине, в Польше. Первые из этих марок с портретом Марии Кюри

REPUBLIQUE FRANÇAISE
0,60

(1947 г.) вы видите на фото (марка голубого цвета вошла также в блок, посвященный выдающимся деятелям польской культуры). Марки с портретом Марии Кюри выходили в Польше также в 1951, 1963 и 1967 годах (последние две марки приведены на фото). Кроме того, в Польше в 1955 и в 1967 годах выпущены марки с изображением памятника Марии Кюри в Варшаве и марка, посвященная присуждению ей Нобелевской премии в 1903 и 1911 годах.

На фото приведены также марки с портретами Марии Кюри, выпущенные во Франции и ГДР к 100-летию со дня ее рождения.

Марки, посвященные Марии и Пьеру Кюри, выходили в Панаме и в 1963 году были выпущены в Афганистане. В 1956 году, к 50-летию со дня смерти Пьера Кюри, в Советском Союзе и Болгарии вышли марки с его портретом. На фото представлена также шведская марка, выпущенная в 1963 году и посвященная лауреатам Нобелевской премии 1903 года — Пьеру и Марии Кюри и Анри Беккерелю.

А. В. Алтыкис

ПЬЕР
КЮРИ
ПО
СССР
1956

ПИЕР КЮРИ
1906
1956
NR BULGARIA
2

NOBELPRIS 1903
BECQUEREL
P CURIE
M CURIE
SVERIGE 50

ПОЛЕЗНАЯ КНИГА

Разностороннее изучение космического пространства, исследование Луны и планет, планирование, подготовка и осуществление космических полетов разнообразного научного назначения — все это потребует в ближайшем будущем усилий многих тысяч людей. Немало нынешних школьников будут заниматься этими вопросами.

Тем учащимся старших классов, которых увлекают физико-математические и технические проблемы космонавтики, большую пользу принесет недавно вышедшая из печати книга В. И. Левантовского по механике космического полета *). Отметим сразу, что эта книга не для занимательного чтения на сон грядущий. Работа над ней потребует от читателя известного напряжения, читать ее необходимо не запоем, а умеренными дозами, с бумагой и карандашом в руках. Но несомненно, что такая затрата сил и времени окупится сторицей.

Говорят, что два чудовища грозят каждой научно-популярной книге: это Сцилла ненаучности и Харибда недоступности.

Приятно отметить, что данная книга, несмотря на сложность рассматриваемых в ней проблем, не только написана достаточно доступно, но и на хорошем научном уровне. Многие вопросы, затронутые в книге, требуют для обстоятельного изложения привлечения довольно громоздкого (и значительно превышающего возможности школьников) математического аппарата. Однако автору

---

*) В. И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении. М., «Наука», 1970. Тираж 15 000 экз.

В. И. ЛЕВАНТОВСКИЙ
МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА
В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

удалось в каждом случае изложить сущность вопроса, не увлекаясь математическими выкладками. Как сообщается в предисловии, автор «стремился не злоупотреблять формулами, памятуя о том, что часто за деревьями формул бывает трудно увидеть лес идей». И «лес идей» действительно отчетливо просматривается в данной работе.

Основной предмет книги — это траекторные задачи космонавтики: анализ космических траекторий, их выбор и их эволюция. Остановимся подробнее на содержании книги.

Небольшое «Введение» вкратце раскрывает смысл понятий «космодинамика», содержит обзор наиболее необходимых для дальнейшего изложения сведений из школьного курса механики.

В первой части («Основы ракето- и космодинамики») в главе 1 читатель получит содержательное представление о том, как производится расчет тяги и скорости космической ракеты; он узнает, почему оказалось необходимым использование составных ракет, ознакомится с различными видами космических двигательных систем. Две другие главы первой части рассказывают об особенностях полета космического аппарата на «активном» участке (участок выведения на орбиту) и на «пассивном» участке (свободный полет с выключенным двигателем лишь под действием сил тяготения), о способах расчета космических траекторий в поле тяготения одного или нескольких притягивающих тел.

Остальные четыре части книги соответствуют различным этапам завоевания космоса: «Околоземные полеты», «Полеты к Луне», «Межпланетные полеты», «Межзвездные полеты».

За первое десятилетие космической эры было запущено более 600 искусственных спутников Земли. Об особенностях их траекторий, о различных «возмущающих» факторах, влияющих на эти траектории, повествует вторая часть книги. Здесь читатель узнает, как сказывается сплюснутость, несферичность Земли на характере орбиты спутника. А через несколько страниц читатель встретится с неожиданными результатами влияния атмосферы на движение спутника. Доходчиво объясняется, почему из-за сопротивления атмосферы скорость спутника не уменьшается, а возрастает; почему для уменьшения разогрева пилотируемого спутника (при прохождении через атмосферу) его передняя часть должна быть не заостренной, а затупленной. Отдельные параграфы посвящены неожиданным результатам влияния притяжения Луны и Солнца, давления солнечного света и других факторов на траектории и судьбы спутников.

Привлекая богатый фактический материал об уже запущенных спутниках, автор рассказывает о космических маневрах (переход спутника с одной орбиты на другую, встреча на орбите и пр.), о разнообразных практических и научных применениях спутников.

Третья часть книги освещает многие стороны проблемы полета к Луне: различные траектории попадания в Луну, облет Луны, запуск искусственных спутников Луны, полет человека на Луну и освоение Луны. Читатель найдет здесь подробное описание важнейших полетов, совершенных советскими и американскими космическими аппаратами.

Изучение планет солнечной системы средствами космонавтики было начато в 1961—1962 годах, когда были запущены советские межпланетные станции «Венера-1» (февраль 1961 года) и «Марс-1» (ноябрь 1962 года). За этим последовал запуск ряда других советских и американских «межпланетных зондов». В четвертой части рецензируемой книги не только подробно описаны эти полеты, но нарисованы перспективы будущих полетов к различным планетам, их спутникам, к астероидам и кометам, создания искусственных спутников планет и осуществления межпланетных экспедиций. В отдельной главе описаны полеты с малой тягой (в частности, перелеты с помощью солнечного паруса).

Полеты за пределы солнечной системы к другим звездным мирам; фотонная ракета как средство для выполнения такого полета; релятивистские эффекты, с которыми столкнутся покорители галактик — вот предмет последней, пятой (и самой короткой) части книги.

Книга написана живым и выразительным языком, в ней большое число интересных фактов, рисунков, замечаний. Мы уверены, что читатель прочтет ее не только с пользой, но и с удовольствием.

М. Б. Балк

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «О задачах по фотометрии»

1. Так как изображение получается на бесконечном удалении от линзы, его сила света, очевидно, должна считаться бесконечной. Но и любая площадка, освещенность которой может нас заинтересовать, бесконечно удалена от изображения источника света. Освещенность любой площадки, параллельной плоскости линзы, если, конечно, эта площадка находится в пучке света, выходящем из линзы, равна освещенности самой линзы, независимо от расстояния между линзой и площадкой.

2. $\frac{I}{H^2(n+1)^2}$, причем мы пренебрегли отражением света на границе воды и воздуха.

3. $$\frac{a\frac{b+c}{2}}{a+\frac{b+c}{2}}=\frac{a(b+c)}{2a+b+c}.$$

4. При изменении расстояния от 5 до 10 *км* все время на линзу попадал весь свет от лазера за вычетом поглощенного воздухом (в этом нетрудно убедиться, проделав соответствующие геометрические расчеты). Следовательно, полная мощность лазерного пучка за 5 *км* упала в 2 раза. За 10 *км* (от 10 до 20) она упадет в 4 раза. Кроме того, начиная с 10 *км*, линза приемника уже не перехватывает весь пучок. По закону обратных квадратов даже в абсолютно прозрачной атмосфере сигнал на 20 *км* должен быть в 4 раза слабее, чем на 10 *км*. Значит, в целом сигнал при изменении растояния с 10 до 20 *км* упадет в 16 раз.

К статье «Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году»

1. $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

2. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{4}$.

3. $\sqrt[6]{a}$.

4. $V=\frac{1}{24}a^3\operatorname{tg}\varphi$.

5. $$x=\frac{(-1)^n\arcsin(\sqrt{3}-1)}{2}+\frac{\pi n}{2}\ (n=0, \pm 1, \ldots).$$

6. $x_1=\frac{\pi}{15}(3k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3n+2)$ $(k, n=0, \pm 1, \ldots)$.

7. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

8. $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

9. -2.

10. $x_1=3$, $x_2=3\log_6 2$.

11. $x_1=10$, $x_2=0{,}1$.

12. $x_1=10^3$, $x_2=10^{-6}$.

13. $x=2$.

14. $x_1=\log_3\frac{28}{27}$, $x_2=\log_3 10$.

15. $x>3$.

16. $-1<x<1$.

17. $0<x<1$; $x>100$.

18. $1<x<2$.

19. $-3<x<2$.

20. $1<x<2$; $x>3$.

21. $a_1=2$, $a_2=\frac{2}{35}$.

22. $2\sqrt{\frac{a}{x^3}}$.

24. $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$.

К статье «Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году»

1. $a=\frac{8}{65}$.

2. $\frac{\sqrt{41}+1}{8}<x<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $a=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $1\frac{3}{8}<x<2$.

КВАНТ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

У НАС В ГОСТЯХ ВАСЯ СМЕКАЛКИН

Уже четыре года, как ленинградская детская газета «Ленинские искры» проводит математическую олимпиаду для учащихся первых, вторых и третьих классов школ Ленинграда и Ленинградской области. Задачи олимпиады, их решения и фамилии победителей печатаются в газете регулярно на страничке «Ребятам-октябрятам».

Руководит олимпиадой Вася Смекалкин. Попробуйте решить несколько задач Васи Смекалкина.

Сколько медалей?

На олимпийских играх наши спортсмены завоевали 96 медалей, из них 65 золотых и бронзовых, а золотых и серебряных —61.

Сколько золотых, серебряных и бронзовых медалей получили они в отдельности?

Попробуйте разделить

Можно ли три яблока разделить между двумя отцами и двумя сыновьями так, чтобы каждому досталось ровно по одному яблоку?

Сколько конфет было у Саши?

В день своего рождения Саша принес в класс кулек конфет.

— Сколько у тебя конфет? — спросили ребята.

— Я помню,— сказал Саша,— когда я их раскладывал парами, тройками и четверками, то каждый раз оставалась одна лишняя, а когда раскладывал пятерками, лишней не было.

Сколько конфет принес Саша?

60 ступенек до Нины. А до Тани?

Нина живет на четвертом этаже, а Таня — на втором. Нина поднимается на 60 ступенек. На сколько ступенек поднимается Таня?

Где какие шарики?

В трех ящиках лежит по одному шарику: белый, черный и зеленый. На первом ящике надпись: «белый», на втором —«черный», а на третьем — «белый или зеленый». Но ни одна надпись не соответствует действительности.

Как расположить одним приемом?

На столе стоят в ряд три стакана пустых и три с молоком. Их нужно расположить так, чтобы пустые стаканы чередовались с наполненными. Для этого разрешается взять только один стакан. Как это сделать?

Какие цифры поставить?

Вместо крестиков поставьте цифры в действии умножения:

$$\begin{array}{r} \ast\ast \\ 8\ast \\ \hline \ast\ast\ast \\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast\ast \end{array}$$

Сколько денег у Коли?

Если Коля купит одну конфету, то у него останется одна копейка, а если он захочет купить 2 конфеты, то у него не хватит одной копейки. Сколько денег у Коли?

В. М. Розентуллер

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович; М. И. Башмаков; В. Г. Болтянский; И. Н. Бронштейн; Н. Б. Васильев; И. Ф. Гинзбург; В. Г. Зубов; П. Л. Капица; В. А. Кириллин; В. А. Лешковцев *(зам. главного редактора)*; А. И. Маркушевич; М. Д. Миллионщиков; Н. А. Патрикеева; Н. Х. Розов; А. П. Савин; И. Ш. Слободецкий; М. Л. Смолянский *(зам. главного редактора)*; Я. А. Смородинский; В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор М. Л. Медведская

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 25/III 1971 г.
Подписано в печать 19/V 1971 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,67.
Тираж 263 290 экз. Т-06590.
Цена 30 коп. Заказ 650

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской обл.

НОМЕР
8

В номере:

Совершенные числа *И. Я. Депман* 1

Некоторые космические аспекты радиоактивности *Э. Резерфорд* 9

Из воспоминаний о профессоре Резерфорде *П. Л. Капица* 17

Математический кружок
Инверсия и задача Аполлония *А. П. Савин* 23

Лаборатория «Кванта»
Четыре опыта со зрением *Дж. Грегг* 29

Задачник «Кванта»
Задачи 33

Решения задач М45, М50—М60; Ф66—Ф71 *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* 35

Этот ужасный космический холод *А. Л. Стасенко* 51

Шахматно-математические заметки *Е. Я. Гик* 55

Рецензии. Библиография
Всегда ли прав наш глаз! *В. А. Лешковцев* 60

Уголок коллекционера
Марки, посвященные создателям ядерной физики *А. В. Алтыкис* 62

Ответы, указания, решения 63

«Квант» для младших школьников
Еще несколько задач Васи Смекалкина *В. М. Розентуллер* *3-я стр. обложки*
Игра с домино *4-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Совершенные числа

И. Я. Депман

В 1961 году в журнале «Математическое просвещение» была напечатана заметка профессора И. Я. Депмана о совершенных числах, то есть числах, равных сумме всех своих делителей. Мы публикуем переработку этой статьи, осуществленную специально для читателей нашего журнала академиком И. В. Петряновым-Соколовым. Добавления о совершенных числах, открытых в последнее время, написал профессор А. А. Бухштаб.

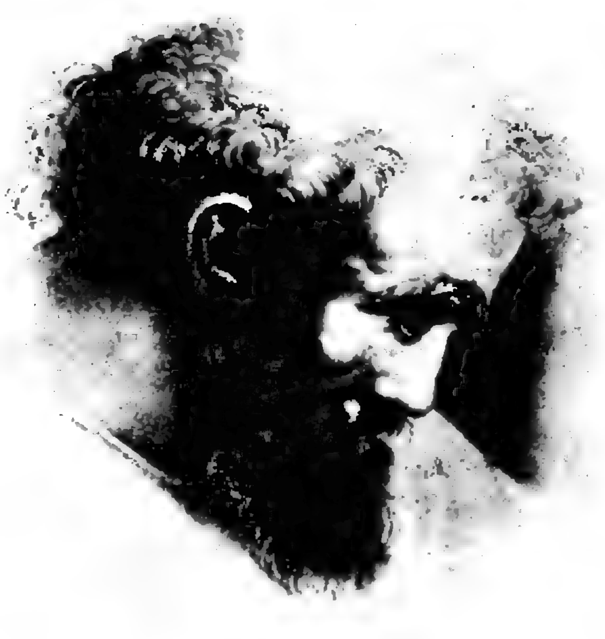
Никомах Герасский, славный грек, знаменитый философ и математик, писал: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного».

Сколько же их? Никомах, живший в первом столетии нашей эры, этого не знал.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число «6». На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый знаменитый и самый почетный гость. Особыми, мистическими свойствами обладало число 6 в учении пифагорейцев, к которым принадлежал и Никомах.

Много внимания уделяет этому числу великий Платон в своих диалогах. Недаром в библейских преданиях утверждается, что мир создан был в шесть дней, ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем «6», нет, поскольку оно первое среди них.

Следующим совершенным числом, известным древним, было «28». В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же



Пифагор (VI в. до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Личность Пифагора уже в древности стала полулегендарной. Он основал математическую и философскую школы, и многие замечательные ученые Греции называли себя последователями Пифагора.

членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах.

Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел: каждое из них равно сумме всех своих собственных делителей:

$$6=1+2+3,$$
$$28=1+2+4+7+14.$$

До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли еще другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 — простое число, является совершенным числом. Если в формулу Евклида $2^{p-1}(2^p-1)$ подставить $p=2$, то получим $2^{2-1}(2^2-1)=6$ — первое совершенное число, а если подставить в нее $p=3$, то получим второе совершенное число:

$$2^{3-1}(2^3-1)=28.$$

Благодаря своей формуле Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при $p=5$ и четвертое при $p=7$. Вот эти числа:

$$2^{5-1}(2^5-1)=2^4\cdot(2^5-1)=16\cdot31=496$$

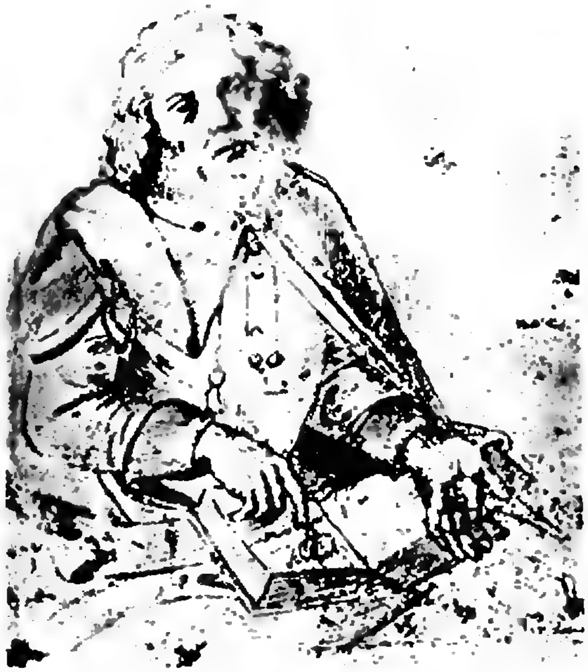
и

$$2^{7-1}\cdot(2^7-1)=2^6\cdot(2^7-1)=8128.$$

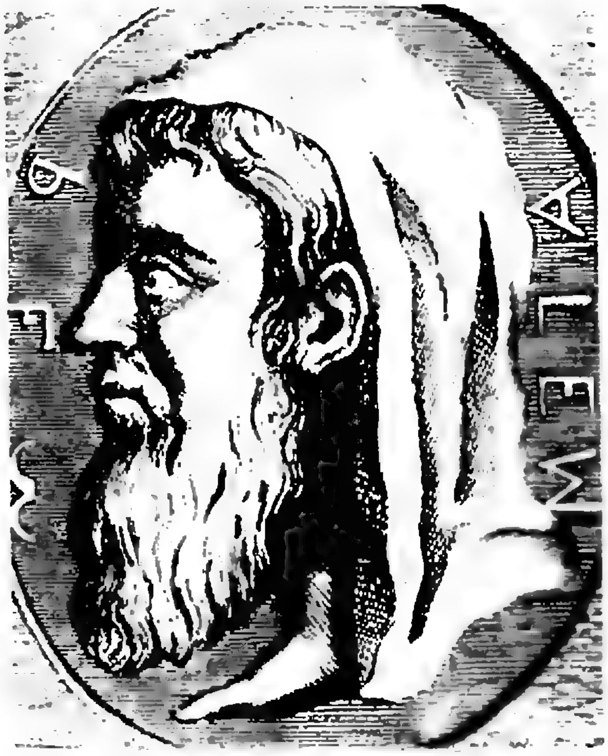
Проверьте, что они действительно равны сумме своих собственных делителей.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно было бы представить в евклидовской форме, и никто не мог сказать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида.

Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной, их непостижимость привели к признанию божественности



Платон (ок. 429—348 до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Платон стоял в центре научной жизни своего времени. Он руководил научной работой многих выдающихся математиков.



Евклид (365 — ок. 300 до н. э.). Портрет с бронзовой медали. Автор «Начал», в которых была собрана вся математика, изучавшаяся в школе Платона. По этому труду мир осваивал геометрию на протяжении тысячелетий.

этих удивительных чисел. Один из наиболее выдающихся ученых средневековья, друг и учитель Карла Великого, аббат Алкуин, один из виднейших деятелей просвещения, организатор школ и автор учебников по арифметике, был твердо убежден, что человеческий род только потому несовершенен, и в нем только потому царит зло, горе и насилие, что он произошел от восьми людей, спасшихся в ноевом ковчеге от потопа, а «8» — число несовершенное. Род людской до потопа был более совершенен — он происходил от одного Адама, а единица может быть причислена к совершенным числам: она равна самой себе — своему единственному делителю. Алкуин жил в восьмом веке. Но даже в двенадцатом веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа, и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство.

Но и надежда на эту награду не смогла помочь математикам средневековья. Следующее пятое совершенное число было обнаружено лишь в пятнадцатом веке. Оказалось, что и пятое совершенное число также подчиняется условию Евклида.

Не удивительно, что его так долго не могли найти. Гораздо более поражает то, что в пятнадцатом веке вообще смогли его обнаружить.

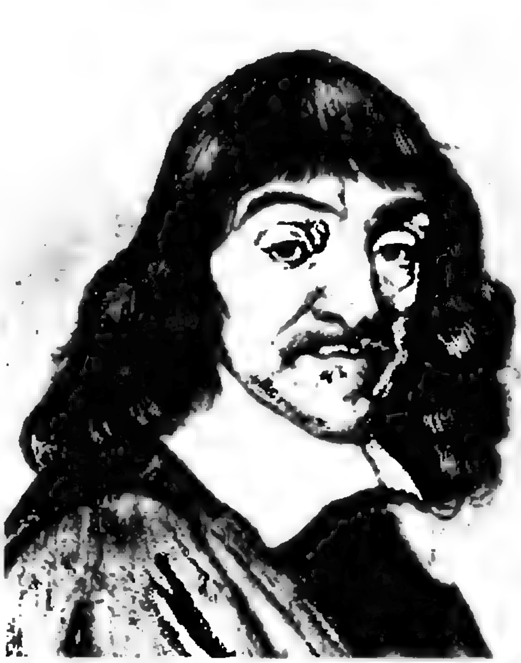
Пятое совершенное число равно

$$33\,550\,336,$$

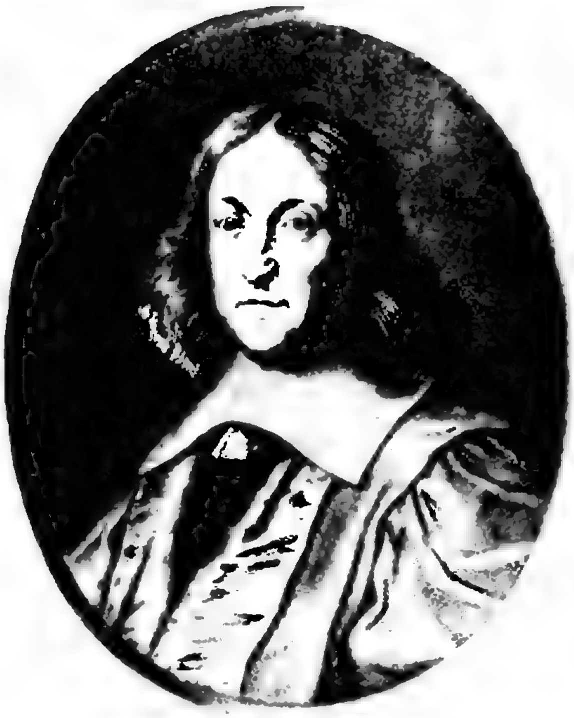
ему соответствует значение $p = 13$ в формуле Евклида.

Еще через двести лет француз Марин Мерсенн, математик и музыкант, один из основателей Парижской академии наук, друг Декарта и Ферма, без всяких доказательств заявил, что следующие шесть совершенных чисел должны иметь также евклидовскую форму со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Современникам Мерсенна было совершенно очевидно, что сам Мерсенн никак не мог проверить непосредственным вычислением свое утверждение, ведь для этого он должен был



Рене Декарт (1596 — 1650). Выдающийся французский математик, физик, физиолог и философ. Считал математику образцом для всех других наук.



Пьер Ферма (1601 — 1665). Французский математик, по профессии юрист, математикой занимался «в свободное время». Наряду с Декартом является основателем аналитической геометрии. Один из создателей теории чисел; много занимался простыми числами. Среди наиболее интересных его результатов — «малая теорема Ферма».

предварительно доказать, что числа 2^p-1 с указанными им значениями p являются действительно простыми.

Вычислить любое из них совсем нетрудно, но выяснить, простые все эти числа или нет, — это выходило далеко за пределы человеческих сил.

Так и осталось неизвестным, прав был Мерсенн или нет.

Но позднее было обнаружено, что веселый итальянец Катальди, бывший профессором математики во Флоренции и Болонье, который первый дал способ извлечения квадратных корней, тоже для спасения своей души занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел, найденные им почти за сотню лет до Мерсенна:

8 589 869 056 (шестое число),
137 438 691 328 (седьмое число).

Оказалось, что оба эти числа совпадают с теми, на которые указывал Мерсенн: $2^{16}\cdot(2^{17}-1)$ и $2^{18}\cdot(2^{19}-1)$.

Но оставалось еще не доказанным, действительно ли эти числа являются совершенными; для этого необходимо, чтобы множители $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$ были простыми.

Петербургский академик, основатель современной математики, непревзойденный вычислитель, друг Ломоносова, великий Леонард Эйлер сумел найти новую теорему о таинственных и загадочных совершенных числах. Он доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечетные совершенные числа и могут ли они вообще существовать — осталось неизвестным и до нашего времени.

Эйлер доказал, что первые три числа из указанных Мерсенном: $2^{17}-1$, $2^{19}-1$ и $2^{31}-1$ — действительно являются простыми.

Шестое и седьмое совершенные числа, найденные Катальди, а позднее Мерсенном, оказались верными. И навсегда осталась в истории загадочная тайна, как они сумели найти их. До сих пор предложено только одно «объяснение» этой загадке — оно было дано еще их современниками: им помогало божественное провидение, оно подсказало своим избранникам верные значения двух совершенных чисел.

Таким образом, восьмое совершенное число, которому соответствует $p = 31$ в формуле Евклида, равно

2 305 843 008 139 952 128.

Снова в течение целого столетия это число оставалось наибольшим из совершенных чисел, но за это время математикам удалось найти новый метод, с помощью которого можно установить, является ли число 2^p-1, где p — простое число, простым или нет, не производя прямых вычислений. Оказалось, что далеко не все предсказания Мерсенна были верны. Он правильно предсказал значение $p = 127$, но числа со значениями $p = 67$ и $p = 257$, вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Зато должны быть совершенными числа со значениями $p = 61$, $p = 89$ и $p = 107$.

Девятое совершенное число было вычислено только в 1883 году. В нем оказалось тридцать семь значащих цифр. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Он сумел вычислить для того времени самое большое простое число вида $2^p—1$ при $p = 61$:

$$2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951,$$

и соответствующее ему совершенное число

$$2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951 \cdot 2^{60}.$$

И. М. Первушин, вычислив девятое совершенное число, поистине совершил настоящий подвиг. Мерсенн в свое время говорил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15—20 десятичных знаков. Первушин считал, по существу, так же — без всяких вычислительных приборов. В его же числе оказалось тридцать семь цифр.

В начале двадцатого столетия появились первые механические счетные машины. Их появление ускорило поиски новых совершенных чисел.

Десятое было найдено в 1911 году, в нем оказалось 54 цифры

$$618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111 \cdot 2^{88}.$$

Одиннадцатое, имеющее 65 цифр, открыли в 1914 году:

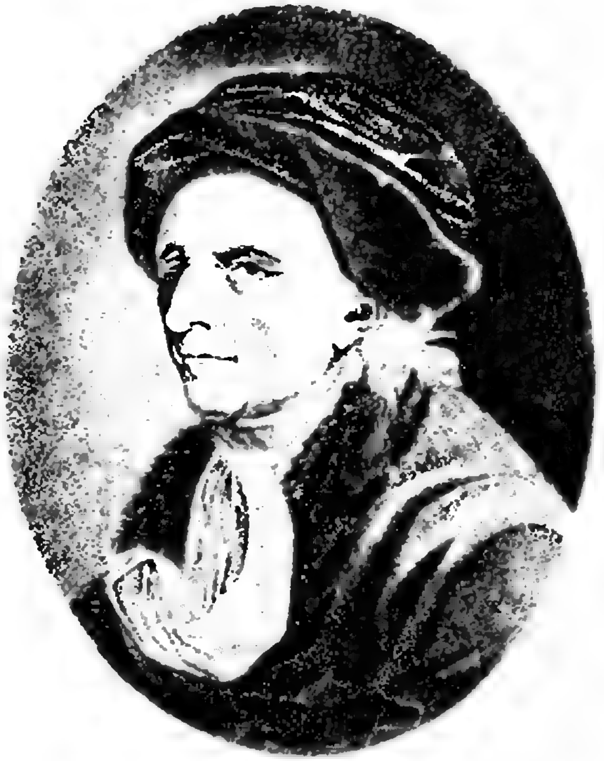
$$162\,259\,276\,829\,213\,363\,391\,578\,010\,288\,127 \times 2^{106}.$$

Двенадцатое нашли также в 1914 году, оно состоит уже из 77 цифр:

$$2^{126} \cdot (2^{127}—1).$$

В 1932 году математик Лемер решил найти тринадцатое совершенное число. Для этого он решил определить, является ли простым последнее из чисел вида $2^p—1$, которые Мерсенн считал простыми, а именно число $2^{257}—1$.

Ему пришлось работать целый год, пользуясь известными тогда счетными приборами, но в результате он убедился, что это число составное, и двенадцатое совершенное число оставалось наибольшим до 1952 года.



Леонард Эйлер (1707 — 1783). Математик с мировым именем, выдающийся механик, географ и физик. Родился в Базеле (Швейцария). С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни жил в России. Интенсивно работая в Петербургской Академии наук, многое сделал для развития русской науки, и справедливо считается русским ученым.

* * *

Тринадцатое совершенное число нашла электронная счетная машина. 30 января 1952 года американский математик Робинсон в Калифорнийском университете применил электронную счетную машину для изучения простоты чисел $2^p—1$. Робинсон решил для начала определить число $2^{257}—1$. Он пригласил присутствовать при этой проверке Лемера, который двадцать лет тому назад потратил целый год на это вычисление. Лемер получил большое удовольствие, когда увидел, что машина получила тот же самый результат, выполнив его годовую работу за восемнадцать секунд. Для того чтобы найти новое совершенное число, нужно было, следовательно, найти новое простое число. Машина продолжала поиски новых простых чисел. Она проверила за два часа 42 числа, самое меньшее из которых имело более 80 цифр! Все эти числа оказались составными. Новое совершенное число машина обнаружила к вечеру 30 января:

$$2^{520}\cdot(2^{521}-1) \qquad (p = 521);$$

тринадцатое совершенное число оказалось состоящим из 314 цифр.

Четырнадцатое совершенное число машина нашла в тот же день к полуночи. Перебрав и проверив еще тринадцать евклидовских чисел, она нашла простое число $2^{607}-1$, которое в десятичной системе имеет всего сто восемьдесят три цифры, и соответствующее совершенное число

$$2^{606}\cdot(2^{607}-1) \qquad (p = 607).$$

Четырнадцатое совершенное число имеет 366 значащих цифр.

Пятнадцатое совершенное число машина нашла только в июне 1952 года. Она была очень занята и могла уделять проблеме совершенных чисел только свое свободное от более важных дел время.

Продолжая поиски новых простых чисел, она доказала простоту числа $2^{1279}-1$ и нашла совершенное число из семисот семидесяти цифр:

$$2^{1278}\cdot(2^{1279}-1) \qquad (p = 1279).$$

Шестнадцатое и семнадцатое совершенные числа были открыты в октябре 1952 года. Машина к этому времени нашла еще два евклидовских простых числа: $2^{2203}-1$ и $2^{2281}-1$ и вычислила два соответствующих совершенных числа:

$$2^{2202}\cdot(2^{2203}-1) \qquad (p = 2203),$$

состоящее всего из тысячи трехсот двадцати семи цифр, и

$$2^{2280}\cdot(2^{2281}-1), \qquad (p = 2281),$$

в котором 1373 цифры.

Восемнадцатое совершенное число было найдено в сентябре 1957 года шведским математиком Г. Ризелем. При помощи электронно-счетной машины он за пять с половиной часов установил простоту числа $2^{3217}-1$ и получил восемнадцатое совершенное число:

$$2^{3216}\cdot(2^{3217}-1) \qquad (p = 3217).$$

В нем около 2000 цифр.

Поиски последующих совершенных чисел требовали все большего и большего объема вычислений. Но вычислительная техника непрерывно совершенствовалась, и в 1962 году было найдено два новых совершенных числа, а в 1965 году — еще три. Этим числам соответствуют в формуле Евклида значения p, равные соответственно 4 253, 4 423, 9 689, 9 941 и 11 213. Совершенное число $2^{11\,212}\times(2^{11\,213}-1)$ имеет 3 376 цифр. Конечно, только благодаря такому помощнику, как вычислительная машина, человек сумел установить, что это огромное число является совершенным.

Вот и все, что почти за два тысячелетия узнали люди о совершенных числах.

История поисков совершенных чисел наглядно показывает, как сильно увеличивает машина возможности человека. Однако, по словам Эдмунда Ландау, одного из крупнейших специалистов в области теории чисел:

«... Две проблемы остаются нерешенными до сих пор:

— Имеется ли бесконечное множество четных совершенных чисел? — Не знаю.

— Имеется ли бесконечное множество нечетных совершенных чисел? — Я даже не знаю, существует ли одно такое число».

Вряд ли к этому нужно что-либо добавлять.

Упражнения

1. Докажите, что число вида $2^{k-1}(2^k-1)$, где 2^k-1 — простое число, является совершенным.

2. Обозначим через $\sigma(n)$, где n — натуральное число, сумму всех делителей числа n. Докажите, что если числа n_1 и n_2 взаимно просты, то $\sigma(n_1\cdot n_2)=\sigma(n_1)\cdot\sigma(n_2)$.

3. Пусть n — четное совершенное число. Тогда $\sigma(n)=2n$. Представьте n в виде $2^{k-1}b$, где $k\geqslant 2$, а b нечетно, и докажите, что $b=(2^k-1)c$. Докажите далее, что $c=1$ и 2^k-1 — простое число.

V ВСЕСОЮЗНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

15—20 апреля в Риге проходил заключительный тур V Всесоюзной математической олимпиады школьников, на который собралось более 500 посланцев почти всех областей, краев и республик Советского Союза.

Работники Министерства просвещения Латвии, Латвийского университета, члены жюри — математики из Риги, Москвы, Ленинграда, Новосибирска и других городов (председатель рижского Оргкомитета — министр просвещения Латвийской ССР М. Я. Карклинь, председатель жюри — известный математик, специалист по теории автоматов Я. М. Барздинь) — сделали все от них зависящее, чтобы олимпиада прошла четко и организованно, была полезной и приятной для участников.

Два дня — 16 и 17 апреля — были отведены на решение задач первого и второго туров. Для решения задач каждого тура отводилось 5 часов. 18 апреля члены жюри прочли лекции для участников олимпиады, а затем по каждому классу в отдельности провели разбор задач.

19 апреля в тех школах-интернатах, где разместились школьники и где они писали работы, был проведен индивидуальный разбор задач. В этот же день жюри подвело итоги.

20 апреля в актовом зале Латвийского государственного университета состоялось торжественное закрытие олимпиады.

Первые премии получили: по 8 классам — *Наум Гольцман* (школа № 207 г. Москвы), *Сергей Конягин* (школа № 19 г. Саратова), *Константин Севастьянов* (школа № 66 г. Астрахани); по 10 классам — *Алексей Александров* (физико-математическая школа при ЛГУ), *Сергей Гошков* (физико-математическая школа при МГУ), *Василий Ерохин* (школа № 30 г. Ленинграда), *Дмитрий Логачев* (школа № 2 г. Москвы), *Евгений Саллинен* (физико-математическая школа при ЛГУ).

Вторые премии получили: по 8 классам — *Виктор Будаев* (школа № 7 г. Смоленска), *Михаил Гусаров* (школа № 188 г. Ленинграда), *Владимир Николин* (школа № 14 г. Львова), *Евгений Хухро* (школа № 22 г. Новосибирска); по 9 классам — *Евгений Матвеев* (школа № 91 г. Москвы), *Александр Шаповалов* (школа Каскеленского р-на Алма-Атинской обл.), *Владимир Бурков* (физико-математическая школа при МГУ), *Андрей Гольберг* (школа № 2 г. Москвы), *Андрей Коган* (физико-математическая школа при МГУ), *Виктор Уфнаровский* (школа № 34 г. Кишинева), *Владимир Шварц* (физико-математическая школа при ЛГУ); по 10 классам — *Олег Ляшко* (школа № 27 г. Харькова), *Владимир Пеллер* (физико-математическая школа при ЛГУ), *Виталий Переяславский* (школа № 17 г. Николаева), *Михаил Цфасман* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Чистов* (школа № 239 г. Ленинграда), *Александр Штейнберг* (школа № 31 г. Челябинска), *Сергей Аникин* (школа № 1 г. Владимира), *Игорь Рабин* (школа № 145 г. Киева).

Третьи премии получили: по 8 классам — 8 человек, по 9 классам — 9 человек и по 10 классам — 11 человек.

Поощрительные грамоты получили 183 участника олимпиады.

В одном из следующих номеров журнала мы расскажем вам о задачах, которые предлагались на олимпиаде.

Эрнест Резерфорд (1871—1937).

Некоторые космические аспекты радиоактивности

Э. Резерфорд

30 августа 1971 года исполняется 100 лет со дня рождения Эрнеста Резерфорда. Трудно назвать человека, сделавшего больше для прогресса наших знаний о строении атома, чем Эрнест Резерфорд великий экспериментатор XX века.

Исследуя радиоактивный распад урана, Резерфорд открыл α- и β-лучи и установил, что первые из них являются потоком быстрых ядер гелия, а вторые – потоком необычайно быстрых электронов. Он показал также, что радиоактивный распад приводит к превращениям химических элементов. Проведя серию блестящих опытов, Резерфорд построил планетарную модель атома, первым поняв, что в центре атома находится тяжелое ядро, вокруг которого движутся электроны. Он создал основу современных представлений о строении вещества. В 1919 году Резерфорд осуществил первую искусственную ядерную реакцию, в ходе которой один природный газ — азот — превращался в другой природный газ кислород.

Бурное развитие ядерной физики, основоположником которой по праву считается Эрнест Резерфорд, произвело революцию в естествознании и привело к тому, что роль науки в жизни общества неизмеримо возросла.

Мы печатаем сегодня сокращенный перевод доклада, прочитанного Эрнестом Резерфордом в Канадском Королевском астрономическом обществе 3 апреля 1907 г. Доклад был опубликован в журнале этого общества за май июнь 1907 г.

Доклад печатается в сокращенном виде. Перевод с английского и подготовку публикации выполнил Ю. М. Ципенюк.

Тема моего выступления вполне естественно разделяется на две части: одна — это рассмотрение свойств самих радиоактивных веществ, другая— распространенность радиоактивных веществ в поверхности Земли и в нашей атмосфере.

Отличительной особенностью радиоактивных веществ в целом является их способность самопроизвольно и непрерывно испускать излучение особого вида, выделяя при этом тепло, а в некоторых случаях излучая также световые лучи. Эти свойства в случаях таких радиоактивных веществ, как уран или торий, проявляются если не неограниченно долго, то по крайней мере в течение времени, измеряемого миллионами лет. В случае же радия продолжительность активности короче, однако тоже измеряется тысячами лет. Это излучение самопроизвольно и совершенно не поддается химическому или физическому воздействию.

В качестве примера радиоактивного элемента я возьму радий, но следует иметь в виду, что большинство других активных элементов обладают аналогичными радиоактивными свойствами. Радий испускает три вида лучей, называемых α-, β- и γ-лучами. α-лучи отличаются малой способностью проходить сквозь вещество. Тонкого слоя писчей бумаги достаточно для того, чтобы полностью поглотить α-излучение. Эти лучи оказались состоящими из тяжелых атомов вещества, несущих положительный электрический заряд; они испускаются из активных веществ со скоростью около 30 000 *км* в секунду. По всей вероятности, α-частица представляет собой заряженный атом гелия *).

β-лучи более проникающие, чем α-лучи, и несут отрицательный заряд электричества. Они выбрасываются из радиоактивного вещества со скоростью значительно большей, чем скорость вылета α-частиц. Некоторые β-частицы вылетают со скоростью, близкой к скорости света. Их масса покоя составляет лишь одну тысячную часть массы α-частицы, и фактически они идентичны с электронами, образующимися при катодном разряде в вакуумной трубке.

γ-лучи обладают чрезвычайной проникающей способностью, легко проходят сквозь 5—10 *см* железа. Сейчас достаточно надежно установлено, что γ-лучи — это волны, подобные по характеру хорошо известным лучам Рентгена, но они обладают большей проникающей способностью.

Общим для всех этих видов излучения является способность воздействовать на фотографическую пластинку и вызывать фосфоресценцию **) в определенных видах вещества. Но с точки зрения измерения, их наиболее важным свойством является способность разряжать наэлектризованные тела. Это свойство, несомненно, приводит к наиболее чувствительному методу исследования радиоактивных веществ, и поэтому мы рассмотрим его более подробно. Возьмем обыкновенный хорошо изолированный электроскоп и зарядим его так, чтобы золотые листочки его широко разошлись. Хорошо известно, что при обычных условиях и хорошей изоляции листочки сходятся чрезвычайно медленно, и спустя несколько минут будет казаться, что листочки почти неподвижны. Теперь поместим вблизи наружного электрода электроскопа радиоактивное вещество. Листки сразу же начнут быстро сходиться, что обусловлено потерей заряда наэлектризованной системой. Независимо от того, положительный или отрицательный заряд был на электроскопе, потеря заряда происходит с одинаковой скоростью. Механизм, вызывающий разрядку электроскопа, был чрезвычайно подробно изучен, и теперь известно, что этот эффект обусловлен тем, что радиоактивное излучение ионизует окружающее электроскоп воздушное пространство, то есть образуют в нем некоторое количество носителей отрицательных и положительных зарядов — ионов. Ионы перемещаются в электрическом поле. Если, например, электроскоп заряжен положительно, то отрицательные ионы движутся по направлению к заряженной системе. Эффект разрядки электроскопа обусловлен притяжением большого числа отрицательно заряженных ионов к положительно заряженному проводнику. Когда радиоактивное вещество удаляют, быстрое сближение листков немедленно прекращается.

Эта способность излучения ионизовать воздух или другой газ лежит в основе исключительно чувствительного метода обнаружения радиоактивного вещества. Если поместить близ электроскопа часовое стекло, на которое испарялся раствор, содержавший только одну миллионную часть грамма бромида радия, то листки сойдутся за несколько секунд. Если же часовое стекло поместить на электрод, присоединенный к электроскопу, то переданный электроскопу заряд исчезнет почти мгновенно. Эффект разрядки в данном случае обусловлен прежде всего α-лучами. Это можно показать, помещая листок обыкновенной бумаги, которая поглощает

---

*) Более поздние опыты Резерфорда неопровержимо доказали, что α-частицы являются быстродвижущимися ядрами атомов гелия. (*Прим. ред.*)

**) Фосфоресценция — это явление свечения веществ после прекращения воздействия на них, например, света. Примером может служить циферблат светящихся часов. (*Прим. ред.*)

α-лучи, поверх часового стекла — скорость спадания листков станет значительно меньшей. Оставшийся эффект обусловлен действием β- и γ-лучей из этого небольшого количества радия.

С точки зрения измерений миллионная часть грамма радия вызывает большой эффект. Практически установлено, что одна тысячная часть от миллионной доли грамма (10^{-9} *г*) создает эффект, достаточный для точных измерений. При аккуратных измерениях с помощью соответствующим образом сконструированного электроскопа можно обнаружить наличие сотой, а в некоторых случаях и тысячной доли указанного выше количества. Таким образом, по увеличению скорости разрядки электроскопа можно обнаружить наличие радия в количестве 10^{-12} *г*. Как средство обнаружения малейших количеств радиоактивного вещества электроскоп намного чувствительнее, чем спектроскоп.

Подобные измерения сами по себе никоим образом не проясняют вопрос о типе радиоактивного вещества, вызывающего разрядку электроскопа. Трудно, например, сделать вывод о том, какое радиоактивное вещество было в наличии — радий, актиний или торий. Но у этих веществ имеется другое свойство, по которому можно быстро их различить. Каждое из этих веществ — торий, радий, актиний — постоянно выделяет радиоактивную эманацию — газ, который обладает весьма интенсивными радиоактивными свойствами *). Если, например, поток воздуха проходит над соединениями тория или актиния, а затем попадает в электроскоп, то наблюдается быстрый спад листочков электроскопа. Это обусловливается излучением из эманации, создающей большое число ионов в воздухе, с которым она смешивается. В случае радия эманация не выделяется из твердого соединения при обычных условиях, но легко выделяется при нагреве или растворении. Если в закрытой бутылке имеется раствор радия, то эманация собирается в воздушном пространстве над раствором; при прохождении медленного потока воздуха через раствор в электроскоп, некоторое количество эманации уносится с потоком воздуха и вызывает стремительную разрядку электроскопа. Разряжающая способность эманации, оставленной в электроскопе, сохраняется в течение нескольких недель. Но разрядный эффект не остается постоянным, а понижается и становится вдвое слабее через четыре дня, в четыре раза слабее через восемь дней и так далее. Дело в том, что эманация радия является неустойчивым веществом, разлагающимся с испусканием α-частиц. В среднем половина его разлагается в течение четырех дней. Эманации тория или актиния химически вполне отличимы от эманации радия *). Их можно сразу же отличить и по быстрой скорости спада их активного воздействия с течением времени. Разряжающая способность эманации тория снижается наполовину за 54 секунды, а эманации актиния — за 3,9 секунды.

Тот факт, что радиоактивные вещества образуют эманацию, дает возможность не только обнаружить присутствие радиоактивных веществ, но и определить их количество. Допустим, например, что мы хотим определить количество радия, присутствующего в данном образце руды. Образец надо растворить, поместить в непроницаемый для воздуха сосуд и оставить на время порядка месяца. В течение этого времени эманация накапливается в растворе и в воздушном пространстве над ним и количество ее увеличивается до тех

---

*) Эманация радия, тория и актиния — это газ радон, атомы которого несколько отличаются по весу. Эманацию тория называют тороном, а эманацию актиния — актиноном. (*Прим. ред.*)

*) Это не совсем так. Химическая природа всех трех видов эманации оказалась тождественной. (*Прим. ред.*)

пор, пока не наступает состояние устойчивого ровновесия. В этом состоянии образование новых количеств эманации компенсируется распадом эманации, обусловленным ее дальнейшим радиоактивным превращением. Затем раствор надо прокипятить, воздух, смешанный с эманацией, ввести в электроскоп и отмечать скорость движения золотых листков.

Если скорость разряда понизилась до половины ее первоначальной величины по истечении четырех дней — это точное доказательство того, что в электроскопе присутствует эманация радия.

Таким путем можно легко измерять количество радия в растворе в пределах до 10^{-11} *г*.

Эманация радия неустойчива и распадается на другое вещество, которое ведет себя как твердое вещество и обладает совершенно иными радиоактивными свойствами.

Внутренняя поверхность сосуда, содержащего эманацию радия, покрывается невидимым налетом радиоактивного вещества. Если эманацию быстро удалить потоком воздуха, этот так называемый «активный осадок» остается внутри. Активность этого осадка непостоянна и со временем быстро спадает. Через несколько часов активность уменьшается в геометрической прогрессии, снижаясь вдвое примерно за 28 минут. В случае тория активный осадок уменьшает свою активность наполовину за 11 часов; в случае актиния — за 34 минуты. Образование этого характерного активного осадка из каждой эманации дает еще одну возможность отличить присутствие тория, радия или актиния в отдельности.

Интересное свойство активного осадка, которое, как мы увидим, играет заметную роль при анализе радиоактивного состояния атмосферы, состоит в том, что в электрическом поле осадок сосредоточивается на отрицательно заряженном проводнике. Частицы активного осадка каким-то образом приобретают положительный заряд, стремятся к отрицательному электроду и прилипают к нему.

Радиоактивное состояние атмосферы

Я кратко рассказал о некоторых наиболее важных свойствах радиоактивных тел, которые оказались очень полезными при решении вопроса о распространенности радиоактивных веществ в земле и атмосфере. Пионерами в этой области исследований были профессора Эльстер и Гейтель — преподаватели гимназии в Вольфенбюттеле, Германия.

Гейтель в 1900 году заметил, что открытый воздух обладает свойством производить слабую разрядку электроскопа. Он показал, что это явление обусловливается образованием в воздухе отрицательных и положительных ионов. В поисках возможной причины этого явления Эльстер и Гейтель догадались, что оно может быть связано с наличием в атмосфере радиоактивных веществ. Тогда они попытались осуществить чрезвычайно смелый эксперимент. Я указывал уже, что эманация из радиоактивных тел образует активный осадок, который может концентрироваться на отрицательно заряженном проводе. Если в атмосфере имеется эманация, то активный осадок должен собираться на отрицательно заряженном проводнике, помещенном в атмосфере.

Эльстер и Гейтель натянули за окном лаборатории изолированный провод длиной в 20 или 30 *м* (рис. 1). При помощи электрической машины провод заряжался до отрицательного потенциала в несколько тысяч вольт. По истечении нескольких часов провод быстро снимался, его сворачивали вокруг рамы, присоединенной к электроскопу, как показано на рисунке 2, и измеряли скорость разряда электроскопа. Золотой листок быстро спадал. Величина этого эффекта не зависела от материала провода, и было убедительно показано, что он полностью

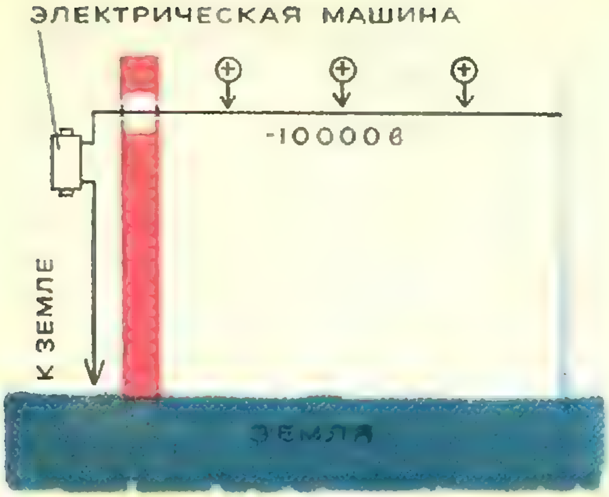


Рис. 1.

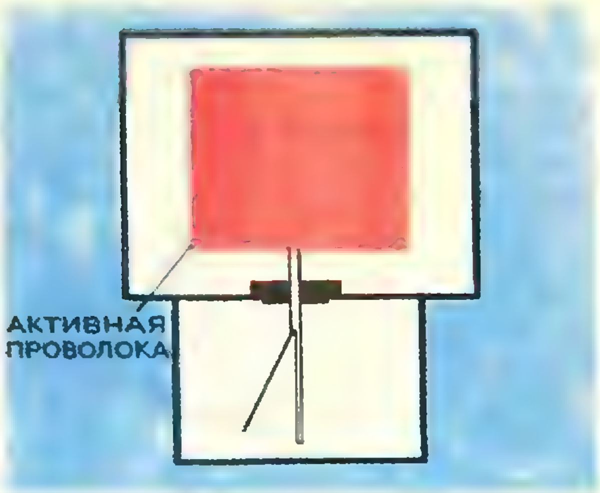


Рис. 2.

обусловлен наличием радиоактивного вещества на поверхности провода.

Мы должны теперь рассмотреть вопрос о том, как определить, какое радиоактивное вещество сконцентрировалось на проводе. Наличие в атмосфере частиц твердых тел вроде радия, урана или тория невозможно. Однако эманации из радия, тория и актиния газообразны, и если в земле имеются эти вещества, то вполне разумно ожидать, что некоторое количество выделенной ими эманации может попадать в атмосферу. На вопрос о том, какая это эманация, можно ответить вполне определенно. Если в воздухе имеется только эманация радия, то активный осадок, собравшийся на проводе, должен распадаться со скоростью, характерной для радия, то есть несколько часов спустя активность падает экспоненциально, уменьшаясь вдвое в течение 28 минут. Оказалось, что почти точно с такой скоростью распадается активный осадок из воздуха. Поэтому можно сделать вывод о том, что в атмосфере имеется эманация радия.

Предварительные эксперименты показали, что радиоактивность атмосферы обусловлена присутствием эманации радия. Бамстед в Нью-Йорке и Бланк в Италии, однако, убедительно показали, что в этих местностях в воздухе присутствует некоторое количество эманации тория. Это может быть проверено простейшим путем. Провод устанавливается на открытом воздухе, заряжается отрицательно и оставляется на несколько дней. После снятия провода часть активности, обусловленная активным осадком радия, быстро уменьшается. Через 5 или 6 часов активность все еще остается, но ее спад происходит намного медленнее: уменьшается наполовину в течение каждых 11 часов. Эта скорость распада характерна для активного осадка тория и свидетельствует о том, что в атмосфере имеется также эманация тория. Бланк недавно показал, что в некоторых местностях Италии 70 процентов активности должно быть отнесено за счет тория, но, по-видимому, в большинстве остальных мест эффект обусловливается радием.

Из сказанного мы можем сделать вывод, что атмосфера над поверхностью Земли содержит повсюду небольшие количества эманации радия и тория, а также активные вещества, возникающие при их превращениях тут же в атмосфере. Величина производимой ими ионизации мала, однако может быть точно измерена прибором, специально для этой цели сконструированным Эбертом. При помощи вентилятора, вращаемого мотором, постоянный поток воздуха пропускают между двумя концентрическими цилиндрами. Внутренний изолированный цилиндр заряжен и соединен с электроскопом (рис. 3). При про-

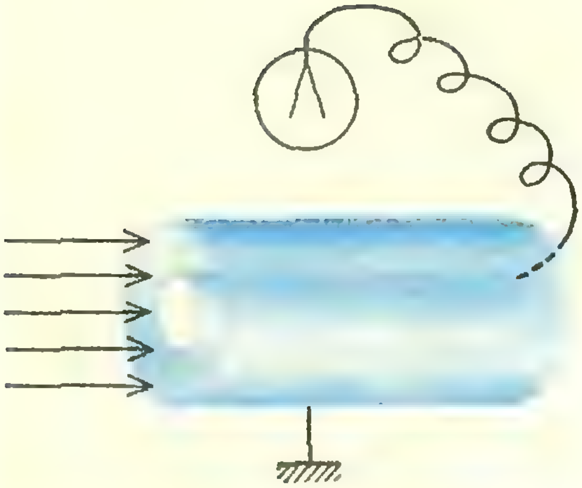


Рис. 3.

хождении ионизованного воздуха между цилиндрами ионы оседают на внутреннем цилиндре и уменьшают его заряд. Скорость разрядки является мерой количества ионов в кубическом сантиметре наружного воздуха. В одном кубическом сантиметре открытого воздуха обычно содержится около 1500 ионов эта; величина непостоянна. По сравнению с числом неионизованных молекул число имеющихся в атмосфере ионов чрезвычайно мало. Каждый кубический сантиметр воздуха содержит около 4×10^{19} молекул, так что в среднем одновременно ионизована лишь бесконечно малая часть молекул воздуха. Хотя эта ионизация очень незначительна и для ее измерения требуется чувствительный электроскоп, она все же играет очень важную роль в электрическом состоянии атмосферы.

Распространенность радиоактивного вещества в земной коре

Эльстер и Гейтель давно заметили, что пещеры и погреба, в которых долгое время сохранялся один и тот же воздух, необычайно богаты эманацией радия. Это было замечено по сильному уменьшению заряда отрицательно заряженного провода, помещенного в этих закрытых местах. Было предположено, что если это происходит в результате выделения эманации радия из почвы, то количество эманации должно увеличиваться в закрытом пространстве. Это привело к исследованию активности грунтов. Во всех пробах была обнаружена радиоактивность, а во многих — наличие эманации радия.

По-видимому, нет сомнений в том, что почва является источником эманации в атмосфере. Эта эманация выделяется из почвы в процессе диффузии или из воды источников, а затем разносится ветром. Вследствие большой скорости превращения эманаций тория и актиния по сравнению с эманацией радия следует ожидать преобладания эманации радия в атмосфере. Поэтому несколько неожиданным оказывается тот факт, что в ряде местностей обнаружены большие количества эманации тория. Эманация радия должна медленно просачиваться сквозь почву, распадаясь со временем, и следует ожидать, что бо́льшая часть эманации, имеющейся в воздухе, выделяется из тонкого слоя земли толщиной не более нескольких дециметров.

Внутреннее тепло Земли

Итак, естественно предположить, что имеется очень большое количество радия и других радиоактивных веществ, распределенных по поверхности Земли. Эта радиоактивная материя должна постоянно давать тепло Земле, и представляет большой интерес исследовать величину этого теплового эффекта и его возможного влияния на проблему происхождения внутреннего тепла Земли.

Все радиоактивные вещества непрерывно выделяют тепло. За один час радий выделяет количество тепла, достаточное для таяния такого количества льда, которое превосходит вес самого радия. Килограмм радия в течение года выделяет столько тепла, сколько получается при сгорании 100 *кг* хорошего угля. Это выделение тепла радием и всеми другими радиоактивными веществами в действительности является вторичным свойством — следствием бомбардировки активного вещества α-частицами, испущенными из его собственной массы.

β- и γ-лучи создают лишь небольшую часть суммарного теплового эффекта. Тепловой эффект радия всегда должен быть пропорционален количеству радия в земной коре и должен иметь место независимо от того, как радий распределен по земной коре. Следовательно, должно существовать постоянное поступление тепла в землю, обусловленное наличием в ней радия и других радиоактивных веществ. Но тепловой эффект, обусловленный данным количеством радия, не может существовать бесконечно. Радий превращается в другие вещества, и, казалось бы, через 20 000 лет должна остаться только небольшая его часть. Однако это не так. Теперь определенно установлено, что радий образуется из урана и что в старых минералах количество радия всегда пропорционально количеству урана.

Трансформация урана происходит значительно медленнее, чем превращение радия, и, вероятно, пройдет период по крайней мере в тысячу миллионов лет, пока уран распадется наполовину. Следовательно, за счет образования радия при распаде урана количество радия в Земле будет поддерживаться на постоянном уровне в течение периода, измеряемого сотнями миллионов лет.

Теперь кратко рассмотрим общепринятую теорию происхождения внутреннего тепла, возраста Земли. Известно, что температура Земли постепенно увеличивается по мере продвижения вглубь, — в среднем на 1° C на каждые тридцать метров в глубину. По данным о вулканической деятельности известно, что внутренняя часть Земли имеет высокую температуру.

При решении задачи о возрасте Земли Кельвин предполагал, что Земля первоначально имела температуру расплавленной горной породы и со временем постепенно охлаждалась, излучая тепло с поверхности в пространство. Некоторые величины, необходимые для расчета количества этого тепла, были недостаточно известны, однако Кельвин сделал вывод, что, несомненно, прошло не более чем 100 миллионов лет с тех пор, как поверхность Земли по своей температуре стала пригодной для жизни растений и животных.

Нет сомнения в общей правильности выводов на основе предположений, сделанных Кельвином. Давайте, однако, рассмотрим эти предпосылки. Предполагается, что Земля представляет собой изолированное остывающее в пространстве тело, не имеющее источников тепла с момента остывания. Однако обнаружение в Земле веществ, подобных радию, которые испускают тепло с большой скоростью, сразу же наводит на мысль о том, что Земля — не просто остывающее тело, а такое, в котором постоянно рождается тепло.

В 1902 году я произвел некоторые расчеты, чтобы определить, какое количество радия (или другого радиоактивного вещества), однородно распределенного в Земле, необходимо для того, чтобы изменение температуры слоев Земли вблизи поверхности с глубиной оставалось постоянным. В таком случае тепло, поступающее из радия, должно точно компенсировать потери тепла, излучающегося в пространство. Вычисления просты, и они показали, что было бы достаточно равномерного распределения радия в количестве всего лишь $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ г на 1 $см^3$.

Р. Дж. Стрэтт недавно осуществил ряд систематических наблюдений по определению содержания радия в типичных горных породах земной коры и получил исключительно интересные результаты. Стрэтт собрал ряд типичных пород — и вулканических, и осадочных, полученных из различных местностей, и определил содержание радия в этих породах. Оказывается, содержание радия в земной коре не только достаточно для поддержания внутреннего тепла Земли, а его даже больше чем требуется в том случае, если предположить, что он равномерно распределен по всей

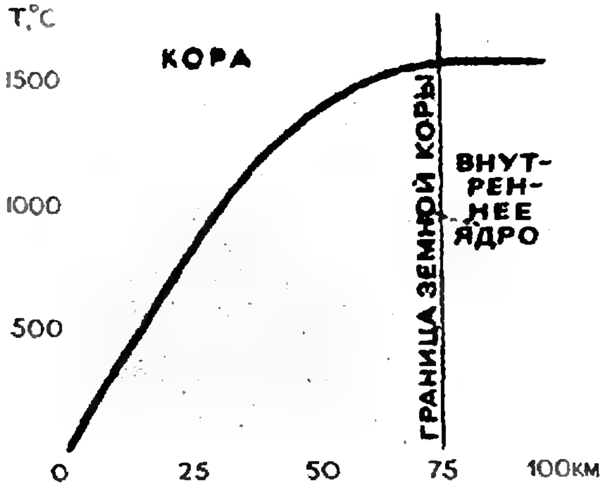


Рис. 4.

массе Земли. Последнее предположение должно приводить к выводу о том, что Земля постоянно разогревается, а не охлаждается,— выводу, к которому вряд ли можно относиться с доверием. Для того чтобы обойти это затруднение, Стрэтт предположил, что радиоактивное вещество распределено не равномерно внутри Земли, а лишь только в ее тонком поверхностном слое. Если предположить, что радий распределен в этом слое равномерно, то можно легко показать, что толщина этого слоя составляет около 70 *км*.

Предполагая, что радий содержится в поверхностном слое глубиной 70 *км*, легко подсчитать температуру Земли. Результаты расчетов показаны на рисунке 4.

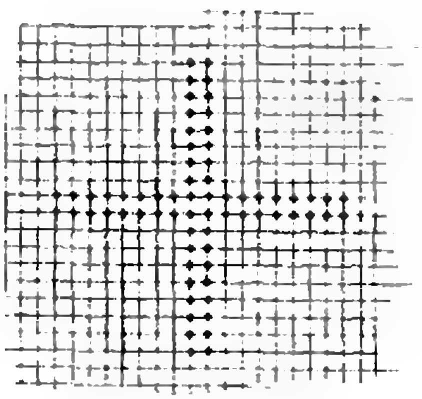
На глубине 70 *км* температура должна увеличиться примерно до 1500 °С. Температура внутренней массы Земли ниже 70 *км* должна быть примерно постоянной и равняться 1500 °С.

Я надеюсь, что теперь вам стало понятно, как изучение радиоактивности глубоко изменило наши взгляды на внутреннее тепло Земли. Новые выводы ни в коем случае не являются окончательными, но сделанное заставляет усомниться в справедливости старых теорий о происхождении Земли и об изменении ее внутреннего тепла.

ЗАДАЧИ НА БУМАГЕ В КЛЕТКУ

1. Сколько квадратов?

Узлы листа бумаги в клетку образуют крест, как это показано на рисунке.

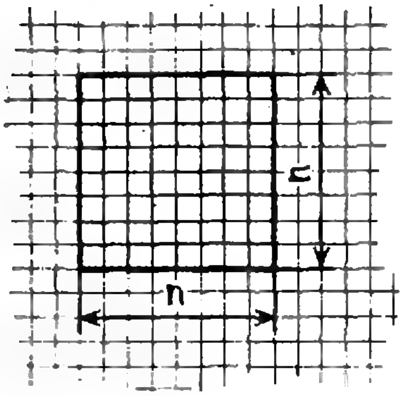


Сколько можно начертить квадратов с вершинами в выделенных узлах?

(Ответ см. на стр. 50.)

2. Сколько прямоугольников?

На рисунке вы видите квадратный лист бумаги в клетку. Давайте подсчитаем, сколько можно образовать квадратов с вершинами



в узлах этого листа и сторонами, параллельными его сторонам.

Очевидно, число возможных «единичных» квадратов равно n^2. Квадратов размерами 2×2 отыщется $(n-1)^2$. Действительно, верхний левый угол такого квадрата может быть в любом

(Продолжение см. на стр. 54.)

Из воспоминаний о профессоре Резерфорде

П. Л. Капица

Известный советский физик академик Петр Леонидович Капица 13 лет работал у Резерфорда. Мы помещаем здесь отрывки из его воспоминаний о своем учителе, опубликованных в брошюре «Жизнь для науки» (изд-во «Знание», 1965 г.) и в журнале «Новый мир» № 8 за 1966 год.

«...Одной из основных черт Резерфорда при его экспериментировании была исключительная наблюдательность, уменье обобщить явление, выяснить самое важное, самое нужное. Это можно проследить на ряде примеров. Когда он, например, открыл эманацию тория*), то исходил из наблюдения разницы в ионизации, производимой торием при открытой и закрытой дверце электроскопа. Казалось, что поток воздуха, проходящий через препарат, изменяет радиоактивность самого тория. Резерфорд стал собирать этот воздух и сразу обнаружил, что он сам радиоактивен. Это и было открытием эманации. Большинство ученых, увидя разницу, начало бы изучать явление либо при закрытой, либо при открытой дверце. Резерфорд же сразу ставит вопрос: почему это явление происходит так, а не иначе, и сейчас же старается уяснить себе, в чем тут дело. Вот этот неизменно возникающий вопрос «почему» и таил в себе ключ к великим открытиям...

...Многие говорят, что Резерфорд обладал исключительной интуицией,— он как бы чувствовал, как сделать опыт и что искать. Под интуицией обычно подразумевается какой-то бессознательный процесс, который идет внутри человека,— это то, чего нельзя объяснить, что подсознательно приводит к правильному решению. Я лично думаю, что, может быть, это отчасти и правда, но во всяком случае это сильно преувеличено. Для обычного читателя прямо неизвестно то колоссальное количество работы, которое производит ученый. Он узнает только ту часть, которая ведет к определенным результатам. Наблюдая Резерфорда вблизи, можно было видеть, какое колоссальное количество работы он выполнял. Его энергия и энтузиазм были неисчерпаемы. Он все время работал и все время искал чего-то нового. Резерфорд публиковал и доводил до сведения своих товарищей ученых только работы с положительным результатом, и вряд ли они составляли больше нескольких процентов той громадной работы, которую он проводил; остальное не только не было опубликовано, но вообще оставалось неизвестным даже его ученикам. Иногда только по отдельным намекам, прорывавшимся в разговоре с ним, можно было уловить, что он нечто пробовал, но у него не вышло. Он не любил говорить о проектах своих работ и охотнее говорил только о том, что уже сделано и дало результаты...

---

*) См. сноску на стр. 11.

...Резерфорд был экспериментатором и в этом отношении напоминает Фарадея. Он мало пользовался формулами и мало прибегал к математике. Иной раз, пытаясь вывести при своих докладах формулу, он путался и тогда просто писал результат, замечая:

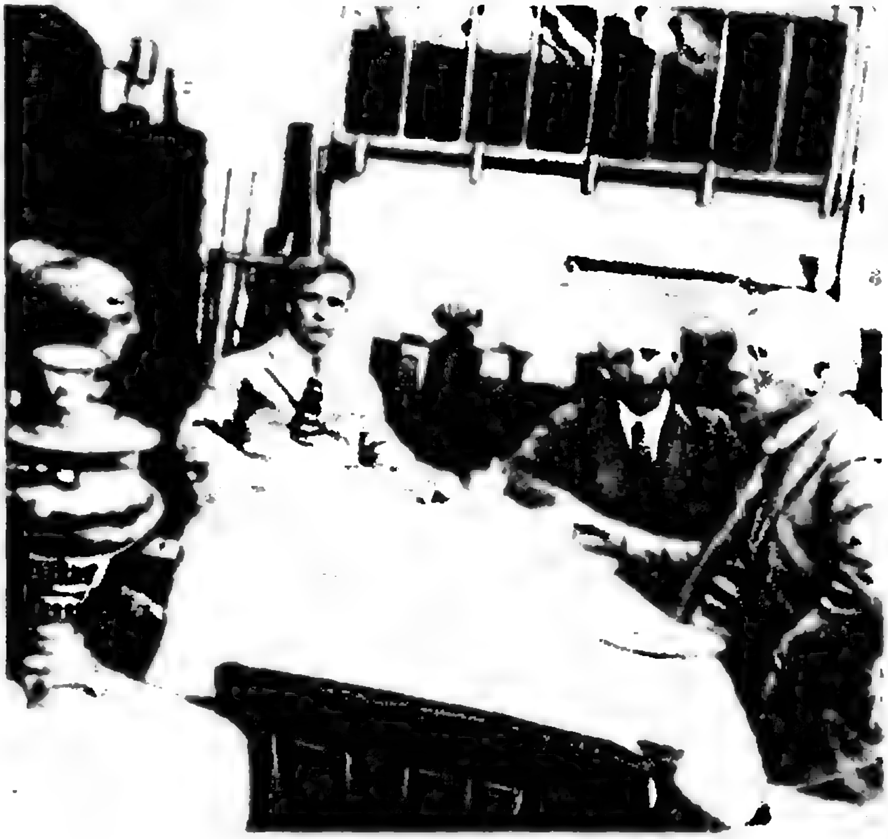
— Если все вывести правильно, то так и получится.

Но экспериментом он владел исключительно. Можно сказать, что он «видел» явление, над которым работал, хотя бы оно и происходило в неизмеримо малом ядре атома...

...Своеобразный характер мышления Резерфорда легко можно было видеть, беседуя с ним на научные темы. Он любил, когда ему рассказывали об опытах, но чтобы он слушал с интересом — а по его выразительному лицу сразу было видно, слушает он с интересом или скучает,— надо было говорить только об основных фактах и идеях, не вдаваясь в технические подробности, которые Резерфорда не интересовали. Когда мне приходилось приносить ему для утверждения чертежи импульсного генератора большой мощности для получения сильных магнитных полей, то он из вежливости клал перед собой синьку, не обращая внимания на то, что она лежала перед ним вверх ногами, и говорил: «Этот чертеж меня не интересует, вы просто укажите те принципы, на которых эта машина работает». Основную идею эксперимента он схватывал очень быстро, с полуслова. Это меня поражало, особенно в первые годы моего пребывания в Кембридже, когда из-за незнания английского языка я говорил еще настолько плохо, что не мог ясно рассказать о своих идеях и опытах, и, несмотря на это, Резерфорд быстро схватывал идею и давал всегда очень интересную оценку.

Резерфорд охотно рассказывал о своих опытах, любил показывать свои установки и эксперименты. Он любил сопровождать рассказ рисунками; для этого у него в жилетном кармане всегда было несколько маленьких огрызков карандаша. Он держал карандаш по-особому, мне всегда казалось — очень неудобным образом, как-то концами трех пальцев. Чертил он всегда дрожащей рукой, рисунок был прост, состоял из небольшого числа штрихов, сделанных с большим нажимом. Довольно часто острие карандаша ломалось, тогда вынимался из кармана другой огрызок...

...Я очень любил лекции Резерфорда, я прослушал курс физики, который он читал студентам как кавендишский профессор. Я мало что узнал из этого курса нового для себя, так как физику к тому времени я знал уже неплохо, но подход Резерфорда к физике меня научил многому. Резерфорд читал с большим увлечением, математикой он почти не пользовался, явления он обычно описывал диаграммами и сопровождал лекцию четкими, но скупыми жестами, из которых было видно, как конкретно и образно он мыслит. Но интересным для меня в его лекциях было то, что он нередко менял тему. По плану он должен был читать об одном, но потом, по аналогии, его мысль переходила на другое явление, обычно связанное с каким-либо новым опытом, сделанным в области радиоактивности, и он с увлечением начинал рассказывать о том, что его сейчас занимало. При этом хуже всего приходилось его ассистенту: ему Резерфорд неожиданно предлагал сделать демонстрацию, которая не входила в первоначальный план лекции...



Резерфорд в гостях у Капицы. Первый справа — Э. Резерфорд, второй — Ф. Астон, третий — П. Л. Капица.

...Самое замечательное качество Резерфорда как учителя было его умение направить работу, поддержать начинание ученого и правильно оценить полученные результаты.

Самое большее, что он ценил в учениках, — это самостоятельность мышления, инициативу, индивидуальность. При этом надо сказать, что Резерфорд применял все возможное для того, чтобы выявить в человеке его индивидуальность.

Я помню, еще в начале моей работы в Кембридже я как-то сказал Резерфорду: «У нас работает X., он работает над безнадежной идеей и напрасно тратит время, приборы и прочее». «Я знаю, — ответил Резерфорд, — что он работает над безнадежной проблемой, но зато это проблема его собственная, и если работа у него и не выйдет, то она его научит самостоятельно мыслить и приведет к другой проблеме, которая уже будет иметь экспериментальное решение». Так оно потом и оказалось.

Он многим готов был пожертвовать, чтобы только воспитать в человеке независимость и оригинальность мышления, и, если они проявлялись, он окружал его заботой и особо поощрял его работу...

...Резерфорд считал, что начинающему ученому не следует давать технически трудную работу. Для начинающего работника, даже если он и талантлив, нужен успех, не то может произойти необоснованное разочарование в своих силах. Если у ученика есть успех, то надо его справедливо оценить и отметить.

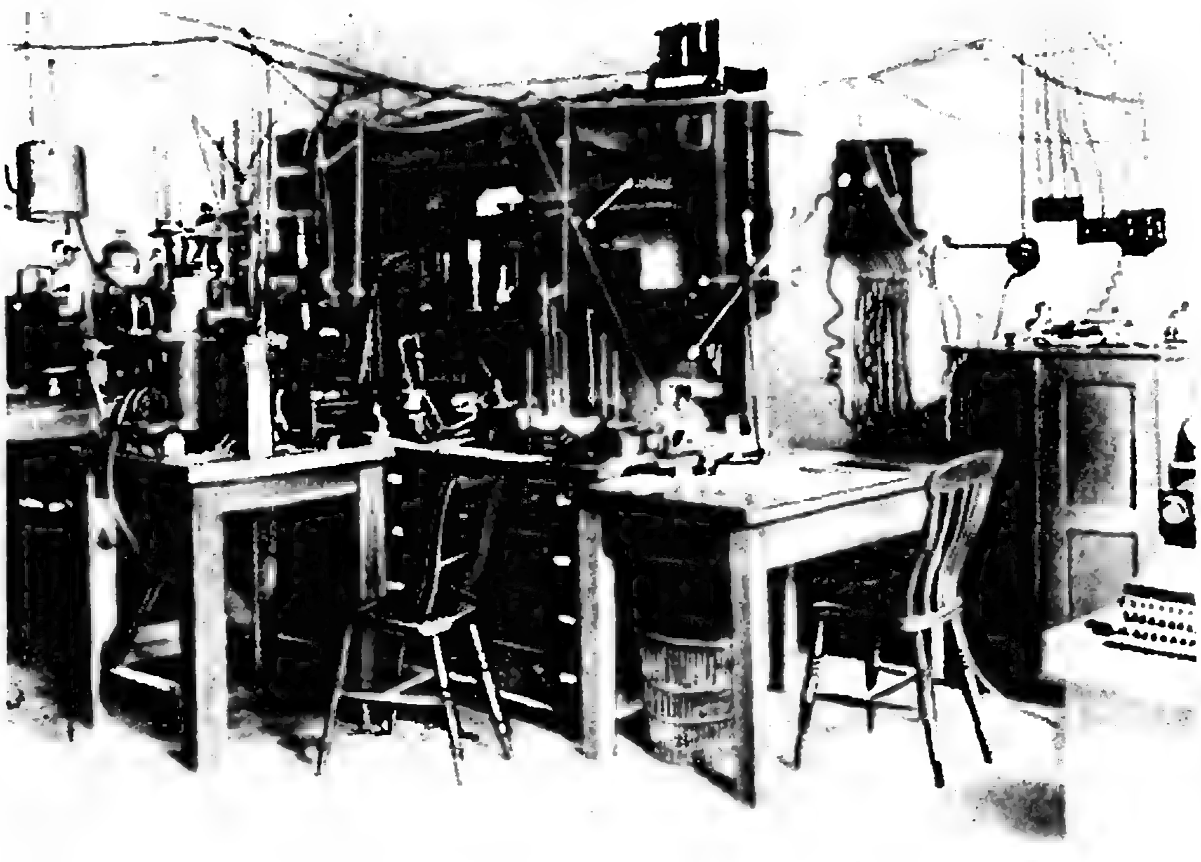
Как-то в одном из откровенных разговоров Резерфорд мне сказал, что самое главное для учителя — научиться не завидовать успехам своих учеников, а это с годами становится нелегко! Эта глубокая истина произвела на меня большое впечатление. Главным свойством учителя должна быть щедрость. Несомненно, Резерфорд умел быть щедрым, это, по-видимому, главный секрет того, что из его лаборатории вышло столько крупных ученых, в его лаборатории всегда было свободно и хорошо работать, была хорошая деловая атмосфера...

...По отношению к своим ученикам Резерфорд проявил исключительную заботу. Его взгляд на учеников был, схематизируя, такой — он говорил:

«Если у меня работает молодой ученый и после двух лет работы приходит ко мне и спрашивает, что же мне делать дальше, я ему советую бросить работу в области науки, ибо если человек после двух лет работы не знает, что ему делать дальше, из него не может выйти ученый».

По существу он так резко никогда не ставил вопрос и под тем или иным предлогом всегда находил возможность предоставить своим неудавшимся ученикам место либо где-нибудь в промышленной лаборатории, либо место учителя в какой-нибудь школе или университете...

...Из этого образа Резерфорда, который я нарисовал вам, вы сразу увидите человека с большим, сильным темпераментом. Этот темперамент выражался во всем, в особенности в суждениях. Резерфорд не выносил недобросовестности в работе и взаимоотношениях людей. Если какой-нибудь ученик проявлял хотя бы малейшую недобросовестность в чем-нибудь — в том ли, что он неправильно представлял результаты своей работы, в том ли, что он не упоминал источника своих идей и старался выставить производимую им работу за свою, тогда как он на самом деле почерпнул идею ее в другом месте,— такой человек терял для Резерфорда всякий интерес...



Рабочее место Резерфорда в Кавендишской лаборатории.

...К людям он относился исключительно заботливо, особенно к своим ученикам. Приехав работать к нему в лабораторию, я сразу был поражен этой заботливостью. Резерфорд не позволял работать дольше 6 часов вечера в лаборатории, а по выходным дням не позволял работать совсем. Я протестовал, но он сказал:

— Совершенно достаточно работать до 6 часов, остальное время нам надо думать. Плохи люди, которые слишком много работают и слишком мало думают...

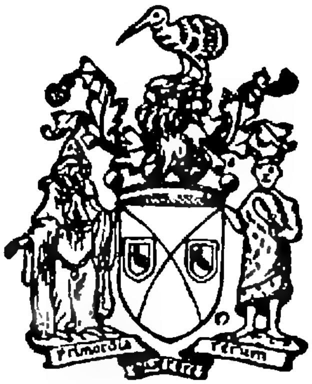
...Я видел потом, что время, потраченное на отдых, полностью окупалось приобретенной энергией...

...Как-то Резерфорд позвал меня к себе в кабинет, и я застал его читающим письмо и грохочущим своим открытым и заразительным смехом. Оказывается, письмо было от учеников какой-то украинской средней школы. Они сообщали ему, что организовали физический кружок и собираются продолжать его фундаментальные работы по изучению ядра атома, просят его стать почетным членом и прислать оттиски его научных трудов. При описании достижений Резерфорда и его открытий, сделанных в области ядерной физики, вместо физического термина они воспользовались физиологическим. Таким образом, структура атома в описании учеников получила свойства живого организма, что и вызвало смех Резерфорда. Я объяснил Резерфорду, как могло произойти это искажение. По-видимому, школьники сами делали перевод письма и при этом пользовались словарем, а в русском языке, в отличие от английского, слово «ядро» имеет два смысла. Резерфорд сказал, что он так и предполагал, и ответил ребятам письмом, в котором благодарит за высокую честь избрания и посылает оттиски своих работ...

...Смерть профессора Резерфорда — очень тяжелый удар для ученых всего мира. В нем наука потеряла величайшего со времен Фарадея пионера физических исследований. В продолжение всей своей жизни, столь плодотворной научными открытиями, он работал над самыми фундаментальными проблемами современной теории атома.

Его можно рассматривать не только как создателя новой главы в науке, но и как создателя целой новой науки — физики ядра...».

Герб лорда Резерфорда. Крест на щите образован экспоненциальными кривыми радиоактивного распада. Наверху — новозеландская птица киви (Резерфорд родился в Новой Зеландии).



V ВСЕСОЮЗНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

15—20 апреля в г. Новосибирске проходила V Всесоюзная физическая олимпиада школьников. В ней приняли участие 550 школьников — победители республиканских и областных олимпиад и победители Всесоюзной олимпиады 1970 года.

16 апреля состоялся первый тур олимпиады — теоретический. Участникам были предложены задачи: по 5 задач — учащимся 9 и 10 классов и 4 задачи — учащимся 8 классов. На решение задач отводилось 5 часов.

17 апреля жюри, проверившее работы, объявило результаты I тура. Те из участников, кто успешнее других справился с теоретическим туром, были допущены на II тур олимпиады — экспериментальный, который проводился 18 апреля.

Вечером 18 апреля состоялось собеседование; на него были приглашены учащиеся, лучше других выполнившие задания I и II туров олимпиады.

19 апреля школьники посетили Академгородок. Они побывали в лабораториях Института ядерной физики, Института гидродинамики, Института физики полупроводников, в Новосибирском Государственном университете, где встретились с учеными Сибирского отделения АН СССР.

19 апреля жюри подвело окончательные итоги, и 20 апреля на торжественном закрытии олимпиады были объявлены имена победителей.

Дипломами первой степени были награждены следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Игорь Корепанов* (школа № 23 г. Днепропетровска), *Александр Зуев* (школа № 1 г. Перевальска Ворошиловградской обл.); по 9 классам — *Александр Сахаров* (школа № 47 г. Калининграда), *Сергей Провоторов* (школа № 45 г. Ленинграда), *Борис Кузьмин* (школа № 18 г. Москвы), *Лев Вайдман* (школа № 45 г. Ленинграда); по 10 классам — *Андрей Первухин* (школа № 51 г. Свердловска), *Александр Снегирев* (Осиповская средняя школа Чаусского р-на Могилевской обл.), *Владимир Головизнин* (школа № 16 г. Кирова).

Дипломы второй степени получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Александр Левин* (школа № 34 г. Свердловска), *Александр Теохаров* (школа № 11 г. Алмалыка Ташкентской обл.), *Вадим Мирный* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Турчин* (школа № 145 г. Киева); по 9 классам — *Сергей Лягушин* (школа № 23 г. Днепропетровска), *Сергей Кацур* (школа № 34 г. Кишинева), *Игорь Лобов* (школа № 170 г. Красноярска), *Георгий Поляков* (школа № 3 г. Челябинска), *Михаил Дежурко* (школа № 3 г. Пинска Брестской обл.); по 10 классам — *Владимир Назайкинский* (школа № 2 г. Москвы), *Сергей Парновский* (школа № 145 г. Киева), *Борис Якобсон* (школа № 116 г. Одессы), *Александр Пуховский* (школа № 21 г. Архангельска), *Игорь Артюхов* (школа № 18 г. Москвы), *Юрий Богданов* (школа № 40 г. Симферополя), *Валерий Фрадков* (школа № 27 г. Харькова).

Дипломы третьей степени были присуждены десяти учащимся 8 классов, четырнадцати учащимся 9 классов и 12 учащимся 10 классов.

74 участника олимпиады получили поощрительные грамоты.

Оргкомитет олимпиады, жюри, работники Сибирского отделения АН СССР, Новосибирского областного отдела народного образования приложили много сил для того, чтобы олимпиада прошла четко, организованно, принесла пользу ее участникам.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ИНВЕРСИЯ и задача АПОЛЛОНИЯ

А. П. Савин

> *КАК ПОЙМАТЬ ЛЬВА В ПУСТЫНЕ?*
>
> Наблюдатель в пустыне находится в круглой клетке. Лев находится вне клетки. Производится инверсия. Тогда лев попадет в клетку, а наблюдатель — вне ее.
>
> *Из аспирантского фольклора МГУ 20-х годов*

Геометрия в переводе с греческого — землемерие. Своим рождением она обязана древним землемерам, архитекторам, строителям. Не имея тех совершенных приборов, которыми вооружены их потомки, они обходились простейшими средствами: циркулем, линейкой и мерной лентой. Естественно, что древние математики пользовались именно этими средствами для геометрических построений, отвергнув лишь мерную ленту, как инструмент неточный.

Порой поражаешься, как много разнообразных задач на построение они могли решать, используя лишь эти простейшие инструменты.

Казалось, что нет таких задач на построение, которые нельзя было бы решить с помощью циркуля и линейки.

Но такие задачи нашлись. Многие математики ломали голову над задачами «трисекции угла» и «удвоения куба». Лишь в конце прошлого века была доказана их неразрешимость *). Однако и сейчас еще встречаются чудаки, пытающиеся осуществить трисекцию угла с помощью лишь циркуля и линейки.

Из задач, вполне разрешимых с помощью циркуля и линейки, одной из самых интересных является задача выдающегося древнегреческого геометра Аполлония из Перги *), которая формулируется так:

---

*) Задача о трисекции угла: «Указать способ деления любого угла на три равные части»; задача об удвоении куба: «Найти ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба». Доказательство неразрешимости этих задач можно найти в книге «Энциклопедия элементарной математики», т. IV, «Геометрия», М., Физматгиз, 1963, стр. 220—223.

ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ
ПОСТРОИТЬ ОКРУЖНОСТЬ, КАСАЮЩУЮСЯ ТРЕХ ДАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Известно, что решение этой задачи содержалось в сочинении Аполлония «О касаниях», но само сочинение было утеряно. В дальнейшем задача Аполлония породила многочисленные математические исследования, к ней обращались и такие выдающиеся математики, как Л. Эйлер и И. Г. Ламберт.

В настоящее время существует много различных решений этой задачи, одно из них будет приведено здесь. Однако цель этой статьи — не только рассказать о решении задачи Аполлония, но и вооружить вас «методом инверсии», использованным в этом решении.

Инверсия

Определение. *Пусть дана окружность радиуса* r *с центром в точке* O. *Инверсией относительно этой окружности называется следующее преобразование плоскости: каждой точке* M *плоскости, отличной от точки* O, *ставится в соответствие точка* M', *лежащая на луче* OM *на расстоянии* $\frac{r^2}{OM}$ *от точки* O. *Точка* O *называется центром инверсии, а число* r^2 *— степенью или коэффициентом инверсии.*

Инверсию еще называют преобразованием обратными радиусами, а также симметрией относительно окружности. Она была введена в 1830 году немецким математиком Л. Магнусом, однако встречается и в трудах самого Аполлония, например в сочинении «О плоских геометрических местах». После своего второго рождения инверсия оказалась мощным инструментом в математических исследованиях.

Рассмотрим ряд свойств инверсии.

1. *Точки на выбранной нами окружности при инверсии переходят в себя; точки, лежащие внутри окружности, переходят во внешние точки (кроме точки* O*), а внешние точки — во внутренние.*

2. *Если при инверсии фигура* Φ *переходит в фигуру* Φ', *то фигура* Φ' *переходит в фигуру* Φ.

3. *При инверсии точки, лежащие на прямой, проходящей через центр инверсии, переходят в точки, лежащие на этой же прямой.*

Эти три свойства очевидны из определения инверсии. Термин «симметрия» применяется к инверсии в силу ее первого и второго свойств.

Заметим, что инверсия не определяет, куда переходит точка O — центр выбранной нами окружности. Если бы мы дополнили плоскость еще одной точкой P — «бесконечно удаленной», то можно было бы сказать, что при инверсии точка O переходит в точку P, а точка P — в точку O. Тогда и любые две прямые пересекались бы в точке P. Вероятно, теперь вам легче будет понять следующее свойство инверсии.

4. *Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.*

Доказательство. Опустим из точки O перпендикуляр на прямую (рис. 1). Найдем для точки P — основания перпендикуляра — точку P', в которую она переходит при инверсии. Пусть теперь M — произвольная точка данной прямой и M' — точка, в которую она переходит при инверсии. Тогда из соотношений

$$OP\cdot OP'=r^2,\qquad OM\cdot OM'=r^2$$

---

*) Аполлоний (ок. 260—170 гг. до н. э.) родился в городе Перга — одной из колоний Греции в Малой Азии, долгое время работал в Александрии, а затем вернулся в Пергу. Его сочинения о конических сечениях легли в основу изучения алгебраических кривых (кривых, задаваемых уравнениями), а применяемый им метод привел Декарта и Ферма к созданию аналитической геометрии.

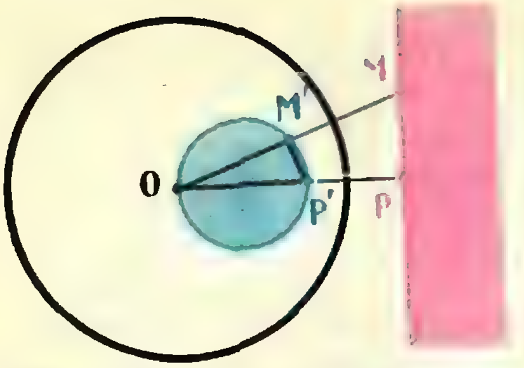


Рис. 1. Прямая, не проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в окружность.

следует, что

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OM'}{OP'},$$

откуда вытекает, что треугольники OPM и $OP'M'$ подобны (угол при вершине O у них общий, а заключающие его стороны пропорциональны). Значит, $\angle OM'P'=\angle OPM=90°$ и точка M' лежит на окружности, построенной на отрезке OP' как на диаметре *).

5. *Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит при инверсии в прямую, не проходящую через точку O.*

Доказательство этого свойства аналогично доказательству предыдущего.

6. *Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит при инверсии в окружность.*

Доказательство. Проведем через точку O и центр данной окружности прямую. Пусть A и B — концы соответствующего диаметра этой окружности (рис. 2), M — произвольная точка на ней. Обозначим через A', B' и M' точки, в которые переходят точки A, B и M при инверсии. Из соотношений

$$OA\cdot OA'=r^2,\qquad OB\cdot OB'=r^2,$$
$$OM\cdot OM'=r^2$$

следует, что

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OM'}{OA'};\qquad \frac{OB}{OM}=\frac{OM'}{OB'}.$$

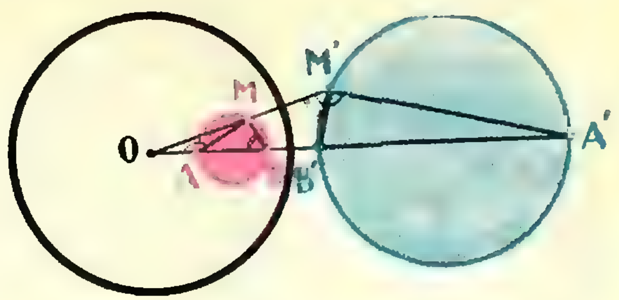


Рис. 2. Окружность, не проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в окружность.

Значит, треугольники OAM и $OA'M'$, а также OBM и $OB'M'$ подобны (угол при вершине O общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны). Отсюда следует:

$$\angle MBO=\angle B'M'O,$$
$$\angle MAO=\angle A'M'O;$$

но

$$\angle MAO=\angle AMB+\angle MBO,$$
$$\angle AMB=90°$$
$$\angle A'M'O=\angle B'M'O+\angle A'M'B'.$$

Отсюда $\angle A'M'B'=\angle AMB=90°$, а точка M' лежит на окружности с диаметром $B'A'$. Если рассмотреть свойства 3—6 в совокупности, то можно сделать вывод:

При инверсии каждая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

Таким образом, при инверсии прямые и окружности равноправны — и те и другие могут переходить как в окружности, так и в прямые (вообще, прямую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса).

7. *Если две окружности или прямая и окружность касаются в точке, отличной от центра инверсии, то их образы также касаются; если же точка касания совпадает с центром инверсии, то они переходят в параллельные прямые.*

Это свойство попробуйте доказать самостоятельно.

Теперь найдите, какие пары фигур на обложке получены инверсией друг из друга.

---

*) Нетрудно заметить, что это доказательство не зависит от того, пересекает прямая окружность, относительно которой производится инверсия, или не пересекает.

Решение задачи Аполлония

Итак, пусть на плоскости даны три окружности... Стоп! Взгляните на рисунок 3. Сколь большим числом способов могут быть расположены три окружности, даже если мы разрешим им либо касаться, либо вообще не иметь общих точек? А если рассмотреть возможные случаи с пересечениями? Неужели рассматривать каждый случай в отдельности? Конечно, нет! Рассмотрим сначала сразу все случаи, в которых хотя бы две из данных окружностей касаются (безразлично, внешним или внутренним образом). Применим инверсию относительно вспомогательной окружности произвольного радиуса с центром в точке касания данных окружностей. Тогда по свойству 7 касающиеся окружности перейдут в параллельные прямые, третья окружность — в окружность или прямую. Искомая окружность должна получиться инверсией из окружности, касающейся указанных параллельных прямых и окружности (или прямой). А задачу «построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности (или прямой)» каждый из вас, надеюсь, сможет решить в течение нескольких минут. Построение, естественно, должно быть произведено с использованием лишь циркуля и линейки. А теперь заметим, что с помощью только циркуля и линейки мы легко можем построить ту окружность или прямую, в которую переходит любая данная окружность или прямая при инверсии относительно какой-либо данной окружности. Для этого нужно выбрать на ней какие-нибудь три точки, построить точки, в которые они переходят (это вы умеете делать), а затем через полученные три точки провести окружность (или прямую).

Из всего сказанного вытекает следующий ход построения:

а) построить параллельные прямые и окружность (или прямую), в которые переходят данные окружности при инверсии относительно вспомогательной окружности с центром в точке касания;

б) построить окружности (их может быть несколько), касающиеся полученных прямых и окружности (или прямой);

в) на трех первоначально данных окружностях отметить те точки, которые переходят в найденные точки касания;

г) по каждой тройке точек восстановить искомые окружности.

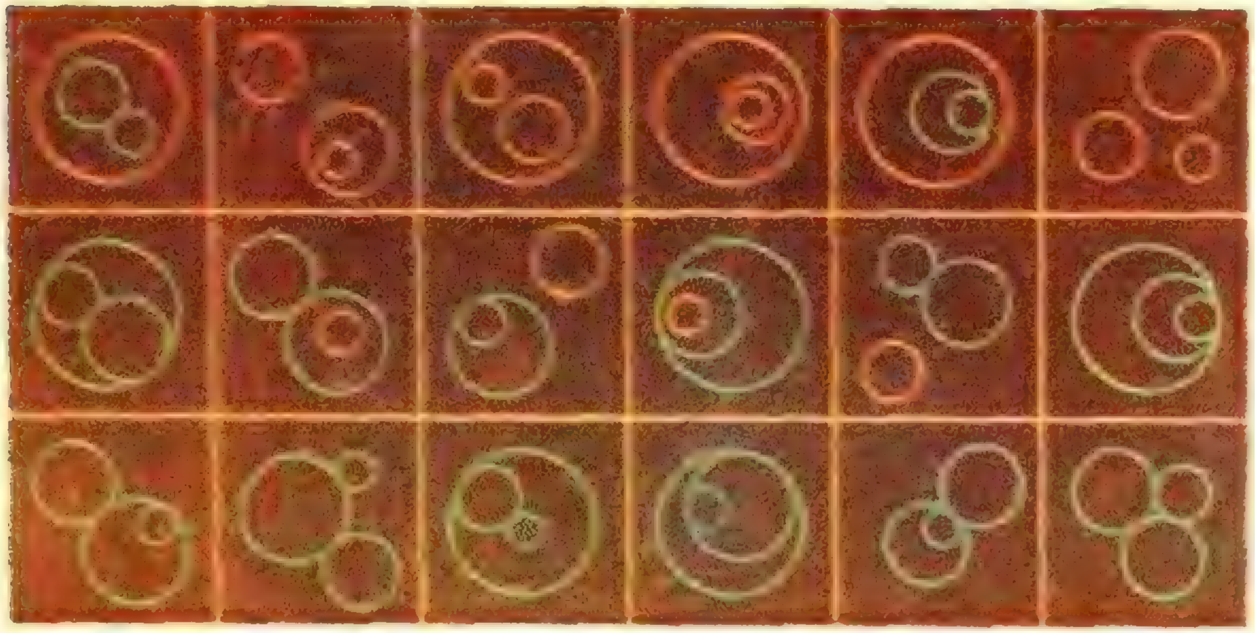


Рис. 3. Три окружности на плоскости можно расположить многими способами.

Итак, случай касания двух данных окружностей разобран. А в остальных случаях задача сводится к разобранному случаю или не имеет решения.

Идею сведе́ния остальных случаев к разобранным покажем на одном из них. Пусть даны три непересекающиеся окружности S_1, S_2 и S_3, расположенные так, как на рисунке 4. Требуется построить окружность S, касающуюся окружностей S_1 и S_2 внешним образом, а окружности S_3 внутренним. Рассмотрим окружности $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, концентрические с окружностями S_1 и S_2, но с радиусами, увеличенными на $\frac{a-r_1-r_2}{2}$ (здесь $a = O_1O_2$), и окружности $\overline{S}_3$ и $\overline{S}$, концентрические с окружностями S_3 и S, с радиусами, уменьшенными на эту величину (на рисунке они изображены пунктиром). Легко заметить, что если окружность S касалась окружностей S_1, S_2, S_3, то окружность $\overline{S}$ будет касаться окружностей $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$. Но окружности $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ оказались касающимися, поэтому на основании предыдущего случая мы умеем ее строить, а искомая окружность является концентрической с ней и имеющей радиус на $\frac{a-r_1-r_2}{2}$ больше. Следовательно, и ее мы можем построить.

Остается отметить, что если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то радиусы этих окружностей нужно уменьшать. Может оказаться, что при уменьшении радиуса окружности необходимый радиус станет равным нулю или даже отрицательному числу. В первом случае окружность вырождается в точку и «касание окружности и точки» нужно понимать как «окружность проходит через точку». Во втором случае мы строим окружность, радиус которой равен модулю полученного числа, но при этом меняется характер касания окружностей: если до изменения радиусов они касались внешним образом, то после изменения станут касаться внутренним образом, и наоборот.

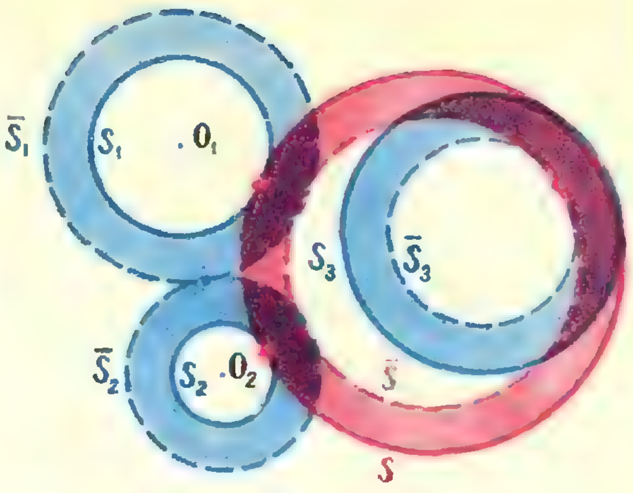


Рис. 4.

Поскольку мы причислили к окружностям и точки (окружности нулевого радиуса) и прямые (окружности бесконечного большого радиуса), то можно обобщить задачу Аполлония:

«Построить окружность или прямую, касающуюся:

а) трех данных окружностей;

б) данной прямой и двух данных окружностей;

в) двух данных прямых и данной окружности;

г) трех данных прямых;

д) данной точки и двух данных окружностей;

е) данной точки, данной прямой и данной окружности;

ж) данной точки и двух данных прямых;

з) двух данных точек и данной окружности;

и) двух данных точек и данной прямой;

к) трех данных точек».

Таким образом, мы решили 10 разных задач, причем задачи г) и к) вам хорошо знакомы.

Инверсоры

Вернемся снова к инверсии. Описанный нами способ построения с помощью циркуля и линейки окружностей, в которые переходят при инверсии данные окружности, очень трудоемок. А если мы захотим нарисовать образ более сложной фигуры, чем прямая или окружность? Хорошо бы иметь

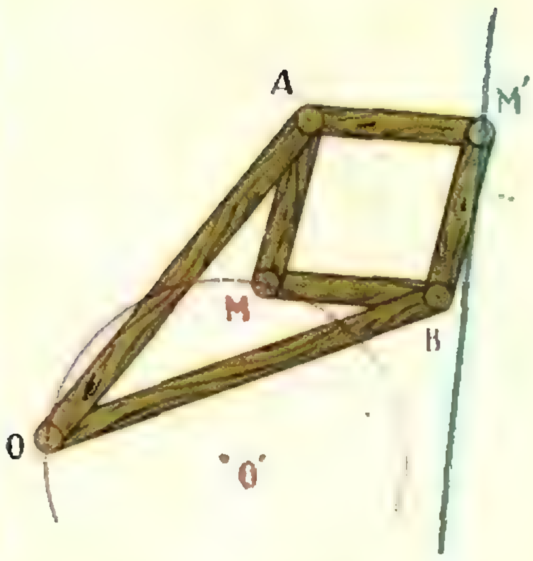


Рис. 5. Инверсор Поселье.

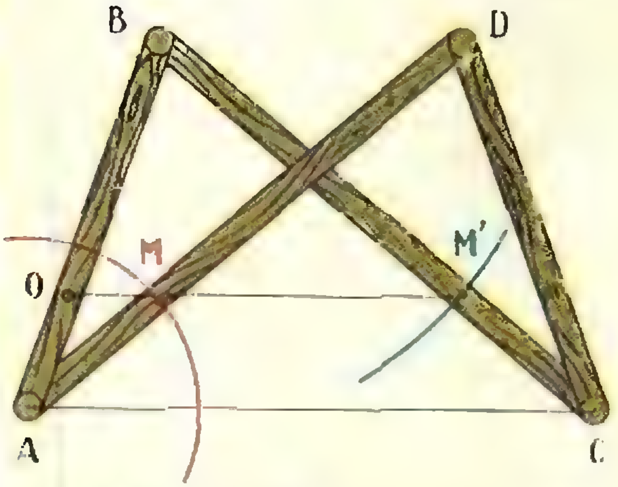


Рис. 6. Инверсор Гарта.

прибор, который выполнял бы преобразование инверсии. Такой прибор существует и не один. Их называют инверсорами. На рисунке 5 изображен инверсор Поселье, состоящий из шести шарнирно закрепленных стержней, причем $OA=OB$, $AM=AM'=BM=BM'$. Этот инверсор работает следующим образом: точка O закрепляется; если точка M описывает некоторую линию, то точка M' описывает линию, полученную инверсией из первоначальной с центром инверсии в точке O и коэффициентом инверсии, равным AO^2-AM^2. Сделать такой инверсор самостоятельно — совсем не трудная задача даже для школьников, не посещающих кружок «умелые руки». Если к этому инверсору добавить седьмой стержень $O'M$ такой, что $O'M=OO'$ и точку O' закрепить, то при вращении стержня $O'M$ точка M' будет описывать прямую линию. Такие инверсоры используются в технике для превращения кругового движения в прямолинейное.

Еще проще инверсор Гарта (рис. 6). Он состоит всего из четырех шарнирно соединенных стержней. Фигура, которую образуют эти стержни, называется антипараллелограммом. Характерным свойством такого четырехугольника является условие: $AB=CD$ и $BC=AD$. Если некоторую точку O отрезка AB закрепить на плоскости, отметить точки M и M' на стержнях AD и BC, лежащие на прямой, проходящей через точку O и параллельной AC, то при движении точки M по некоторой фигуре точка M' будет двигаться по фигуре, полученной из предыдущей с помощью инверсии с центром в точке O и коэффициентом, равным

$$\frac{AO\cdot BO}{AB^2}(AD^2-DC^2).$$

А теперь попробуйте решить несколько задач.

1. Через две точки проведены три окружности, каждая из которых проходит через обе точки. Во что перейдут они при инверсии с центром в одной из этих точек?
2. Во что переходят при инверсии три параллельные прямые?
3. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
4. Докажите, что инверсоры Поселье и Гарта действительно выполняют указанную инверсию.

ЧЕТЫРЕ ОПЫТА СО ЗРЕНИЕМ

Дж. Грегг

В 10-м и 11-м номерах «Кванта» за прошлый год мы уже рассказывали о некоторых опытах с черно-белым и цветовым зрением (см. статьи Г. И. Косоурова «Не верь глазам своим» и «Оранжевое небо»). Сейчас мы расскажем еще о нескольких поучительных опытах со зрением. Три из них, приведенные вначале, иллюстрируют различные особенности нашего зрения — способность видеть в темноте и сохранять на некоторое время память об увиденных изображениях. Последний опыт демонстрирует еще одну любопытную зрительную иллюзию. Все опыты заимствованы из книги Джеймса Грегга, о которой мы рассказываем на странице 60 в этом же номере нашего журнала. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

Опыт 1. Адаптация к темноте

В яркий солнечный день, когда вы входите в неосвещенную комнату с улицы, вам кажется, что в доме царит глубокая ночь. Но вскоре вы уже прекрасно ориентируетесь, несмотря на относительно малую освещенность: ваши глаза приспособились — произошла адаптация к темноте. В результате адаптации чувствительность глаза к свету возрастает в миллион раз. При идеальных условиях глаз, полностью адаптированный к темноте, может заметить свет от обыкновенной свечки, удаленной на 20 *км*.

Наблюдать процесс адаптации очень просто: вечером перейдите из хорошо освещенной комнаты в темную. Заметьте, сколько времени понадобится вам для того, чтобы различить цифры на часах со светящимся циферблатом или прочесть заголовок газеты, если из окна или из приоткрытой двери идет слабый свет.

Очень слабый свет лучше виден, если смотреть чуть мимо него. Так, неяркая звезда в небе покажется ярче, если посмотреть немного в сторону от нее. Проверьте это, когда представится удобный случай.

Приведем простой опыт, иллюстрирующий адаптацию глаза к темноте.

Возьмите кусок черного картона размером 20×25 (*см*.) По обе стороны от центра на расстоянии 5 *см* приклейте к картону белые кружок и квадрат. Держите картон, как книгу во время чтения (рис. 1).

Пусть ваш партнер внезапно погасит свет. Ваши глаза постепенно

Рис. 1.

приспособятся к темноте, и вы увидите белые пятна (на невидимом картоне). Подсчитайте, сколько времени пройдет с момента, когда выключат свет, до момента, когда вы сможете различить белый круг и квадрат. Возьмите в руки картон (до того, как погасят свет), но обратите его фигурами от себя и еще повращайте, чтобы не знать, где расположены белый круг и квадрат; когда свет погасят, поверните картон к себе той стороной, где должны быть фигуры. Обратите внимание — кружок виден лучше, если смотреть не на него, а на квадратик. Можете ли вы объяснить, почему?

Если вы внимательно прочли начало описания этого опыта, то сможете правильно объяснить его результаты.

Опыт 2. Послеобразы

Число послеобразов, которые вы можете наблюдать, бесконечно. Термин «послеобраз» означает, что образ остается после того, как вызвавший его раздражитель перестает действовать. Послеобраз называется положительным, когда он содержит такое же распределение ярких и темных участков, как и сам раздражитель, и отрицательным, когда распределение ярких и темных участков противоположное.

Наиболее интересны наведенные послеобразы. Эффект наведения вызывается чем-то дополнительным к основному раздражителю, например фоном, на котором рассматривается послеобраз; этот фон может представлять собой либо узор, либо серое поле, либо цветное поле. Сначала всегда показывают основной раздражитель — рисунок, цвет. Затем наблюдатель смотрит на какой-либо фон. Легче всего обнаружить наведенный послеобраз на нейтральном сером фоне. На рисунке 2 показаны фигурки, с помощью которых можно получить хорошие послеобразы. Такие фигурки надо наклеить на серый картон. Оставьте в поле зрения только одну фигурку и смотрите на нее 30—60 секунд. Затем переведите взгляд на серый фон. Света в комнате должно быть не слишком много (сумрачное освещение). Вы можете увидеть птицу, летящую по потолку, по стене, по вашей ладони, ибо ваш глаз проецирует послеобраз на любую поверхность, которую вы рассматриваете.

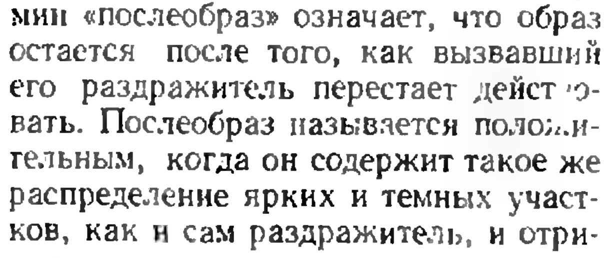


Рис. 2.

Вырежьте любые изображения из цветной бумаги. Экспериментируйте с фигурами разного цвета. Посмотрев на такую фигуру, переведите взгляд на серый фон — и вы увидите послеобраз дополнительного к первоначальному цвета. Таким образом вы познакомитесь с одним из основных принципов формирования наведенных послеобразов.

Возьмите фон такого же цвета, какой свойствен первому раздражителю. Смотрите на ярко-красный квадрат в течение минуты, а затем переведите взгляд на лист красной бумаги. Как выглядит послеобраз?

Оставьте тот же основной раздражитель, но фон возьмите зелено-голубого цвета, то есть цвета, дополнительного к красному. Как отличается нынешний послеобраз от предыдущего и от того, который получился на сером фоне? Попробуйте различные цвета и различные сочетания для основного раздражителя и для фона.

Узор, состоящий из концентрических окружностей (рис. 3),— очень сильный раздражитель, легко вызывающий послеобраз. При рассматривании его возникают эффекты движения и качения. Такие же эффекты наблюдаются в его последовательном образе. Сделайте такой рисунок диаметром 30—50 *см*. Установите в сто-

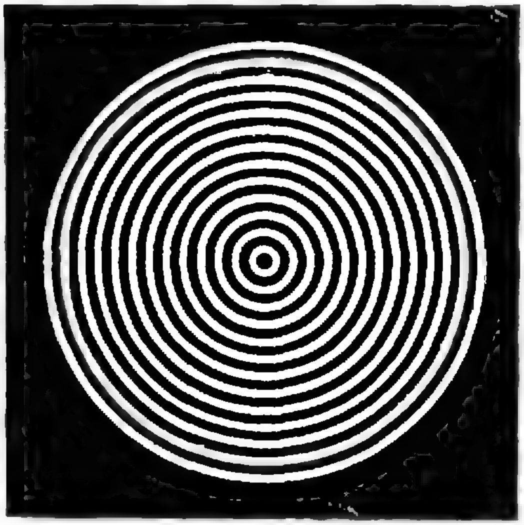


Рис. 3.

роне большой серый экран для рассматривания послеобраза. Если ваш рисунок цветной, эффект получится особенно впечатляющим.

Опыт 3. Инерция зрения

Бегущая на киноэкране лошадь, конечно, никуда не бежит. Не бежит она и на телевизионном экране. И вообще «движущиеся» в кадре объекты неподвижны — перемещаются сами кадры, но с такой скоростью, что человеческий глаз не замечает их смены. Видеть на экране движение можно потому, что зрение человека обладает определенной инерцией. Иначе говоря, любое зрительное ощущение сохраняется еще некоторое время после того, как исчезает вызвавший его образ. Поэтому, если образы сменяются достаточно часто, видимое изображение предыдущего образа плавно переходит в последующий образ, а при определенных условиях их можно увидеть и одновременно.

На рисунке 4 показан таумотроп— приборчик, вращая который можно продемонстрировать инерцию зрения. Если вращать таумотроп достаточно быстро, рисунок с одной стороны совмещается с рисунком, находящимся на противоположной стороне. На одной стороне картонного квадратика наклейте рисунок птицы, а на другой — рисунок клетки (рис. 5). Воткните иглу одним концом в край картонного квадратика, другим в карандаш. Вращайте карандаш — и птица будет в клетке.

Если у вас есть проекционный фонарь (или фильмоскоп), вы можете довольно эффектно показать феномен инерции зрения. Небольшой лист бумаги поместите примерно в 1—1,5 *м* перед проектором. Большой экран не годится — нужна поверхность, на которой можно получить только часть изображения. Вставьте диапозитив в проектор и фиксируйте изображение так, чтобы оно занимало весь лист.

Один конец метровой линейки закройте белой бумагой на протяжении 25—30 *см*. За другой конец держите линейку горизонтально. «Выбелен-

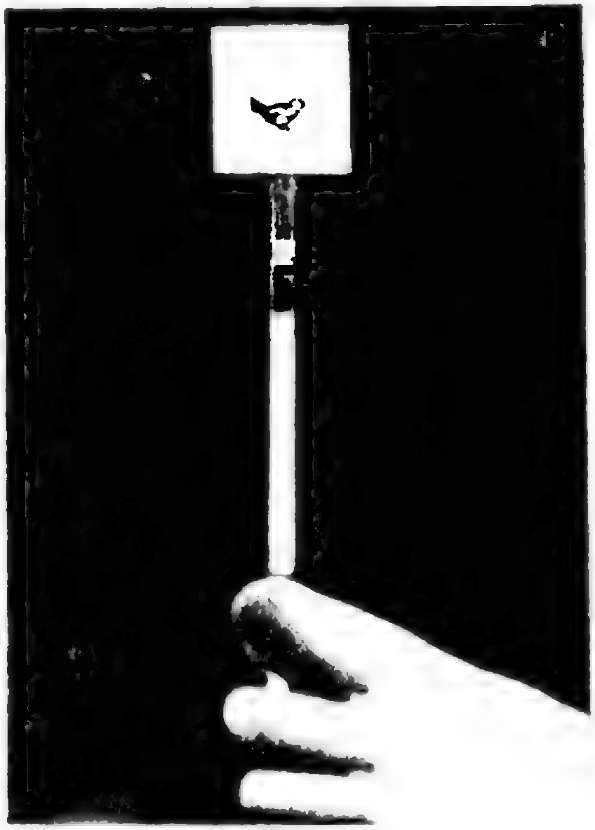


Рис. 4

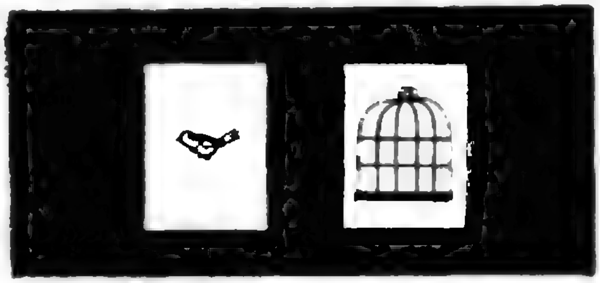


Рис. 5.

ный» конец линейки поместите в то же положение, куда вы ставили лист бумаги. Чуть перемещая линейку, найдите такое ее удаление от проектора, при котором любая часть изображения оказывается четко сфокусированной на белом конце линейки. Теперь приступайте: быстро перемещайте линейку вверх — вниз, вверх — вниз.

Наблюдатели, стоящие за проектором, видят полное изображение цветного рисунка в воздухе в том месте, где вы двигаете линейку. Это происходит потому, что отдельные куски изображения, непосредственно видимые только в те моменты, когда они проектируются на линейку, сохраняются зрением в течение некоторого времени, достаточного для того, чтобы вы успели, передвинув линейку, показать следующие куски кадра.

Таким же способом получается телевизионная картинка. Только там не линейка, а электронный луч показывает одну за другой горизонтальные строчки изображения. А целая картинка получается благодаря инерции зрения.

Опыт 4. Куб-перевертыш

Из 12 проволочек или круглых палочек сделайте каркас куба, как показано на рисунке 6. Эффект будет лучше, если покрасить весь материал в матово-черный цвет. Сделайте сначала две четырехугольные стороны каркаса, а затем скрепите их четырьмя палочками. К одному из углов прикрепите палочку подлиннее — держалку. Все можно сделать на клею и затем укрепить черной ниткой.

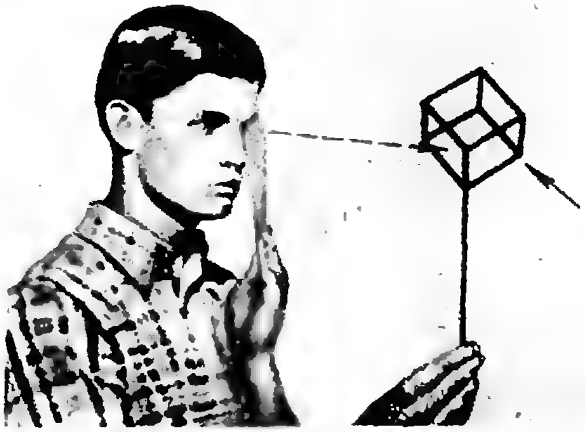


Рис. 6.

Держите куб перед собой так, чтобы дальний угол его (на рисунке 6 — сплошная стрелка) был виден примерно посередине одной из сторон куба (линия взгляда на рисунке 6 показана пунктирной стрелкой). Другой глаз закройте.

Смотрите, не отрываясь, на дальний угол куба. Внезапно вы увидите, как куб «выворачивается наизнанку» так, что дальний угол кажется торчащим впереди, самым близким. При медленном вращении палочки куб «переворачивается» в направлении, противоположном направлению вращения. Подвигайте палочку взад — вперед, и вы увидите, как странно ведет себя куб-перевертыш.

Предварительно потренируйтесь, чтобы научиться видеть все как следует. Лучше проводить опыт на фоне гладкой стены. Если опыт не получается, попробуйте сменить фон, чуть поверните куб, наклоните или слегка деформируйте его.

Немного повозившись, вы будете наблюдать эффект совершенно отчетливо. Помните, что он получается, только когда вы смотрите одним глазом.

Этот эффект называют иллюзией куба фон Хорнбостля. Когда работают оба глаза вместе, они видят глубину так хорошо, что этим кубом их не обманешь, а вот один глаз обязательно ошибется, определяя, которая часть куба ближе. Эта иллюзия одна из самых интересных.

У некоторых людей эффект получается и при наблюдении обоими глазами. Главное, неподвижно фиксировать взгляд обоих глаз на одном (дальнем) угле куба.

ЗАДАЧНИК Кванта

ЗАДАЧИ

Решения задач из «Задачника Кванта» можно присылать не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала. Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения нужно указать фамилию, имя и отчество; шестизначный почтовый индекс, домашний адрес; класс и школу, в которой вы учитесь.

M96. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

С. Т. Берколайко

M97. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB=a$ и $CD=b$ проведен отрезок A_1B_1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции A_1B_1CD снова проведен отрезок A_2B_2, соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис. 1). Может ли в последовательности длин отрезков AB, A_1B_1, A_2B_2,... какое-то число встретиться дважды? Будет ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

А. Л. Розенталь

M98. Докажите, что в таблице

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . . ,

где каждое число равно сумме трех, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть четное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

M99. В треугольнике ABC сторона AC — наибольшая. Докажите, что для любой точки M плоскости $AM+$ $+CM$ не меньше BM. В каких случаях возможно равенство?

Н. Б. Васильев

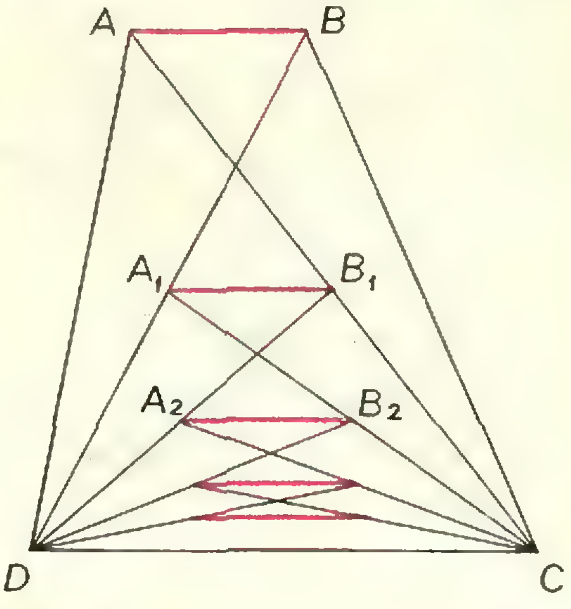


Рис. 1.

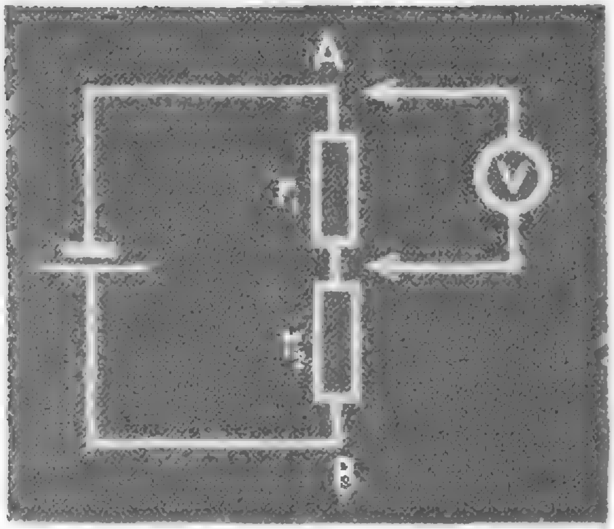


Рис. 2.

М100. Докажите, что сумма 45 чисел

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$$

равна 45.

В. П. Бешкарев

Ф108. Десять муравьев решили утащить со стола лежащую на нем соломинку. Как им нужно поступить, если сила, с которой может тащить соломинку каждый из муравьев, несколько меньше $^1/_{10}$ силы трения, действующей на соломинку, когда она перемещается по столу? Поднять соломинку муравьям тоже не под силу.

Г. Л. Коткин

Ф109. В опыте было установлено, что температура 142 *г* ледяной воды в легком сосуде, подвешенном посредине комнаты, поднялась на 4° С за полчаса. Когда же в сосуде находилось такое же количество льда, то на его таяние потребовалось 10 часов. Какова, исходя из этого эксперимента, удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды равна 1 *кал/г*.

Ф110. Если вольтметр подключить параллельно верхнему сопротивлению r_1 (рис. 2), то он покажет 6 *в*, если параллельно нижнему сопротивлению r_2, то 4 *в*, и если его подключить к точкам A и B, то он покажет 12 *в*. Каковы в действительности падения напряжения на сопротивлениях?

Ф111. Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость распространения реакции взрыва вдоль шнура равна v, скорость распространения взрывной волны по воздуху c. Найти форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно.

Можно ли сделать то же самое с поверхностью со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой плотностью энергии?

Ф112. Имеется стопка из k плоскопараллельных пластинок, показатели преломления которых равны $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Толщина каждой пластинки d. Насколько сместится после прохождения стопки пластинок луч, падающий на пластинку с показателем преломления n_1 под углом α к поверхности пластинки?

ЗАДАЧНИК кванта

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М50—М60 и окончание решения задачи М45.

М50

Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Доказать, что среди этих многоугольников найдется два равных.

Предположим, что вершины некоторого правильного n-угольника удалось раскрасить так, что все одинаково покрашенные вершины составляют различные правильные многоугольники: m_1-угольник, m_2-угольник, m_3-угольник, ..., где $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ Наименьшее из этих чисел m_1 будет играть в наших рассуждениях особую роль, и мы обозначим его просто через m.

Проведем из центра O n-угольника векторы во все его вершины; обозначим их по порядку: $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{a}_n$ (рис. 1*а*). Тогда

$$\measuredangle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \measuredangle \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \ldots = \measuredangle \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n = \measuredangle \mathbf{a}_n\mathbf{a}_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Здесь и ниже через $\measuredangle \mathbf{ab}$ мы обозначаем величину (наименьшего неотрицательного) угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\mathbf{a}$, чтобы он совпал с вектором $\mathbf{b}$; всегда $0 \leqslant \measuredangle \mathbf{ab} < 2\pi$.

Будем говорить, что векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_q$ на плоскости, проведенные из точки O, образуют *правильную систему*, если они имеют равные длины и образуют друг с другом равные углы:

$$\measuredangle \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = \measuredangle \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 = \ldots = \measuredangle \mathbf{c}_{q-1}\mathbf{c}_q = \measuredangle \mathbf{c}_q\mathbf{c}_1 = \alpha > 0.$$

Нам понадобится следующий почти очевидный факт (его доказательство приведено в конце решения).

Лемма. Сумма векторов, образующих правильную систему, равна нулю.

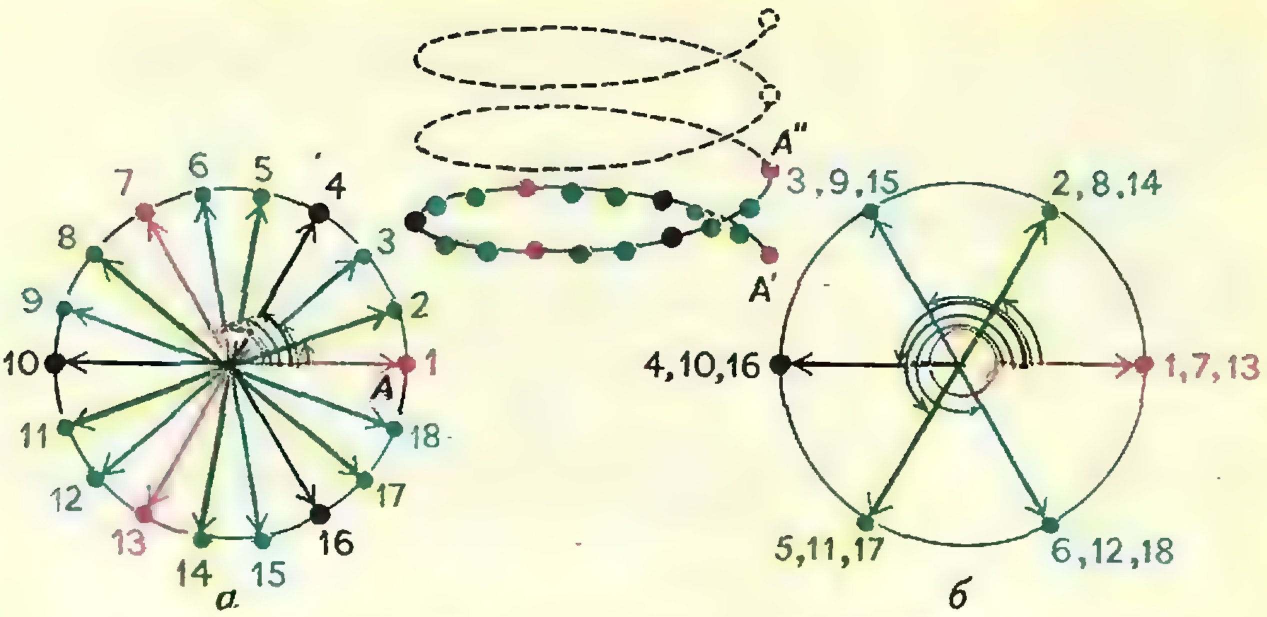


Рис. 1. Представьте себе, что цветные точки на рисунке *а* — бусины, нанизанные на проволоку, согнутую в спираль. Мы смотрим на эту спираль сверху, и поэтому две крайние красные бусины A' и A'' проектируются для нас в одну точку A. Если мы теперь закрепим одну из бусин — A', а A'' протянем по проволоке еще 2 оборота, то придем к рисунку *б*, на котором углы между соседними векторами увеличились в 3 раза.

Прежде чем пользоваться леммой, проделаем с нашими векторами такое преобразование. Будем считать, что вектор $\mathbf{a}_1$ идет в одну из вершин m-угольника. Обозначим его просто через $\mathbf{a}$ и будем все углы отсчитывать от него (в положительном направлении, то есть против часовой стрелки). Обозначим через $\mathbf{b}_i$ вектор, который получается из $\mathbf{a}$ поворотом на угол $m\angle\mathbf{a}\mathbf{a}_i$ (для каждого $i=1,2,\ldots,n$). При отображении $\mathbf{a}_i\to\mathbf{b}_i$, которое мы только что построили *) (на рисунке 1, *б* изображено такое отображение для $m=3$), углы между векторами увеличиваются в m раз; более точно: если $m\angle\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j<2\pi$, то $\angle\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j=m\angle\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$. Поэтому правильную систему векторов с углом $\alpha<\frac{2\pi}{m}$ это отображение переводит снова в правильную систему векторов. В частности, сумма всех векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ равна нулю.

Подсчитаем эту сумму другим способом: найдем сначала сумму векторов, соответствующих вершинам каждого цвета, а потом сложим все эти суммы. Рассмотрим сначала все векторы $\mathbf{a}_i$, идущие в вершины m_k-угольника, где $m_k>m$. Это правильная система векторов с углом $\frac{2\pi}{m_k}<\frac{2\pi}{m}$. После отображения из нее получится снова правильная система, и сумма полученных векторов будет равна нулю.

Рассмотрим теперь векторы, идущие в вершины m-угольника. Угол между соседними векторами равен в этом случае $\frac{2\pi}{m}$, и после отображения все эти m векторов совпадут с вектором $\mathbf{a}$, так что их сумма будет равна $m\mathbf{a}$ (на рисунке 1 это случилось с красными и с черными векторами).

Итак, получили противоречие: с одной стороны, сумма всех $\mathbf{b}_i$ равна нулю, с другой — она равна $m\mathbf{a}$. Поэтому наше предположение неверно.

---

*) Для тех, кто знаком с комплексными числами, заметим, что если точка O изображает на комплексной плоскости нуль, а конец вектора $\mathbf{a}$ — единицу, то это отображение является возведением в степень $m: z\to z^m$.

Доказательство леммы. Физик сказал бы, что это утверждение очевидно из соображений симметрии. Один из способов превратить эти соображения в строгое доказательство состоит в следующем. Предположим, что $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots+\mathbf{c}_n=\mathbf{s}$. Повернем все векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ вокруг точки O на угол α. Тогда, разумеется, и их сумма повернется на угол α. Но по условию вся система из n векторов после поворота на угол α совпадет сама с собой ($\mathbf{c}_1$ попадет на место $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_2$ — на место $\mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_n$ — на место $\mathbf{c}_1$). Поэтому вектор $\mathbf{s}$ после поворота на угол α не должен измениться. Это может быть только в том случае, если $\mathbf{s}=0$.

Можно доказать, что правильная система из q векторов в общем случае состоит из $q=dr$ векторов, проведенных из точки O к вершинам правильного r-угольника, так что в каждую вершину проведено по d равных векторов (если включить сюда и «двуугольники» — пары противоположных векторов, соответствующие $m=2$); при этом α может быть равно любому из чисел $\frac{2\pi l}{r}$, где l и r взаимно просты, $0<l<r$. Мы оставили это замечание под конец, поскольку формально в доказательстве мы обошлись без детального выяснения того, как устроена правильная система векторов $\mathbf{b}_i$. Но, конечно, разбираясь в доказательстве «по существу», полезно это выяснить.

Идею изложенного здесь решения задачи предложил *А. Лившиц* (Ленинград). Внимательно разобравшись в этом решении, можно доказать, что любое разбиение вершин правильного n-угольника на несколько множеств, соответствующих (не обязательно различным) правильным многоугольникам, можно получить таким образом: сначала разбить n-угольник на несколько m-угольников (для этого нужно, чтобы n делилось на m), затем один из полученных правильных многоугольников снова разбить на несколько равных правильных многоугольников (см. рис. 1) и так далее несколько раз. Читателям, которые захотят разобраться в этом подробнее, мы советуем также обдумать связь нашей «одномерной» задачи с «двумерной» задачей **М3**, формулировка которой обсуждалась в «Кванте» № 7 за 1970 год (стр. 54—55) и прежде всего установить эквивалентность нашей задачи **М50** следующей: *доказать, что множество всех целых чисел нельзя разбить на конечное число арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), разности которых попарно различны.*

М51

Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно единице, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше единицы.

Пусть a, b, c — данные числа. Тогда $abc=1$ и $(a-1)(b-1)(c-1)=$ $=abc-ab-bc-ac+a+b+c-1=a+b+c-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>0$, следовательно, из трех чисел $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ два отрицательных, а одно положительное (все три не могут быть положительными, поскольку $abc=1$).

М52

Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

Из отрезков $x\leqslant y\leqslant z$ можно составить треугольник, если $z<x+y$, причем он будет остроугольным, если $z^2<x^2+y^2$. Предположим, что существуют пять отрезков $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5$ таких, что из любых трех составляется не остроугольный треугольник. Тогда

$$a_5^2\geqslant a_4^2+a_3^2, \quad a_4^2\geqslant a_3^2+a_2^2, \quad a_3^2\geqslant a_2^2+a_1^2,$$

и поэтому

$$a_5^2\geqslant 2a_3^2+a_2^2\geqslant 3a_2^2+2a_1^2\geqslant a_2^2+2a_1a_2+a_1^2=(a_2+a_1)^2,$$

то есть $a_5\geqslant a_2+a_1$ и, следовательно, из отрезков a_1, a_2, a_5 нельзя составить треугольник.

М53

В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Доказать, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

Обозначим длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C через a, b, c соответственно. Можно считать, что $b>c$ ($b\neq c$, так как иначе прямые MO и AH не пересекались бы, а совпадали). Опустим перпендикуляр $OP=r$ на BC (рис. 2). Тогда

$$MC=\frac{a}{2},\qquad PC=\frac{a+b-c}{2},\ HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{2HC-a}{b-c}=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a},$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1.$$

Другое, геометрическое решение этой задачи основано на такой лемме: если продолжить радиус PO до диаметра PQ вписанной окружности и провести прямую AQ до пересечения в точке R со стороной BC, то отрезки BP и CR будут равны. Предоставляем доказать и использовать эту лемму читателю.

М54

Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Доказать, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

Пусть длины сторон прямоугольников a и b. Заметим, что на сторонах каждого из прямоугольников лежит ровно две точки пересечения с двумя соседними сторонами другого. (Легко доказать, что если всего точек пересечения 8, то на каждой стороне должно лежать не меньше двух точек и что пересечение стороны одного прямоугольника с двумя параллельными сторонами другого невозможно). Пусть A и C — точки, в которых пересекаются стороны разных прямоугольников, равные a; B и D — точки, в которых пересекаются стороны, равные b. Тогда, очевидно, отрезок AC служит биссектрисой угла между сторонами длины a, проходящими через точку A (для доказательства достаточно опустить на эти стороны перпендикуляры из точки C и рассмотреть пару образовавшихся при этом равных треугольников). Точно так же BD — биссектриса угла между сторонами длины b, проходящими через точку B. Следовательно, $AC\perp BD$, и поэтому площадь

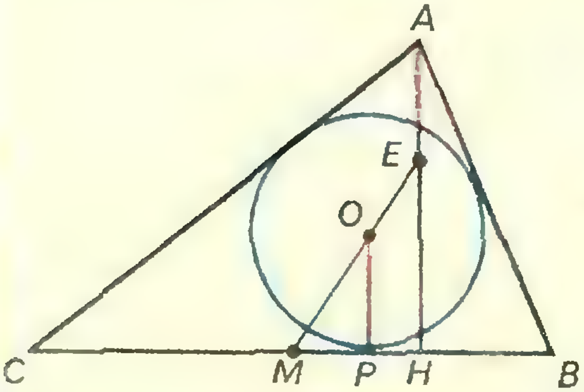


Рис. 2.

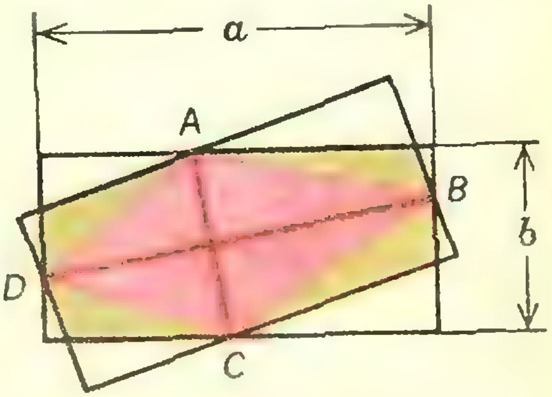


Рис. 3.

выпуклого четырехугольника с диагоналями AC и BD равна $\frac{AC\cdot BD}{2}$. Поскольку $AC\geqslant b$ и $BD\geqslant a$, даже эта площадь (и уж подавно вся площадь общей части прямоугольников) больше $\frac{ab}{2}$.

Как показывают письма читателей, самое трудное в подобной задаче — придумать безупречное рассуждение, которое годилось бы для всех возможных случаев расположения фигур, не зависело бы от особенностей чертежа. Поэтому мы намеренно не ссылались в решении на рисунок 3, чтобы подчеркнуть, что правильность решения можно проверить формально, не обращаясь ни к какому конкретному рисунку.

M55

Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Доказать, что если $1\leqslant k<n$, то сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы.

Докажем это утверждение индукцией по n. Условимся, рассматривая не более чем n-значные числа, дописывать перед каждым нули так, чтобы все числа стали n-значными.

Справедливость утверждения при $n=2$ (тогда k может принимать только одно значение $k=1$) проверить нетрудно:

Числа с нечетной суммой	Числа с четной суммой
01+03+...+09 + 10+12+...+18+ +21+23+...+29 + 30+32+...+38+ . . . . +81+83+...+89 + 90+92+...+98= =5 (00+20+...+80)+5(10+30+...+90)+ +5 (01+03+...+09)+5(00+02+...+08)	00+02+...+08 + 11+13+...+19+ +20+22+...+28 + 31+33+...+39+ . . . . +80+82+...+88 + 91+93+...+99= =5 (00+20+...+80) + + 5(10+30+...+90)+ +5 (00+02+...+08)+ +5 (01+03+...+09)

Переход от n к $n+1$ ненамного сложнее. Чтобы избежать неясностей и большого числа многоточий, удобно использовать знак суммы Σ. Будем обозначать n-значные числа с четной суммой цифр (начиная с 00...00) буквой a, с нечетной суммой цифр (начиная с 00...01) — буквой b. Нетрудно видеть, что каждая из переменных a и b может принимать $5\cdot 10^{n-1}$ различных значений. Пусть, далее, A принимает значения $A=p\cdot 10^n$, где p — одно из чисел 0, 2, 4, 6, 8. B — значение $B=q\cdot 10^n$, где q — одно из чисел 1, 3, 5, 7, 9. Мы должны доказать, что при каждом натуральном $k<n$

$$\Sigma(A+b)^k+\Sigma(B+a)^k=\Sigma(A+a)^k+\Sigma(B+b)^k \qquad (*)$$

(каждая сумма берется по всевозможным парам значений букв, стоящих в круглой скобке под знаком Σ) при условии, что уже доказано равенство сумм Σa^l и Σb^l для всех $l\leqslant n-1$: $\Sigma a^k=\Sigma b^k=S_k$. Раскроем в $(*)$ каждую скобку, пользуясь формулой

$$(X+y)^k=X^k+C_k^1X^{k-1}y+\ldots+C_k^lX^{k-l}y^l+\ldots+y^k,$$

и проверим, что для каждого отдельного l суммы членов вида $X^{k-l}y^l$ в правой и левой частях равенства равны *) (коэффицнент C_k^l мы не пишем):

	Числа с нечетной суммой цифр	Числа с четной суммой цифр
Сумма членов вида X^k	$5\cdot 10^{n-1}\Sigma A^k+5\cdot 10^{n-1}\Sigma B^k$	$5\cdot 10^{n-1}\Sigma A^k+5\cdot 10^{n-1}\Sigma B^k$
Сумма членов вида $X^{k-l}y^l$ $1\leqslant l\leqslant k-1$	$\Sigma A^{k-l}b^l+\Sigma B^{k-l}a^l=$ $=\Sigma b^l\Sigma A^{k-l}+\Sigma a^l\Sigma B^{k-l}=$ $=s_l(\Sigma A^{k-l}+\Sigma B^{k-l})$	$\Sigma A^{k-l}a^l+\Sigma B^{k-l}b^l=$ $=\Sigma a^l\Sigma A^{k-l}+\Sigma b^l\Sigma B^{k-l}=$ $=s_l(\Sigma A^{k-l}+\Sigma B^{k-l})$
Сумма членов вида y^k	$5\Sigma b^k+5\Sigma a^k$	$5\Sigma a^k+5\Sigma b^k$

Заметим, что нашу первоначальную выкладку для $n=2$ с помощью аналогичных обозначений можно записать так:

$$\Sigma(A+b)+\Sigma(b+a)=5\Sigma A+5\Sigma a+5\Sigma b+5\Sigma a,\quad \Sigma(A+a)+\Sigma(B+b)=5\Sigma A+5\Sigma a+5\Sigma B+5\Sigma b$$

при $k=1$ остаются только первый и последний члены, соответствующие $l=0$ и $l=k$).

Нетрудно видеть, что утверждение задачи справедливо не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления с основанием d, где d — четное число (подумайте, где в нашем решении используется четность основания $d=10$). Если взять $d=2$, получается такой любопытный ряд равенств:

$$1+2=3$$
$$1+2+4+7=3+5+6$$
$$1^2+2^2+4^2+7^2=3^2+5^2+6^2$$
$$1+2+4+7+8+11+13+14=3+5+6+9+10+12+15$$
$$1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2=3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2$$
$$1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3=3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3$$

. . . .

M56

На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми числами пишется нуль, между разными цифрами — единица, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что сколько бы раз мы ни повторяли процесс, мы никогда не получим набора из девяти нулей **).

Легко доказать даже более сильное утверждение: если на окружности выписано нечетное число N единиц и нулей, причем встречаются и нули, и единицы, то, сколько бы раз мы ни повторяли описанный в задаче процесс, мы не получим набора из N нулей. Действительно, предположим, что на каком-то t-м шаге мы впервые получили набор из одних нулей. Тогда на $(t-1)$-м шаге все N цифр были одинаковы, и не все равны 0, поэтому они все были равны 1, а на $(t-2)$-м шаге каждые две соседние цифры должны были быть различными, но поскольку N нечетно, то такого расположения 0 и 1 на окружности не существует.

Одновременно мы ответили (пока только для нечетного N) на вопрос, который остался неразобранным в решении **M19** («Квант» № 11, 1970 г., стр. 37—38); в этой задаче нули называются «покоящимися клетками», единицы — «возбужденными клетками», а правила перехода в точности те же самые. В этих терминах наш результат формулируется так: если N нечетно, и в начальный момент не все клетки возбуждены (и не все покоятся), то возбуждение никогда не затухнет.

---

*) Нам не нужно знать формулы для вычисления C_k^l (так называемых «биномиальных коэффициентов»). Важно лишь, что это числа, не зависящие от переменных X и y.

) Те, кто решал эту задачу раньше, могли заметить, что мы поменяли местами в формулировке слова «единицы» и «нули». Это, конечно, не меняет существа задачи и сделано для того, чтобы не возникло путаницы при сопоставлении задач **M19 и **M56**, о котором будет идти речь ниже.

Что же будет при других N? Чтобы выяснить это, воспользуемся такой леммой (ее можно доказать индукцией по k; она справедлива и для задачи на прямой, и для окружности): если при $t=0$ на 2^{k-1}-м месте в ту и другую сторону от данной цифры a стоят одинаковые цифры, то через $t=2^k$ шагов на месте a будет стоять нуль, а если разные, то единица. Отсюда сразу следует, что если $N=2^m$, где m — натуральное, то из любого набора за N шагов получится набор из одних нулей.

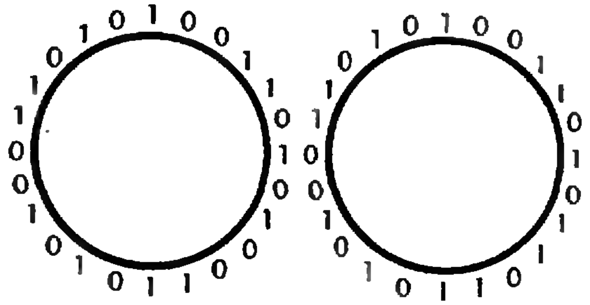


Рис. 4. Нули и единицы на левом рисунке через 8 шагов превратятся во все нули.

Пусть теперь $N=2^mL$, где L — нечетно. Проследим за изменениями, которые происходят за каждые $T=2^m$ шагов. Для каждых L цифр, расположенных через 2^m друг от друга («в вершинах правильного L-угольника»), эти изменения будут в точности такими же, как будто только эти L цифр были расположены по окружности, с ними повторялся тот же процесс, и мы следили за каждым шагом. Отсюда нетрудно получить ответ в самом общем случае: состояние «все нули» достигается в том и только в том случае, если начальная последовательность из 0 и 1 была периодической с периодом 2^m (см. рис. 4).

M57

а) Найти число k, которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и k).

б) Доказать, что если заменить 14 на 15, то задача будет иметь несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

Пусть $M=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ — разложение числа M на простые множители; для определенности будем считать, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots\alpha_r\geqslant 1$. Делители числа M имеют вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_r^{\beta_r}$, где каждое β_i независимо от остальных может принимать значения $0, 1, \dots, \alpha_i$, и поэтому общее количество делителей M (включая 1 и M) равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$ (см. решение задачи 1 к статье «Комбинаторика» в «Кванте» № 1, 1971 г., стр. 19).

а) 14 можно разложить на множители только одним способом: $14=7\cdot 2$, поэтому, если M имеет 14 делителей, то $r=2$, $\alpha_1=6$, $\alpha_2=1$. Мы знаем еще, что 3 входит в разложение M с показателем, большим 1, а 2 — с показателем, большим 0. Отсюда следует, что $M=3^6\cdot 2=1458$.

б) Для 15 делителей возможны ответы $M=3^2\cdot 2^4$ и $M=3^4\cdot 2^2$, а 17 делителей могут иметь только числа вида $M=p^{16}$, где p — простое.

M58

На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Построить этот треугольник.

Первое решение. Предположим, что O — точка пересечения биссектрис AK, BL и CM треугольника ABC (рис. 5); тогда

$$\measuredangle MOB=\measuredangle OCB+\measuredangle OBC=\frac{1}{2}(\measuredangle ACB+\measuredangle ABC)=\frac{\pi}{2}-\measuredangle CAK,$$

то есть $\measuredangle CAK=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Поэтому, если заданы прямые AK, BL, CM и точка A, то, построив по одну и другую сторону от луча AO углы, равные $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, мы найдем искомые вершины B и C (при условии, что $\varphi>0$,

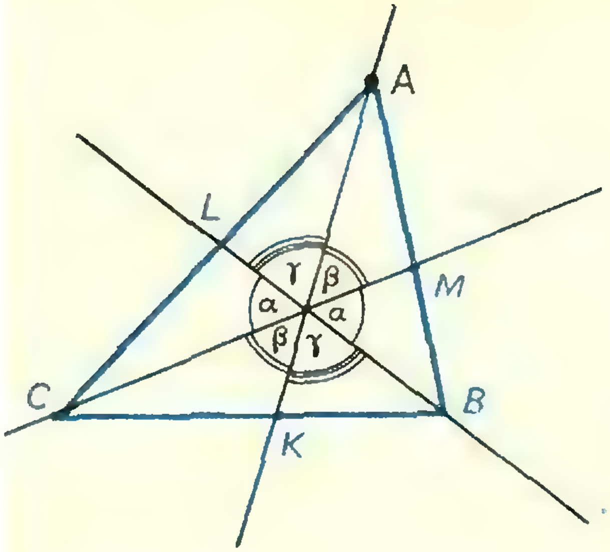


Рис. 5.

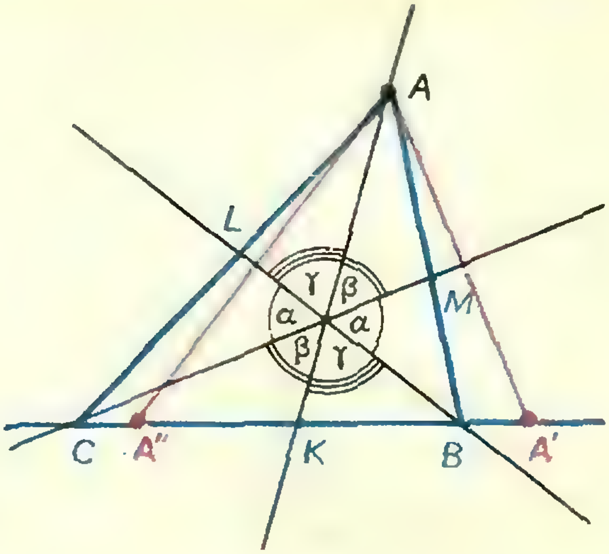


Рис. 6.

$\varphi<\beta$ и $\varphi<\gamma$). Нужно еще доказать, что у построенного треугольника ABC прямые BL и CM идут по биссектрисам. Углы ABL и ACM легко подсчитать — они равны соответственно $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\frac{\pi}{2}-\gamma$. Трудность заключается лишь в доказательстве того, что $\measuredangle LBC=\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\measuredangle MCA=\frac{\pi}{2}-\gamma$ (хотя ясно, что их сумма равна α); ее можно преодолеть, например, так: если $\measuredangle LBC<$ $<\measuredangle ABL$, то биссектриса угла ABC пересекает отрезок AO, поэтому биссектриса угла ACB тоже его пересекает, и значит, $\measuredangle MCB<\measuredangle ACM$, поэтому сумма $\measuredangle LBC+\measuredangle MBC$ меньше $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\alpha$. Точно так же можно показать, что невозможен случай $\measuredangle LBC>\measuredangle ABL$.

Второе решение. Построим точки A' и A'', симметричные данной точке A относительно биссектрис, не проходящих через A. Ясно, что обе точки A' и A'' должны лежать на прямой BC — на стороне искомого треугольника ABC (или на ее продолжении). Проведя прямую через A' и A'', мы тем самым найдем нужные точки B и C (рис. 6).

Заметим, что хотя второе решение более эффектно, но при таком подходе труднее выписать условия, при которых задача имеет решение *). Эти условия таковы: $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta<\frac{\pi}{2}$, $\gamma<\frac{\pi}{2}$ (поскольку $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, их можно записать и так: $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, $\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$, $\gamma+\alpha>\frac{\pi}{2}$). Если они выполнены, то решение единственно. Подумайте, как можно получить эти условия при каждом из изложенных выше способов решения.

М59

Имеется несколько гирь с весами 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*,..., n *г*. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких n это удастся сделать?

Покажем, что это можно сделать в том и только в том случае, если $n>3$ и одно из чисел n или $n+1$ делится на 3 (то есть при n, равном 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, ...).

---

*) Может оказаться, что две из данных прямых являются биссектрисами внешних, а не внутренних углов построенного треугольника, это нас не устраивает.

Необходимость этих условий очевидна, поскольку общий вес гирь $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ должен делиться на 3.

Для доказательства достаточности заметим сначала, что разбиение возможно при n, равном 5, 6, 8 и 9 (это показано на рис. 7). Все остальные интересующие нас значения n получаются из этих четырех прибавлением некоторого количества шестерок, а любую группу из шести последовательных целых чисел $a+1, \ldots a+6$ легко разбить на три пары чисел, дающих равные суммы: $a+1$ и $a+6$, $a+2$ и $a+5$, $a+3$ и $a+4$.

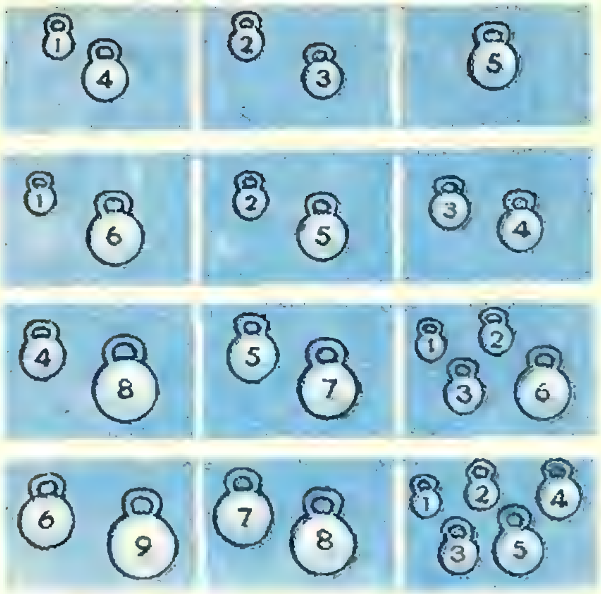


Рис. 7.

М60

Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы суммы любых двух различных чисел из одной и той же группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

Отнесем к одной группе все числа, в записи которых нечетное число единиц, а к другой — все числа, в записи которых четное число единиц. Тогда ясно, что в одну группу не могут попасть два числа, отличающиеся только в одном разряде, поэтому такое разбиение удовлетворяет требованиям задачи (единицы возникают в тех разрядах суммы, где у одного числа стоит 1, а у другого — нет).

Многие читатели привели рассуждение, доказывающее, что описанное разбиение:

первая группа: 1, 10, 100, 111, 1000, 1011, 1101, 1110, ...
вторая группа: 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, 1111, 10001, ...

единственное, удовлетворяющее условиям задачи.

Наиболее полные решения задач, которые обсуждались выше, нам прислали *В. Диденко* из села Веселый Кут Одесской обл., *Э. Туркевич* из г. Черновцы, *А. Рубин* из села Укладовка Винницкой обл., *А. Слинкин* из Москвы, *Я. Томсинский* из Ленинграда, *М. Перельмутер* из Киева, *О. Худавердян* из Еревана.

М45

(Продолжение. Начало решения см. в «Кванте» № 7, стр. 30.)

Нам осталось доказать такой факт.

Теорема. Из $2p-1$ любых целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p (p— произвольное простое число).

Приведем здесь доказательство, предложенное *С. Ворониным* (Москва).

Ясно, что в доказательстве мы можем рассматривать все числа «по модулю p», то есть интересоваться только тем, какой из остатков 0, 1, 2, ..., $p-1$ дает то или иное число при делении на p. Удобно представлять себе (особенно когда речь идет о «сложении по модулю p»), что эти p остатков расположены по кругу (рис. 8).

Лемма. Пусть даны r целых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_r$; $0<b_i<p$ для всех $i=1, 2, \ldots, r$ и $0<r<p$ (p — простое). Тогда из этих чисел можно составить по крайней мере $r+1$ сумм, дающих различные остатки при делении на p (при этом разрешается брать сумму «пустого множества слагаемых», которая считается равной нулю, суммы из одного слагаемого, из двух,..., из всех r слагаемых).

Доказательство. При $r=1$ это очевидно: суммы дают остатки 0 и b_1. Предположим, что это верно для $r=k<p-1$ и неверно для $r=k+1$, и придем к противоречию. Пусть суммы из k слагаемых $b_1, b_2, \ldots, b_k$ дают $k+1$ различных остатков 0, $s_1 \ldots, s_k$. Тогда,

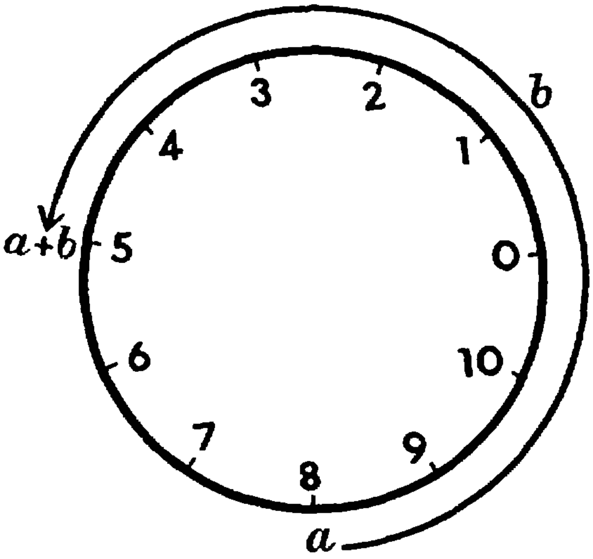


Рис. 8. Чтобы найти сумму $a+b$ по модулю p, нужно отсчитать от a против часовой стрелки b единиц (на этом рисунке, соответствующем $p=11$, изображена сумма $8+8$, которая по модулю 11 равна 5).

поскольку после присоединения $b=b_{k+1}$ количество различных сумм не должно увеличиться, все суммы

$$0+b,\ s_1+b, \ldots, s_k+b$$

(по модулю p) содержатся во множестве

$$\{0,\ s_1, \ldots, s_k\}.$$

Другими словами, если к любому элементу этого множества прибавить b, то снова получится элемент того же множества (попробуйте представить себе такое множество на рисунке 8). Таким образом, это множество заведомо содержит элементы $0,\ b,\ 2b,\ 3b, \ldots, (p-1)b$. Но ясно, что все эти элементы различны (по модулю): разность

$$ib-jb=(i-j)b,$$

где $0<i-j<p$ и $0<b<p$, не может делиться на p, поскольку p простое. Таким образом, мы доказали, что множество $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$ содержит все p различных элементов, хотя предполагали, что

$$k+1<p.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p \leqslant a_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{2p-1}$$

— остатки от деления данных $2p-1$ чисел на p. Рассмотрим еще p таких чисел:

$$a_{p+1}-a_2,\quad a_{p+2}-a_3, \ldots, a_{2p-1}-a_p. \qquad (*)$$

Если какое-нибудь одно из них равно нулю, например

$$a_{p+l}-a_{l+1}=0, \quad \text{то} \quad a_{l+1}=a_{l+2}=a_{l+3}=\ldots=a_{l+p},$$

и сумма соответствующих p чисел делится на p. Осталось рассмотреть случай, когда все числа (*) отличны от нуля.

Найдем остаток x от деления суммы $a_1+a_2+\ldots+a_p$ на p. Если $x=0$, то все ясно. Если $x \neq 0$, то, пользуясь леммой, мы можем составить из разностей (*) сумм, дающую остаток $p-x$ при делении на p. Добавив соответствующие разности к $a_1+a_2+\ldots+a_p$ и проведя очевидные сокращения, мы получим сумму p слагаемых, делящуюся на p.

Пользуясь результатом задачи **М45**, нетрудно установить, что утверждение «Из любых a целых чисел можно выбрать b чисел, сумма которых делится на c» (где a, b, c — конкретные натуральные числа) верно тогда и только тогда, когда b делится на c и $a \geqslant b+c-1$.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф66—Ф71.

Ф66

К батарее с э. д. с. 9 *в* и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр (рис. 9). Сопротивления приборов неизвестны. Если параллельно вольтметру включено сопротивление (его величина тоже неизвестна), то показание амперметра вдвое увеличивается, а показание вольтметра вдвое уменьшается. Каким стало показание вольтметра после подключения сопротивления?

Вольтметр показывает падение напряжения на нем самом, а амперметр — ток, идущий через него. Согласно закону Ома для полной цепи э. д. с. батареи равна сумме падений напряжения на участках цепи: U — на вольтметре и U_1 — на внутреннем сопротивлении источника и амперметре:

$$E=U+U_1. \qquad (1)$$

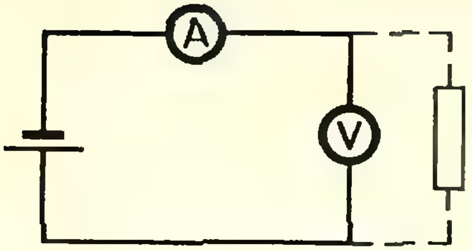


Рис. 9.

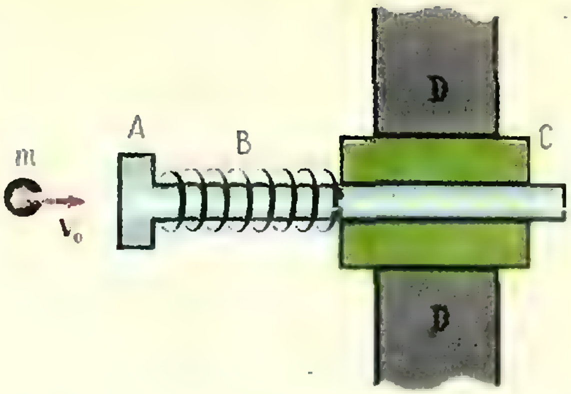


Рис. 10.

После подключения сопротивлений падение напряжения на вольтметре и параллельно с ним соединенном сопротивлении стало равным $U' = \frac{U}{2}$ (показания вольтметра). В то же время падение напряжения на сопротивлении источника и амперметре в два раза возросло и стало равным $U_1' = 2U_1$. Действительно, ведь сопротивление этого участка не изменилось, а ток, идущий по нему, вдвое возрос. Поэтому

$$E = \frac{U}{2} + 2U_1. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что $U = 6$ *в*. Следовательно, после подключения сопротивления вольтметр показал напряжение

$$U' = \frac{U}{2} = 3 в.$$

Правильное решение прислали *Н. Федин* (Омск), *С. Иванов* (Москва), *Е. Губарев* (Москва), *В. Сычев* (Алга Актюбинской обл.), *Н. Смирнов* (Горький), *А. Анищенко* (Сарапул, Удм. АССР), *А. Браверман* (Пермь), *А. Сенявин* (Москва), *В. Потащев* (Горький), *В. Калиничев* (Москва), *М. Прегер* (Томск).

Ф67

Буферное устройство (рис. 10) состоит из стержня *A*, пружины *B*, надетой на стержень, и направляющей втулки *C*. Втулка может перемещаться внутри канала, сделанного в массивной стене *D*. При движении втулки между ее внешней поверхностью и стеной действует постоянная по величине сила трения $F_{тр}$. Стержень внутри втулки и пружина по стержню перемещаются без трения.

На торцовую поверхность стержня *A* налетает шар массы *m*, имея перед соударением скорость v_0. С какой скоростью шар отлетит?

Массы стержня, пружины и втулки пренебрежимо малы по сравнению с массой шара. Коэффициент жесткости пружины *k*

При ударе шарика шток начинает двигаться, сжимая пружину. При этом на втулку со стороны деформированной пружины действует сила $F = kx$, где x — деформация пружины. Если начальная скорость шарика достаточно велика, что деформация пружины достигнет максимальной величины x_{max}, при которой пружина действует на втулку с силой, равной силе трения втулки о стену. После этого втулка начнет двигаться, причем во время движения втулки пружина не будет деформироваться: сила, сжимающая ее, не меняется и равна $F_{тр}$. Так как при движении втулки на нее действует сила трения, то кинетическая энергия системы переходит в тепло, и через некоторое время шарик и шток остановятся. Затем пружина начнет распрямляться. Это, конечно, не вызовет движения втулки — сила, с которой действует на нее пружина, меньше $F_{тр}=kx_{max}$, так как $x<x_{max}$. Так что дальнейших потерь энергии в системе происходить не будет. При распрямлении пружины ее потенциальная энергия деформации $W_п=\frac{kx_{max}^2}{2}$ перейдет в кинетическую энергию шарика.

Причем потенциальная энергия шарика равна нулю.

Запишем теперь закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{kx_{max}^2}{2},$$

где v — скорость шарика после того, как он отскочит от стенки.

Учитывая, что $x_{max}=\frac{F_{тр}}{k}$, получим $v=\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}$.

При достаточно большой скорости v_0 скорость шарика, отскочившего от стержня, не зависит от его начальной скорости. Система «съедает» весь запас энергии выше величины $W=\frac{kx_{max}^2}{2}$.

Выясним теперь, что значит «достаточно большая скорость v_0». Это та скорость, при которой сила, действующая со стороны пружины на втулку, достигает величины $F_{тр}$, а, значит, деформация пружины достигает величины $x_{max}=\frac{F_{тр}}{k}$. Ясно, что для этого начальная кинетическая энергия шарика должна быть больше величины $\frac{kx_{max}^2}{2}=\frac{F_{тр}^2}{2k}$:

$$\frac{mv_0^2}{2}>\frac{F_{тр}^2}{2k}.$$

Это условие дает нам границу «достаточно большой скорости»:

$$v_0>\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}.$$

А как будет происходить столкновение, если начальная скорость шарика меньше этой величины или равна ей?

В этом случае деформация пружины меньше x_{max} и пружина не сдвинет втулки с места. Это означает, что не будет потерь энергии и шарик отскочит, имея ту же кинетическую энергию, а следовательно, и ту же скорость, что до столкновения. Итак,

$$v=\begin{cases} v_0 \text{ при } v_0\leqslant\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}, \\ \sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}} \text{ при } v_0>\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}. \end{cases}$$

Правильное решение прислали *Р. Мкртчян* (Ереван), *Куцек* (Ржев), *Н. Федин* (Омск), *И. Гричик* (Давид-Городок Брестской обл., БССР), *А. Выродов* (Гагра), *Р. Зайцев* (Гагра), *М. Прегер* (Томск).

Ф68

Стенки сосуда, в котором находится газ, имеют температуру T. Температура газа T_1. В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T<T_1$), или когда теплее ($T>T_1$)?

Температура газа определяется средней кинетической энергией его молекул: $\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT$ (k — постоянная Больцмана). Это означает, что чем выше температура газа, тем больше средняя скорость движения его молекул, то есть тем больше средний импульс молекулы.

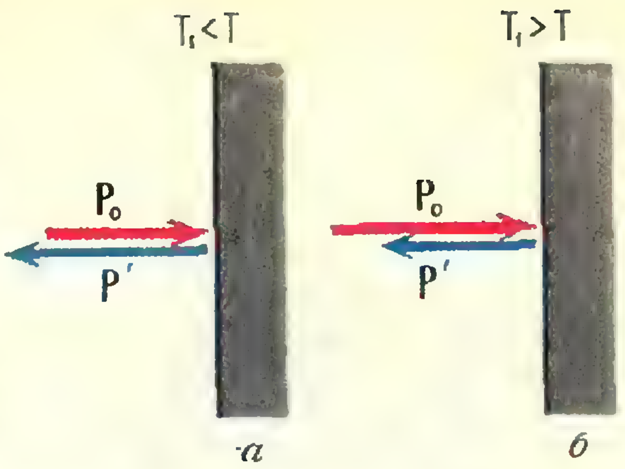


Рис. 11.

Если температура стенки совпадает с температурой газа, то молекула, ударяясь о стенку, меняет свой импульс p_0 на $-p_0$. Значит, изменение импульса равно $2p_0$. Когда $T>T_1$, газ нагревается. Это означает, что молекулы газа отскакивают от стенки с большей скоростью, чем налетают, а значит и с большим импульсом (рис. 11, *а*). Изменение импульса в этом случае будет больше, чем $2p_0$.

Если же $T_1<T$, то газ охлаждается, то есть молекулы газа отскакивают от стенки с меньшим импульсом, чем налетают на нее (рис. 11, *б*). Ясно, что в этом случае и изменение импульса молекулы меньше, чем в случае $T_1>T$. Так как в соответствии со II законом Ньютона изменение импульса пропорционально средней силе, действовавшей на молекулу со стороны стенки, а в соответствии с III законом Ньютона средняя сила, действовавшая на молекулу, численно равна средней силе, действовавшей на стенку, то при $T_1<T$ давление газа на стенку больше, чем при $T_1>T$.

Правильное решение прислали *В. Чупин* (Торжок), *Н. Федин* (Омск), *В. Калиничев* (Москва), *С. Иванов* (Москва).

Ф69

В сосуд с водой погружается свинцовый шар. В какую сторону выгнется поверхность воды в сосуде за счет дополнительного поля тяготения, создаваемого шаром?

Форма поверхности жидкости должна быть такой, чтобы сила **N** реакции окружающей жидкости, действующей на элемент объема жидкости с массой Δm у поверхности, была направлена перпендикулярно к поверхности. В противном случае сила **N** будет иметь составляющую, направленную вдоль поверхности жидкости, и жидкость не сможет находиться в равновесии.

Разберем теперь, как направлена сила **N**. Она должна уравновешивать две силы: силу $\mathbf{F}_1$ притяжения Земли, направленную к центру Земли, и добавочную силу $\mathbf{F}_2$ притяжения шара, направленную к центру шара (на рисунке 12 сила $\mathbf{F}_2$ сделана непропорционально большой по сравнению с силой $\mathbf{F}_1$). Сила **N** должна быть численно равна и противоположна по направлению равнодействующей **Q** сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Значит, она отклонена вправо от вертикали и поверхность воды над шаром выпуклая.

Оценим величину «вздутия» поверхности воды. Рассмотрим точку B, лежащую на малом расстоянии x от вертикали AO, проходящей через центр шара ($x \ll r$, где r — радиус шара), O — центр кривизны и $BO=R$ — радиус кривизны поверхности воды.

$Q \approx F_1$ (поскольку $F_2 \ll F_1$), а $Q \sin\alpha = F_2 \sin\beta$. Так как углы α и β малы ($x \ll r$, $x \ll R$), то

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx x/R \quad \text{и} \quad \sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta \approx x/r.$$

Поэтому можно считать, что

$$Q(x/R) = F_2(x/r)$$

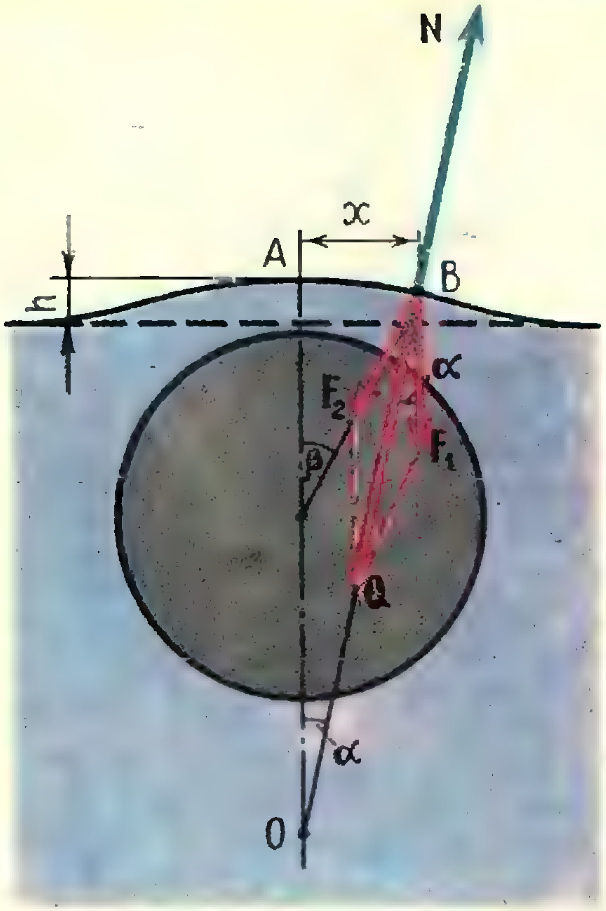


Рис. 12.

или

$$R = r\frac{Q}{F_2} = r\frac{F_1}{F_2}.$$

Но

$$F_1 = \gamma\frac{\left(\frac{4}{3}\pi R_З^3\rho\right)\Delta m}{R_З^2} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\gamma r R_З\rho\Delta m$$

($R_З$ — радиус Земли, ρ — ее плотность), а

$$F_2 = \gamma\frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1 - \rho_0)\Delta m}{r^2} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\gamma r(\rho_1 - \rho_0)\Delta m$$

(ρ_1 — плотность шара, ρ_0 — плотность воды). Поэтому

$$R = r\frac{\frac{4}{3}\pi\gamma R_З\rho\Delta m}{\frac{4}{3}\pi\gamma r(\rho_1 - \rho_0)\Delta m} =$$

$$= R_З\frac{\rho}{\rho_1 - \rho_0} \approx R_З\frac{\rho}{\rho_1}$$

(так как $\rho_1 \gg \rho_0$). Подставляя сюда значения $R_З = 6{,}4\cdot10^6$ *м*, $\rho = 5{,}5$ *г/см*^{3} и $\rho_1 = 11{,}3$ *г/см*^{3}, найдем $R \approx 3{,}2\cdot10^6$ *м*.

Полагая, что вздутие распространяется на расстояние x от точки A (эта оценка сильно завышена!), найдем его высоту

$$h = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx \frac{r^2}{R}.$$

Если радиус свинцового шара равен 1 *м*, то $h \approx 3\cdot10^{-7}$ *м*.

Это означает, что эффект вздутия нельзя наблюдать экспериментально даже с помощью интерференционных методов. Ведь длина волны света несколько тысяч ангстрем (1 Å $= 10^{-10}$ *м*), то есть больше величины вздутия.

Правильное решение прислал *Н. Федин* (Омск).

Ф70

Велосипедист легко развивает силу тяги 10 *кГ*. Сила трения не превышает 5 *кГ*. Казалось бы, за несколько часов велосипедист может достичь второй космической скорости. Однако это еще никому не удавалось. Почему?

Сила, с которой велосипедист может давить на педали, непостоянна и зависит от скорости велосипедиста (рис. 13). Она максимальна при $v = 0$ и становится равной нулю при такой скорости, при которой период вращения педалей становится равным скорости реакции велосипедиста. После этого скорость велосипедиста уже не может возрастать.

Многие читатели рассуждали так: мощность, которую развивает велосипедист, не может превышать некоторой максимальной величины. Но

$N = F \cdot v$, поэтому скорость велосипедиста не может стать больше чем

$$v = \frac{N_{\max}}{F - F_{\text{тр}}}.$$

Это, конечно, верно и связано именно с тем, что зависимость силы, с которой человек давит на педали, от скорости движения такая, как показано на рисунке 13.

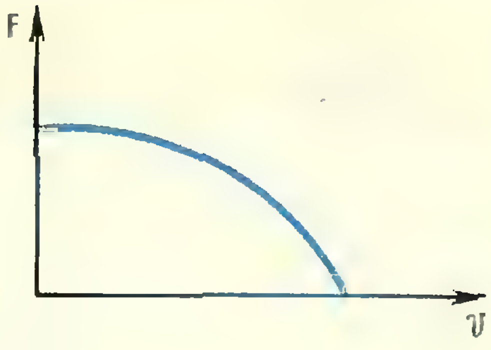


Рис. 13.

Ф71

Имеется равномерно заряженный отрезок AB. Как направлена напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C: по медиане треугольника ABC? по его биссектрисе? по высоте? ни по одной из этих линий?

Напряженность поля — вектор, а в нашей задаче имеются лишь четыре выделенных направления: по медиане, биссектрисе или высоте треугольника ABC и параллельно отрезку AB. Вектор напряженности поля должен быть направлен по одному из этих направлений. Ясно, что он не может быть параллелен отрезку AB: напряженность поля заряженного отрезка равна сумме напряженностей полей частей отрезка, а они все направлены к отрезку или от него (в зависимости от знака заряда отрезка).

Не подходит и высота треугольника ABC: например, если точка C находится в стороне от отрезка, на расстоянии, много большем длины отрезка, то ясно, что напряженность поля в точке должна быть направлена к отрезку AB, а не по перпендикуляру к нему.

Итак, у нас остались медиана и биссектриса. Напряженность **E** поля отрезка равна сумме напряженностей полей его частей. Для того чтобы вектор **E** был направлен вдоль медианы, необходимо, чтобы отрезки равной длины Δx, находящиеся на равных расстояниях от середины отрезка, создавали одинаковое поле в точке C.

Только в этом случае сумма векторов $\Delta\mathbf{E}$ будет направлена вдоль медианы треугольника ABC. Однако это невозможно: отрезки равной длины имеют одинаковый заряд $\Delta Q = \sigma \Delta x$ (σ — линейная плотность заряда, то есть заряд единицы длины отрезка), а расстояния до точки C различны.

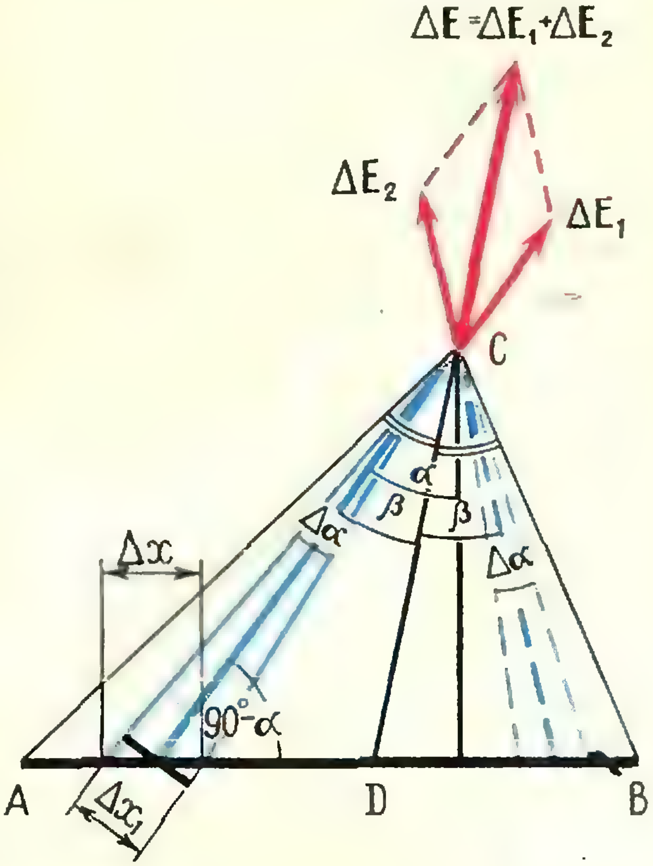


Рис. 14.

Значит, вектор **E** направлен вдоль биссектрисы треугольника ABC.

Убедимся в этом. Найдем напряженность поля отрезка Δx такого, что прямая, проведенная из него в точку C, образует угол α с высотой треугольника и $\Delta x \ll r$ (рис. 14). $\Delta E = \frac{\Delta x \sigma}{r^2}$. Если отрезок Δx виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, то $\Delta x_1 = r\Delta\alpha$ $\left(\text{угол } \alpha \text{ мал, так что } \operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}, \text{ а } \frac{\Delta x_1}{2} = r \operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2}\right)$ и $\Delta x = \frac{\Delta x_1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\Delta E = \frac{r\Delta\alpha\sigma}{r^2\cos\alpha} = \frac{\Delta\alpha\sigma}{r\cos\alpha}$. Но $r\cos\alpha = h$. Поэтому

$$\Delta E = \frac{\Delta\alpha\sigma}{h}.$$

Напряженность поля отрезка, который виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, не зависит от угла α. Все отрезки, которые видны из точки C под одинаковым углом, создают в ней поле одинаковой величины. Но для любого отрезка Δx, находящегося слева от биссектрисы CD треугольника ABC, можно найти отрезок справа от нее такой, что он виден из точки C под тем же углом $\Delta\alpha$, что и отрезок Δx, и угол β, образуемый прямой, соединяющей его с точкой C, такой же, как и для отрезка Δx. Так как эти отрезки создают в точке C одинаковое поле, то вектор $\Delta\mathbf{E}$ суммы векторов $\Delta\mathbf{E}_1$ и $\Delta\mathbf{E}_2$ напряженностей полей отрезков направлен по диагонали ромба, построенного на векторах $\Delta\mathbf{E}_1$ и $\Delta\mathbf{E}_2$, то есть вдоль биссектрисы CD. Это верно для любого угла β, то есть для любой пары отрезков. Значит, и вектор напряженности поля отрезка AB направлен вдоль биссектрисы треугольника ABC.

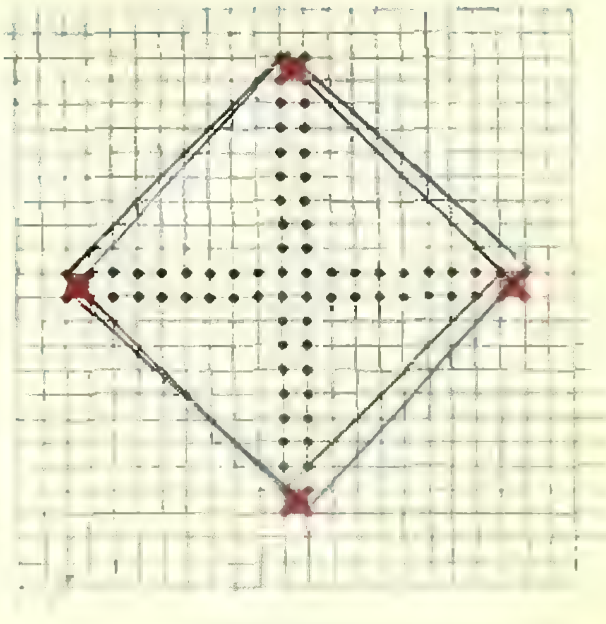
Правильное решение прислали *Н. Федин* (Омск) и *И. Гричик* (Давид-Городок Брестской обл.).

И. Ш. Слободецкий.

К «Задачам на бумаге в клетку»

1. Добавим с каждого из четырех концов к кресту по две точки. Количество возможных квадратов с вершинами в выделенных узлах увеличится на 10 (четыре маленьких красных квадратика (см. рис.), четыре квадрата, образец которых окрашен черным; два квадрата, один из которых выделен синим).

Крест в задаче можно рассматривать как дополнение шеренг узлов к центральной клетке, допускающей только один квадрат. Он допускает построение $10 \cdot 8 + 1 = 81$ различных квадратов.



(Окончание см. на стр. 61).

А. Л. Стасенко

Этот ужасный космический холод

В фантастике можно почти все. Например, в «Маракотовой бездне» Конан Дойля используется милая гипотеза о том, что вода на любой глубине не оказывает никакого давления, и ничего — получился отличный роман с наукой, любовью, древними греками и так далее.

В отличие от фантастики, всякая развитая наука больше запрещает, чем разрешает; но зато, если уж она что-то разрешила, то это наверняка.

О космическом холоде много сказано и фантастами, и инженерами:

«...Стиснув зубы, закрыв глаза, Светлана с остервенением рванула рукоятку (люка космического корабля)... ни вскрикнуть, ни пошевелить рукой она не успела. Смерть от космического холода была быстрее мысли» (Б. Фрадкин, Тайна астероида 117—03, Молотов, 1956).

«...Холод мирового пространства оказывается скорее полезным, ... так как отпадает необходимость взятия с собой охлаждающих веществ и устройств» (М. Валье, Полет в мировое пространство, ОНТИ, 1936).

Итак, холодно ли в космосе?

А что значит «холодно»? Давайте уточним это понятие. Будем считать, что при «холоде» от нас уходит много тепла в единицу времени, например, Q джоулей в секунду (*дж/сек*). А так как одни из нас могут быть маленького роста, другие великаны, то лучше смотреть, много ли тепла уходит в единицу времени с единицы площади. В качестве меры «холода» примем отток тепла в одну секунду с одного квадратного метра поверхности нашего тела:

$$\frac{Q}{S} = q\ (дж/сек \cdot м^2).$$

На Земле мы научились почти не думать о том, почему нам, собственно, не очень жарко; скорее, живя в умеренном поясе, мы думаем о том, чтобы не было холодно (заботимся о шубах, шапках и т. д.). А станет жарко,— к нашим услугам мороженое, морские пучины, глубокие омуты, ветер в лицо. Движение воды, воздуха, лед — все это немедленно и привычно обеспечивает достаточную величину q. Молекулы окружающей среды сталкиваются с поверхностью любого нагретого тела и уносят тепло. (При некоторой изобретательности вы можете даже сфотографировать над собою столб дрожащего воздуха, похожий на марево над горизонтом в жаркий день.)

А что делать, если в космосе станет жарко? В вакууме — ни воздуха, ни воды, там все жалко выбросить за борт корабля. Остается одно: излучать тепло. Этот процесс и на Земле заметен: излучают электропечь, пионерский костер (в этом легко убедиться, заслонившись своим товарищем). Но на Земле с этим процессом успешно конкурируют теплопроводность (передача тепла при наличии разности температур у соприкасающихся неподвижных тел) и конвекция (унос тепла вместе с движущейся массой). В космосе излучение — единственный способ охлаждения. Ясно, что для большего излучения надо «раскалиться». Этот парадокс — чтобы быстро охладиться, надо перегреться — связан с известным законом Стефана — Больцмана.

$$q = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Здесь σ — физическая постоянная, значение которой можно посмотреть в справочнике: $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ *вт/м²·град⁴*. Знак равенства имеет место только для так называемого абсолютно черного тела, а реально всегда $q < \sigma T^4$.

Из закона (1) видно, насколько быстро растет теплоотвод с увеличением температуры T излучающего тела: T увеличится в три раза — q возрастет в $3^4 = 81$ раз (почти в сто раз!). Надо помнить только, что температура T выражается по шкале Кельвина.

А дальше, чтобы в чем-то убедиться, нужно считать.

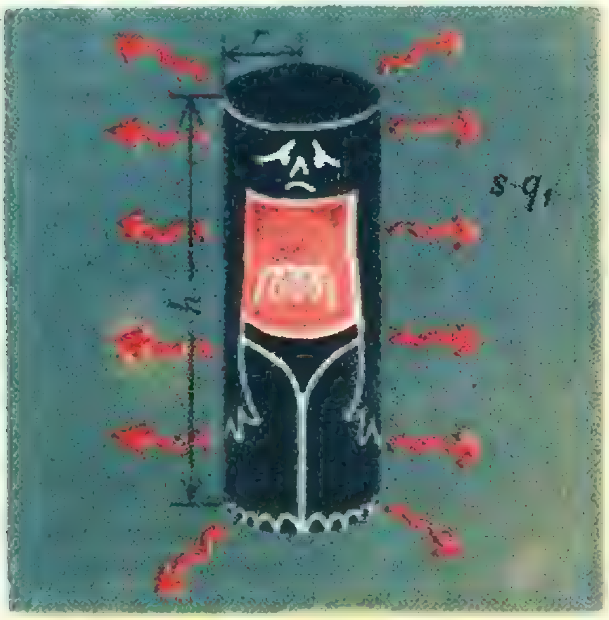


Рис. 1

Необходимо отметить, что охлаждение может вызываться и испарением воды, содержащейся в организме, с открытой поверхности тела. Мы не будем здесь рассматривать этот эффект, считая, например, что рассматриваемое нами тело помещено в плотно прилегающий идеально прозрачный полиэтиленовый мешок.

В живом организме происходят процессы, приводящие к выделению тепла (Q' *кал/сек*). Установлено, что вместе с пищей ученому нужно потреблять 3000 *ккал* в сутки, грузчику 5000 *ккал*. Так как в космосе, по-видимому, придется быть и тем и другим, примем в качестве рациональной диеты 4000 *ккал/сутки*, из которых пусть $^1/_4$ превращается в мышечную энергию, а $^3/_4$, то есть 3000 *ккал/сутки*, остается в виде тепла Q', подлежащего излучению. Переведем Q' в единицы системы СИ:

$$Q' = \frac{3 \cdot 10^3\ \dfrac{\textit{ккал}}{\textit{сутки}} \cdot 10^3\ \dfrac{\textit{кал}}{\textit{ккал}} \cdot 4{,}2\ \dfrac{\textit{дж}}{\textit{кал}}}{24\ \dfrac{\textit{ч}}{\textit{сутки}} \cdot 3600\ \dfrac{\textit{сек}}{\textit{ч}}} \approx$$

$$\approx 150\ \textit{вт}.$$

Далее оценим поверхность нашего тела S. Как это сделать? Можно вообразить себя цилиндром с высотой h, равной росту (пусть для школьника $h = 1{,}5$ *м*), а радиус цилиндра r подобрать так, чтобы получился объем тела V (рис. 1). Этот объем, если его выражать в литрах, численно равен массе тела m в килограммах (вспомним, что при вдохе мы плаваем, при выдохе тонем, значит, удельный вес тела близок к удельному весу воды). Тогда для $m = 50$ *кг* получим $r = 0{,}1$ *м*, $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 1$ *м²*. (Конечно, человек гораздо сложнее, но для физических оценок это годится.)

Пусть теперь этот модельный человек — водяной цилиндр, обладающий нормальной температурой $T = 37\ ^\circ C = (273 + 37)\ ^\circ K = 310\ ^\circ K$ с постоянным тепловыделением $Q' = 150$ *вт*, неожиданно оказывается в совершенно открытом космосе, причем на него не попадает излучение звезд, планет или других тел (очевидно, это «самый холодный» случай). Как он тогда будет охлаждаться? В одну секунду с его поверхности будет излучаться энергия $Q=\sigma T^4 S=525$ *вт*. Эта потеря частично восполняется внутренним тепловыделением Q', так что суммарная потеря тепла равна $Q-Q'=525-150=375$ *вт*. Интересно, за какое время τ его средняя температура может упасть, например, на $\Delta T=2^\circ$? Теплоемкость человека — водяного цилиндра равна $mc=50\,кг\times 1\,ккал/кг\cdot град\approx 200\,кдж/град$. Предполагая потерю тепла излучением постоянной, получим

$$\tau=\frac{mc\Delta T}{Q-Q'}=\frac{200\cdot 10^3\,\frac{дж}{град}\cdot 2^\circ}{375\,\frac{дж}{сек}}>15\ мин.$$

И это только при охлаждении с 37 до 35°! Таким образом, до мгновенного («быстрее мысли») превращения в «перемороженный лед» еще очень далеко даже в этом «самом холодном» случае. (Попробуйте рассчитать установившуюся температуру при $\tau\to\infty$.)

А теперь будем считать, что мы находимся в космосе на орбите Земли вокруг Солнца. Найдем равновесную температуру $T_р$ нашего тела, когда оно должно излучать не только выделяемое внутри тепло, но и то тепло $q_С\cdot\frac{S}{2}$, которое поглощается в одну секунду половиной нашего тела, обращенной к Солнцу (величина потока солнечного излучения на орбите Земли, так называемая солнечная постоянная, равна приблизительно 1400 *вт/м²*). Имеем уравнение

$$q_С\frac{S}{2}+Q'=\sigma T_р^4 S,$$

из которого

$$T_р=\sqrt{\frac{(1400\cdot 0,5+150)}{5,7\cdot 10^{-8}}}=350^\circ\ К=$$
$$=77^\circ\ С.$$

Это гораздо больше, чем могут позволить нам врачи. Конечно, можно ту половину тела, которая облучается Солнцем, сделать зеркальной (но тогда она не будет ничего излучать), а другую, с которой должно отводиться внутреннее тепло организма Q' — абсолютно черной (рис. 2)*), но этот пестрый костюм арлекина будет свидетельствовать скорее о боязни изжариться, чем замерзнуть в признанном царстве ужасного вечного холода.

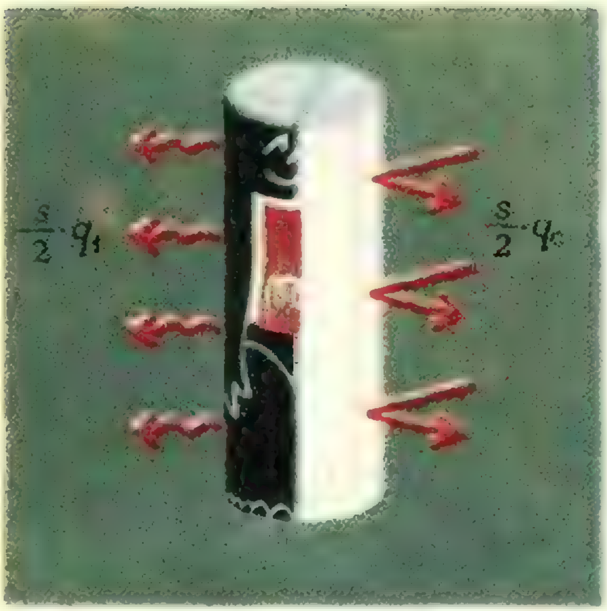


Рис. 2.

Здесь уместно вспомнить, что «кусочек космоса» (впрочем, довольно неглубокий вакуум) используется в сосуде обычного термоса в качестве лучшей теплоизоляции; его стенки сделаны блестящими, отражающими, чтобы ничего не поглощать и не излучать. Таким образом, почти полное отсутствие вещества в вакууме само по себе является лучшей шубой.

Ну а если нужно охлаждать не собственное тело с жалкой печкой внутри, а громадный корабль для полетов в Солнечной системе с мощным ядерным реактором? Допустим, у вас есть реактор, который выделяет в секунду тепловую энергию порядка десяти миллионов киловатт ($W=10^{10}$ *вт*). Часть ее (~10%) вы превратите в энергию реактивной струи, осветительных лампочек, радиоволн и других полезных вещей. А почему не всю? Это запрещает сделать важный закон, именуемый теоремой Карно: если вы хотите получить полезную работу за счет беспорядочной тепловой энергии, нужно обеспечить не только «горячий конец» T_1 тепловой машины (температура реактора), но и «холодный» $T_2 < T_1$. И тогда в лучшем случае коэффициент полезного действия этой машины η будет равен

---

*) Найдите среднюю установившуюся температуру тела в этом случае при $\tau\to\infty$.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1. \qquad (2)$$

(Это похоже, например, на падение воды с высоты h_1 до высоты h_2; тогда относительное изменение энергии будет $\frac{mgh_1 - mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$. Сам Карно использовал эту аналогию, но надо помнить, что это только аналогия.)

Чтобы тепловая машина работала (то есть выполнялось условие $\eta > 0$), нужен перепад температур между нагревателем и «холодильником». Хорошо бы приблизить T_2 к нулю или T_1 к бесконечности; тогда к. п. д. был бы близок к единице, а это древняя мечта техники. Но T_1 не может быть слишком большим, оно ограничено хотя бы плавлением материалов. А уменьшать T_2 особенно тоже нельзя, ведь для интенсивного охлаждения нужно T_2, наоборот, увеличивать. Компромиссное решение дает $\eta \sim 10\%$.

Пусть, например, $T_1 = 2000°$ К. (Такие металлы, как вольфрам, при этом не плавятся.) Тогда из формулы (2) получим, что $T_2 = 1800°$ К. Далее, из (1) найдем максимальный поток излучения $q = \sigma T_2^4 = 6 \cdot 10^5$ *вт/м²*.

Тогда для излучения бесполезной энергии реактора $(1-\eta)\,W$ потребуется площадь не меньше чем

$$S = \frac{(1-\eta)\,W}{q} = \frac{0{,}9 \cdot 10^{10}}{6 \cdot 10^5} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ м}^2.$$

Полтора гектара площади, нагретой до 1800° К и выставленной для ударов метеоритов, потоков молекул и частиц! И все эти гектары — вся эта масса трубок, текущего в них расплавленного металла или раскаленного газа — теплоносителя, омывающих реактор,— нужны только для того, чтобы не перегреться, и только потому, что не существует никакого космического холода.

(*Начало см. на стр. 16.*)

из первых $(n-1)$ столбцов и в любой из верхних $(n-1)$ строк, то есть может занимать $(n-1)^2$ положений.

Аналогично можно показать, что число квадратов размерами 3×3 равно $(n-2)^2$ и так далее.

Число всевозможных квадратов равно

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Оказывается вместе с тем, что можно подсчитать и количество возможных прямоугольников для того же заданного исходного листа бумаги в клетку; оно равно

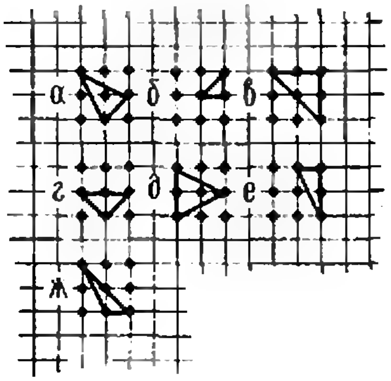
$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots + 1^3.$$

Попробуйте это доказать.

3. Сколько треугольников?

На листе бумаги в клетку размерами 3×3 выделены все девять его узлов. Каждый узел может служить вершиной невырожденного треугольника (треугольника, три вершины которого не лежат на одной прямой).

На рисунке показаны семь таких треугольников,



причем *они не равны*, их нельзя совместить наложением. Найдутся ли еще невырожденные треугольники, не равные показанным здесь, вершины которых можно разместить в узлах нашего листка бумаги?

Е.Я. Гик

ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Шахматы и математика имеют довольно много общих точек соприкосновения. В наших заметках речь пойдет в основном о математических задачах на шахматной доске.

Перелистывая книжки с такими привлекательными названиями, как «Математический калейдоскоп», «В мире тайн и чудес», «Веселые и занимательные числа и фигуры», вы наверняка обратили внимание на то, что в каждой из них содержится немало задач о фигурах на шахматной доске.

Иногда это головоломки, с которыми справится любой сообразительный человек, чаще для этого необходимы определенный математический опыт и знания. Такие задачи можно найти не только в популярных книжках, они регулярно предлагаются в математических кружках, на олимпиадах, нередко встречаются и в серьезной математической литературе. Короче говоря, существует множество математических задач, как простых, так и сложных, с различным шахматным содержанием.

Цель настоящих заметок как раз и состоит в том, чтобы попытаться в какой-то степени систематизировать эти задачи и хотя бы кратко рассказать о наиболее интересных из них.

Мы надеемся, что вы знакомы с ходами шахматных фигур, хотя заранее предупреждаем, что особого умения играть в шахматы не потребуется.

Возможно, некоторые из вас решат, что математики совсем сошли с ума и вместо того, чтобы заниматься делом, развлекаются, расставляя фигуры на доске (уж лучше бы играли просто в шахматы!). Однако труд математиков в этом направлении имеет свой смысл. Дело в том, что для решения ряда важных математических задач шахматную доску и фигуры очень удобно использовать в качестве модели.

Не случайно шахматные термины можно встретить в литературе по теории игр, кибернетике, теории графов, комбинаторике, теории чисел, программировании.

Приведем один пример. Что общего между чисто шахматным понятием «ладья» и чисто математическим «многочлен»? Тем не менее американский математик Д. Риордан в своей книге «Введение в комбинаторный анализ» (М., ИЛ, 1963) как раз применяет термин «ладейный многочлен»! Чем это вызвано?

Оказывается, большой класс комбинаторных задач сводится к определению числа размещений на шахматной доске заданного числа ладей, не угрожающих друг другу (ни одна пара ладей не должна находиться на одной вертикали или горизонтали). А при рассмотрении еще более сложных задач существенную роль играет многочлен

$$R(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots + r_k x^k + \ldots + r_n x^n,$$

где r_k — число размещений на доске размера $n \times n$ не угрожающих друг другу k ладей ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Этот многочлен и был назван Риорданом ладейным: как мы видим, такое название вполне оправдано.

Заметим, что бездонное море задач и проблем возникает тогда, когда речь заходит о создании машины, играющей в шахматы (а точнее, программы для нее).

Этой модной в наши дни теме посвящены десятки и сотни специальных статей, книг, дискуссий и даже диссертаций, и мы не станем подробно останавливаться на ней.

От персидского шаха до наших дней

Наш разговор естественнее всего начать с рассмотрения свойств шахматной доски, пока не расставляя на ней фигур.

Конечно, каждый из вас слышал знаменитую легенду о происхождении шахмат. Мудрец, придумавший их, потребовал в награду от персидского шаха, которому игра очень понравилась, столько зерен пшеницы, сколько понадобится для покрытия всех клеток шахматной доски, если на ее первую клетку положить одно зерно, а на каждую следующую вдвое больше, чем на предыдущую (рис. 1).

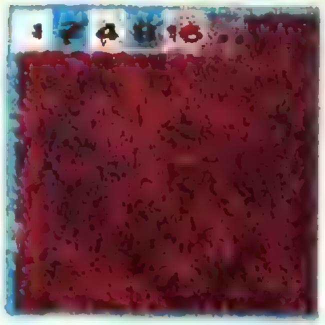


Рис. 1.

Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах персидского шаха, но и во всех амбарах мира. Мудрец скромно потребовал

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерен. Это число записывается двадцатью цифрами и превышает 18 квинтиллионов ($2^{10} = 1024 \approx 10^3$). Конечно, с математикой здесь небольшая связь, скорее, полученный результат как бы символически иллюстрирует грандиозные математические возможности, скрывающиеся в шахматной доске.

Пожалуй, самое любопытное свойство шахматной доски заключается в том, что кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. Например, геометрически расстояние от поля a1 до поля h8 больше, чем до a8, а королю на любой из этих переходов требуется ровно 7 ходов. Для математиков, которым приходится сталкиваться с самыми разнообразными расстояниями (метриками), это обычное дело.

Особенно эффектно указанное свойство проявляется в знаменитом этюде Рети (рис. 2).

Кажется, совершенно невероятным, что в этом положении белый король в состоянии догнать черную пешку.

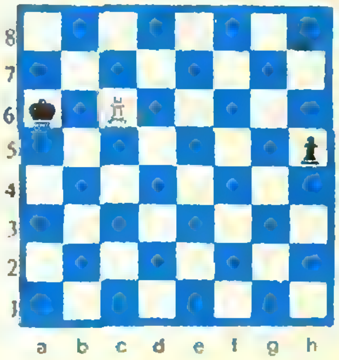


Рис. 2. Р. Рети, 1921 г. Ничья.

Однако это становится возможным, если он отправляется за ней не по прямой...

1. Крh8 — g7 h5—h4 2. Крg7—f6. Теперь грозит 3. Крf6—e6, и при поддержке короля белая пешка проходит в ферзи одновременно с вражеской.

2... Крa6—b6 3. Крf6—e5. Грозит 4. Крe5—d6, и, несмотря на то, что король довольно далеко удалился от вертикали h, после вынужденного **3...Крb6 : c6** он возвращается и поспевает к пешке на пороге ее превращения в ферзя: **4. Крe5 — f4 h4—h3 5. Крf4—g3 h3—h2 6. Крg3 : h2. Ничья!**

Конечно, за доской шахматиста никто не заставляет решать математические задачи,— чтобы хорошо играть в шахматы, совсем не обязательно быть математиком. Беспрерывный расчет вариантов, который приходится вести шахматисту во время партии, имеет совершенно иную специфику, чем аналогичная работа математика. И все же математический навык иногда оказывается весьма полезным для шахматиста, особенно в эндшпиле. Возвращаясь к упомянутому свойству шахматной доски, приведем пример, когда упущение его из виду привело к трагедии.

Позиция на рисунке 3 возникла в шестой партии матча на первенство мира **М. Ботвинник — Д. Бронштейн** (1951 г.). Здесь Бронштейн, игравший белыми, легко делал ничью путем 1. Кd8—e6+ и 2. Кe6—d4, однако сначала он решил подтянуть короля к опасной пешке: **1. Крb3—c2.** Разумеется, гроссмейстер хорошо видел возможность

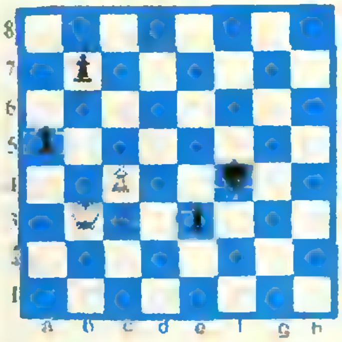


Рис. 3.

появления черного короля на поле f2, однако он рассматривал только 1...Крf4—f3 и 2... Крf3—f2 и полагал, что здесь также успеет сыграть 2. Кd8—e6 e3—e2 3. Кe6—d4+ с ничьей. Король Ботвинника действительно отправился на f2, но не по прямому пути, а по обходному. После **1...Крf4—g3!!** белым пришлось сдаться, так как пешку e3 остановить невозможно: на 2. Кd8—e6 следует 2...e3—e2, и конь попадает на d4 без шаха.

Рассмотрим теперь несколько уже вполне математических задач, связанных с шахматной доской. Во многих из них требуется определить, можно ли данную доску покрыть целиком теми или иными геометрическими фигурами. Вот один красивый пример на эту тему.

На рисунке *4а* изображен урезанный квадрат размером 8×8.

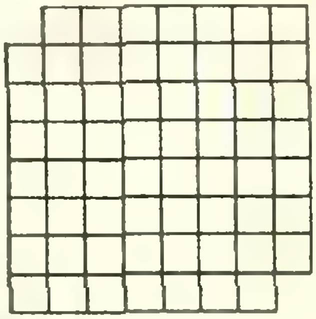


Рис. *4а*.

Спрашивается, можно ли покрыть его целиком (и без наложений) костями домино размером 2×1?

Мы могли бы пустить в ход громоздкие алгебраические уравнения, однако «шахматное» решение задачи лаконичнее и изящнее. Окрасим этот квадрат (без угловых клеток), как и полагается в черно-белый цвет*), превратив его в урезанную шахматную доску (рис. *4б*). Теперь заметим, что каждая

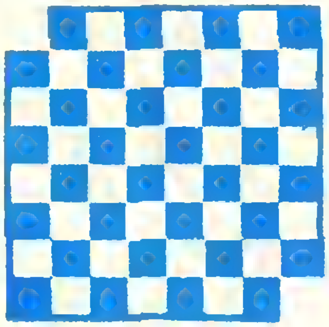


Рис. *4б*

кость домино покрывает одно белое поле и одно черное. У нас же белых клеток на две меньше, чем черных, а потому необходимого покрытия не существует!

---

*) На всех рисунках к этой статье «черные» поля окрашены голубым цветом.

В некоторых задачах требуется так разрезать шахматную доску, чтобы при этом выполнялись определенные условия. Сейчас на таких задачах мы не будем останавливаться.

Иногда вместо обычных шахмат рассматриваются их различные видоизменения, связанные с преобразованиями шахматной доски, причем эти преобразования носят вполне математический характер. Чаще всего этим занимаются шахматные проблемисты. В «Кванте» (см. № 5, 1970) уже рассказывалось о цилиндрических и тороидальных шахматах. Любопытно рассмотреть цилиндрическую доску, у которой вырезана одна вертикаль (рис. 5*а*). На такой доске слон становится хамелеоном: превращается из белопольного в чернопольного и наоборот! Разумеется, цилиндр и тор (рис. 5*б*) — далеко не единственные поверхности, которые можно склеить из шахматной доски. Много хитростей имеют и конусоидальные шахматы (рис. 5*в*).

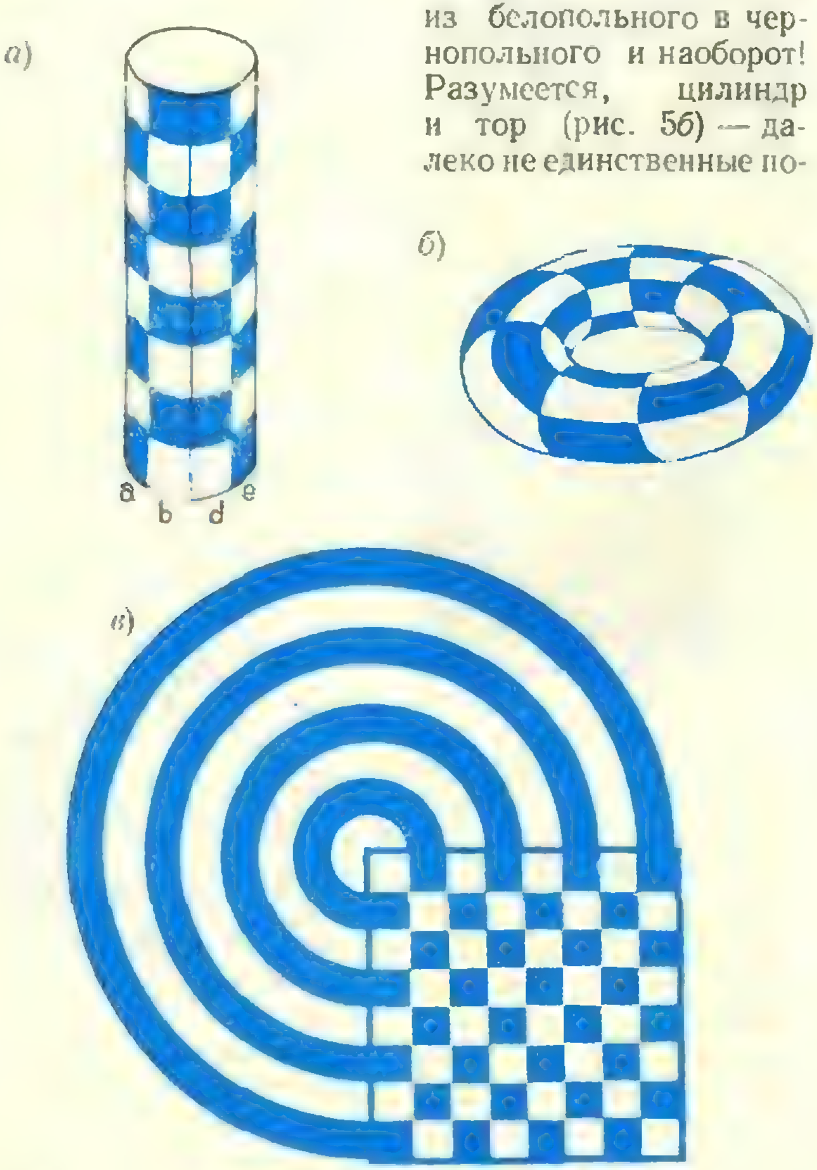


Рис. 5.
а) Цилиндрическая шахматная доска без вертикали **с**.
б) Тороидальная шахматная доска.
в) Конусоидальная шахматная доска получается приклеиванием вертикали a к восьмой горизонтали.

Легко привести примеры шахматных задач, которые решаются на одной из упомянутых досок и не решаются на других. Например, задание «мат в один ход» на рисунке 6 выглядит нелепым. Однако на цилиндрической доске, получающейся склеиванием вертикалей а и h, оно выполнимо: **1. h3—h4 мат!** Поля b4 и b6 здесь держит конь, a6 и b5 — слон, на линию h черного короля не пускает его белый оппонент. Заметим, что при белой пешке на h2 мата уже нет, так как после **1. h2—h4** черные берут на проходе *): 1 . . . a4 : h3.

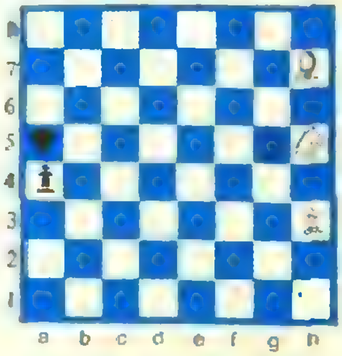


Рис 6. Мат в один ход.

Однако и на цилиндрической доске удается не все, что возможно на обычной. Например, чтобы заматовать королем и ладьей одинокого короля противника, его недостаточно прижать на линию a или h, требуется еще загнать его на первую или восьмую горизонталь, а на цилиндрической доске это невозможно. На тороидальной доске, как нетрудно убедиться, с «голым» королем противника не может справиться даже ферзь.

---

*) Взятие на проходе — взятие неприятельской (скажем, черной) пешки, продвинувшейся из начального положения на два поля и ставшей рядом по горизонтали с белой пешкой. При этом пешка противника (черная) снимается так, как если бы она продвинулась на одно поле.

А вот еще один забавный пример (рис. 7). Здесь мат в два хода дается как на обычной, так и на цилиндрической доске, но на каждой из них по-своему.

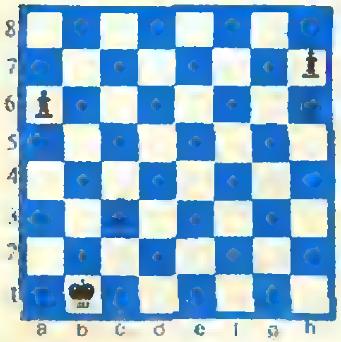


Рис. 7. Мат в два хода.

На обычной доске все очень просто:
1. Ла5 : а6 Крb1 — c1
2. Ла6—а1 мат.

На цилиндрической же после хода 1. Ла5 : : а6 проигрывается ладья ввиду ответа 1... h7 : а6! С другой стороны, если ладья уйдет с а5, то черные продвинут вперед пешку а6, и мата нет. Решает **1. Ла5—а5!!** — ладья проходит по окружности и возвращается на исходное поле! Дальнейшее известно: **1...Крb1—c1—2. Ла5—а1 мат.**

Предлагаем вам самим придумать аналогичные примеры на тороидальных и коноидальных досках.

Среди югославских шахматных проблемистов распространены так называемые проективные шахматы на бесконечной шахматной доске с четырьмя дополнительными полями. На обычной доске с одним дополнительным полем получаются сферические шахматы (рис. 8). Однако подробное изучение шахматной игры на полученных досках не входит в наши планы.

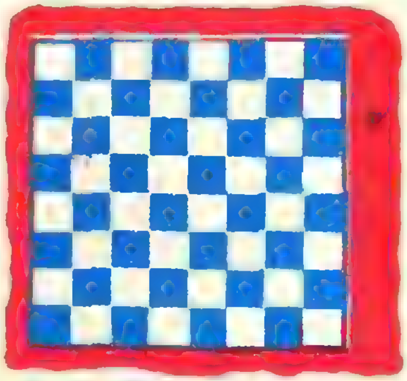


Рис. 8. Сферическая шахматная доска. С дополнительного внешнего поля (красного), окружающего всю доску, можно войти на доску в любом месте и в любом направлении (по вертикали, горизонтали или диагонали). Например, ладья на пустой доске может одним ходом пройти по всем полям (проходя 7 раз через внешнее поле).

В заключение этого раздела предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения, ответы к ним появятся в следующем номере.

1. Доказать, что стоклеточную доску размером 10× ×10 нельзя целиком и без наложений покрыть фигурами, образец которых приведен на рисунке 9.

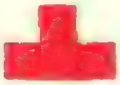


Рис. 9.

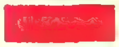


Рис. 10.

2. Обычная костяшка домино состоит из двух квадратов. Назовем «тримино» фигуру, составленную из трех квадратов (рис. 10). Если шахматную доску покрыть двадцатью одним «тримино», то одно поле останется свободным. Каким оно может быть?

3. Из доски размером 8× ×9 вырезаны 12 полей (рис. 11). Доказать, что оставшуюся часть нельзя покрыть «тримино».

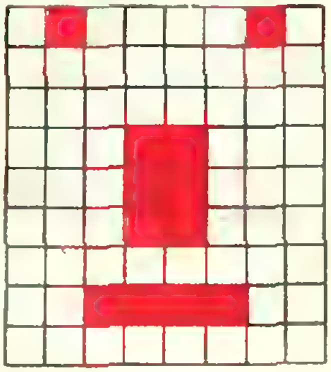


Рис. 11.

4. Пусть доска имеет нечетное число полей (например, ее размер 7×9). Поля с общей стороной назовем смежными. Поставим на каждое поле доски по пешке, затем соберем эти пешки и снова расставим их на доске.

а) Может ли теперь каждая пешка оказаться на поле, смежном с тем, которое она занимала при первой расстановке?

б) Пусть при вторичной расстановке пешки, занимавшие раньше левые углы, остались на месте, а пешки, стоявшие при первой расстановке рядом друг с другом, по-прежнему стоят рядом. Могла ли какая-нибудь пешка изменить свое положение?

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

Всегда ли прав наш глаз?

Дж. Грегг
ОПЫТЫ СО ЗРЕНИЕМ

В разделе «Лаборатория Кванта» в 10-м и 11-м номерах нашего журнала за 1970 г. было рассказано о некоторых экспериментах со зрением. Цель их состояла в том, чтобы читатели поняли, что не всякое зрительное ощущение надо принимать как физическую реальность. Человеческий глаз — уникальный физический прибор, обладающий поразительной чувствительностью и точностью восприятия окружающего мира. Но и он в определенных условиях может совершать ошибки.

Знаменитый русский литературный герой XIX в. Козьма Прутков советовал: «Если на клетке слона увидишь надпись «Буйвол» — не верь глазам своим». Однако нередко глаза подводят нас даже там, где все надписи сделаны правильно.

В студенческие годы автору этих строк довелось делать серьезный научный доклад на, казалось бы, совершенно анекдотическую тему: «О влиянии пения на зрение». Речь шла, в частности, о том, что глаза человека, напряженно ожидающего каких-то экспериментальных фактов, быстро устают и начинают видеть то, чего нет в действительности. Так вот, оказывается, музыка помогает восстановлению нормальной остроты и точности зрительных восприятий.

Так как глаз — важнейший «инструмент» физика, надо хорошо знать основные принципы его работы и границы его возможностей. Этому знакомству может существенно помочь книга Джеймса Грегга «Опыты со зрением в школе и дома», выпущенная в 1970 году издательством «Мир»*).

Книга эта содержит описание почти четырех десятков опытов, которые, как правило, не требуют никакой специальной аппаратуры и при достаточной настойчивости вполне могут быть воспроизведены в домашней обстановке. Последовательно проделывая эти опыты, можно узнать много интересных и порой неожиданных сведений о механизме зрительного восприятия окружающей действительности.

Многие из приведенных Греггом опытов характеризуют различные стороны глаза, рассматриваемого как оптическая система: отражение и преломление света глазом человека (опыты 2 и 4); живая диафрагма глаза — зрачок (опыт 6); хроматическая аберрация оптической системы глаза (опыт 8); поле зрения (опыт 13); острота зрения (опыт 15)— вот некоторые из опытов, касающихся оптических свойств глаза. Это, так сказать, физика нашего зрения.

Процессы, благодаря которым мы видим окружающий мир, очень сложны и их нельзя понять без учета работы нашей нервной системы, то есть без исследования физиологии зрения. Лучи света, проходящие в наш глаз, раздражают окончания нервных волокон зрительного нерва. Эти сигналы поступают в наш мозг и во многом еще непонятным нам образом вызывают картины увиденного. При этом мозг корректирует, подправляет информацию, полученную от наших глаз, используя накопленный человеком опыт.

Видели ли вы, как нерешительны движения ручонок малыша, еще не научившегося произносить первые слова? Как часто он пытается схватить яркую игрушку совсем не там, где она действительно находится. А все потому, что мозг ребенка еще не научился помогать его глазам. На это нужно некоторое время.

Однако и у взрослых людей с так называемым нормальным зрением существуют определенные границы возможностей, за пределами которых зрение начинает их обманывать, полученная с помощью глаза информация оказывается недостоверной. Многие опыты в книге Грегга помогают нащупать эти границы, понять, когда мы можем доверять нашему зрению, а когда оно может нас обмануть, снабдить ложными сведениями. Влияние фона на восприятие изображения (опыт 20); физиологическое удваивание изображений (опыт 26); соперничество фигур, при котором их изображения как бы борются друг с другом, подавление изображений и слияние цветов (опыт 28); ошибки в оценке расстояний и размеров предметов (опыты 30 и 33) — все это заставляет нас более осторожно относиться к тому, что мы видим в действительности.

---

*) Джеймс Грегг, Опыты со зрением в школе и дома, М., «Мир», 1970, 197 стр.

Недаром в послесловии переводчика книги эпиграфом к одному из разделов послужила следующая история из судебной хроники XIX века:

— «Изложите жалобу, Истец.

— Ваша честь, темной ночью я стоял в своем доме у широко раскрытого окна. Вот этот человек — Ответчик — подошел с улицы к окну — в темноте я не увидел его — и ударил меня по лицу.

— Скажите, Истец, если темнота помешала вам увидеть человека, то как вы смогли опознать в нем Ответчика?

— От сильного удара, Ваша честь, в моем глазу вспыхнул столь сильный свет, что я отчетливо разглядел лицо этого человека».

Несколько заключительных опытов посвящено различным видам зрительных иллюзий, вроде тех, о которых мы рассказали в статье Л. и Р. Пенроузов «Невозможные объекты», опубликованной в пятом номере нашего журнала за 1971 год.

Далеко не на все вопросы, связанные с описанными Греггом опытами, наука о зрении может сегодня дать строгий и однозначный ответ. В некоторых случаях, как предупреждает автор, объяснения пока вообще не найдены. В других случаях заинтересовавшемуся экспериментатору придется заставить потрудиться свое воображение, порыться в других книгах, чтобы расширить свои познания. Автор частенько сам наталкивает читателя на попытки изменить условия опыта, провести серию различных измерений и самостоятельно оценить полученные результаты. Словом, эта книга, как говорится, «не для умов ленивых». Она пробуждает интерес, обостряет наблюдательность, активизирует работу мысли. И в этом ее несомненное достоинство.

Автор предпослал своим опытам небольшое введение, где рассказывается об устройстве глаза и основных принципах его работы. Переводчик дополнил книгу обширным послесловием, расширяющим представления читателей о физиологии зрения. В нем имеется много интересных фактов о том, как относятся к свету растения и животные, как изменялось, совершенствовалось в ходе эволюции животного мира зрение.

К сожалению, перевод книги на русский язык сделан недостаточно четко. Особенно много ошибок и неточностей допущено при переводе сведений из физической оптики. Издательству следовало бы привлечь к работе над книгой кого-либо из специалистов в этой области.

В. А. Лешковцев

(*Начало см. на стр. 50.*)

2. Воспользуемся формулой, справедливость которой можно проверить с помощью метода математической индукции или другим способом. Вот она:

$$n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+\ldots+1^3=(1+2+3+\ldots+n)(1+2+3+\ldots+n).$$

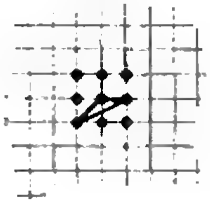
Число прямоугольников, ширина которых сверху вниз равна m, а слева направо равна k, равно

$$(n-m+1)(n-k+1).$$

Число возможных прямоугольников всех допустимых размеров как раз и равно

$$(1+2+3+\ldots+n)(1+2+3+\ldots+n).$$

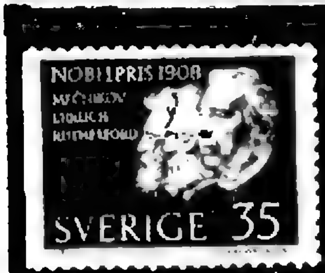
3. Найдется еще один треугольник.

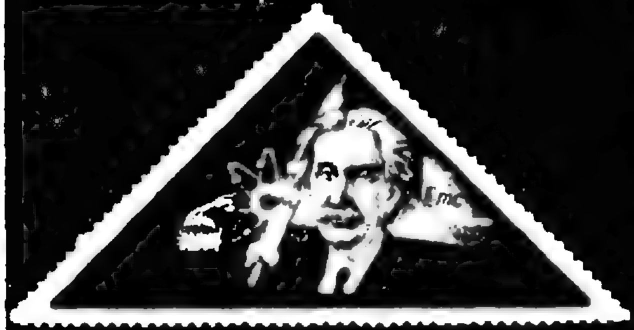


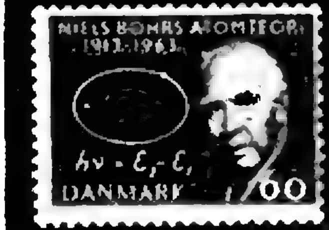
Действительно, три вершины из девяти можно выбрать $C_9^3=84$ способами. Из них 8 вырожденных треугольников, 4 треугольника, равных показанному на рисунке 3, *а* (в задаче), 16 треугольников типа 3, *б*, 4 — типа 3, *в*, 8 — типа 3, *г*, 4 — типа 3, *д*, 16 — типа 3, *е*, 8 — типа 3, *ж*.

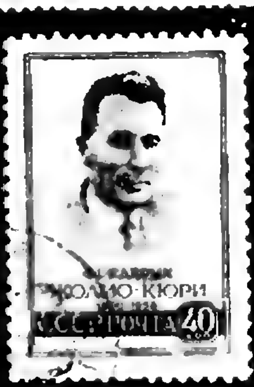
Наконец, найдутся 16 треугольников, равных приведенному в данном ответе. Тем самым исчерпываются все 84 возможности.

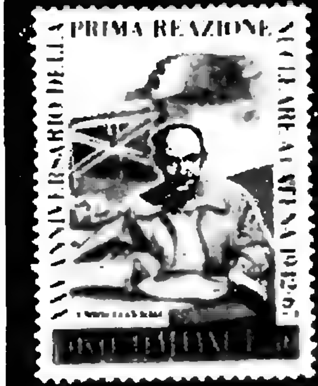
МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ СОЗДАТЕЛЯМ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

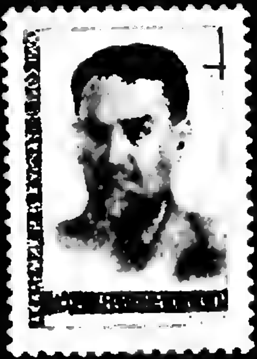

NOBELPRIS 1908
METCHNIKOV
EHRLICH
RUTHERFORD
SVERIGE 35

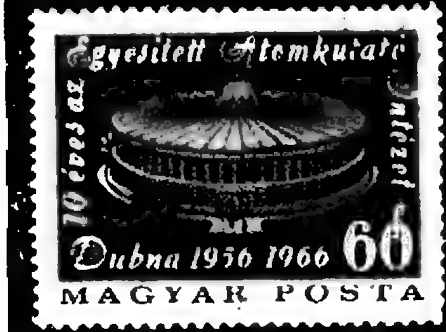



NIELS BOHRS ATOMTEORI
1913-1963
$h\nu = E_2 - E_1$
DANMARK 0,60


Ф. ЖОЛИО-КЮРИ
ПОЧТА СССР 40


PRIMA REAZIONE
NUCLEARE A CATENA 1942
XXV ANNIVERSARIO DELLA




Egyesített Atomkutató Intézet
10 éves az
Dubna 1956 1966
60
MAGYAR POSTA

В этом номере мы отмечаем столетие со дня рождения выдающегося английского физика Эрнеста Резерфорда, одного из основоположников физики атомных ядер. В 1908 году за изучение радиоактивности ему была присуждена Нобелевская премия. На шведской марке 1968 года, посвященной лауреатам Нобелевской премии за 1908 год, первым справа изображен — Резерфорд. На втором и третьем планах — знаменитый немецкий врач Пауль Эрлих и выдающийся русский биолог Илья Ильич Мечников.

Большой вклад в ядерную физику внес Альберт Эйнштейн. Его знаменитая формула $E = mc^2$, связывающая энергию и массу, лежит в основе всей ядерной энергетики. Портрет Эйнштейна мы видим на парагвайской марке, выпущенной в 1965 году.

Другим великим физиком, существенно продвинувшим вперед наши представления о природе атомных ядер, был датчанин Нильс Бор, портрет которого изображен на датской марке 1963 года. На марке нарисована планетарная модель атома и формула $h\nu = E_2 - E_1$, определяющая энергию излучения атома.

Французский физик Фредерик Жолио-Кюри вместе со своей женой Ирэн в 1934 году открыл искусственную радиоактивность атомных ядер. Он изображен на советской марке, выпущенной в 1958 году.

Первый атомный реактор был построен в США в 1942 году под руководством итальянского физика Энрико Ферми. На итальянской марке 1967 года Ферми изображен в лаборатории, где монтировался этот реактор.

В Советском Союзе работы по изучению природы атомных ядер долгое время возглавлял академик Игорь Васильевич Курчатов. К 60-летию со дня рождения И. В. Курчатова у нас была выпущена марка с его портретом.

В 1956 году в городе Дубна начал работать Объединенный институт ядерных исследований. В нем успешно трудятся ученые из социалистических стран. Марка, посвященная десятилетию работы этого института, была выпущена в 1966 году в Венгрии. На ней изображено здание, где находится один из самых крупных ускорителей заряженных частиц — синхрофазотрон — на энергии 10 миллиардов электрон-вольт.

А. В. [illegible]тыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье
«Принцип Дирихле»
(см. «Квант» № 7)

3. Рассмотрите «клетки» 0, 1, 2, ..., 100 000 — номер «клетки» равен числу волос у «содержащихся» в ней людей.

6. Не может быть, чтобы в некоторый момент времени одна из команд не сыграла еще ни одного матча в первенстве, а другая уже встречалась со всеми.

10. Построим 51 «клетку»: «клетка» 0— для чисел, кончающихся на 00; «клетка» 1— кончающихся на 01 или 99; «клетка» 2— на 02 или 98; ...; «клетка» 49 — для кончающихся на 49 или 51; «клетка» 50— на 50. Какие-то два числа из 52 данных попадут в одну клетку. Тогда либо их сумма, либо разность кончается на 00. Среди 51 числа такой пары может не быть: 1, 2, 3, ..., 50, 100.

12. Разбейте квадрат на 50 равных прямоугольников.

14. Спроектируйте окружности на сторону BC.

18—19. По принципу Дирихле остатки от деления степеней A на 10^n рано или поздно повторятся, то есть существуют $m<k$ такие, что A^m и A^k имеют одинаковые остатки при делении на 10^n.

Докажите, используя взаимную простоту A и 10^n, что A^{m-1} и A^{k-1} тоже имеют одинаковые остатки.

20. Рассмотрим ряд 1, 11, 111, 1111, 11111,... Найдутся два числа из этого ряда, дающие одинаковый остаток при делении на 1970. Остается из большего вычесть меньшее.

21. а) От клетки с 1 до клетки с 100 можно добраться, «перешагнув» не больше чем 18 раз из клетки в соседнюю.

в) Постройте несколько «путей» из клетки с 1 в клетку с 81.

23. Расположите жильцов по возрасту и возьмите 100 самых старших.

24. Если все углы одинаковы, то каждый из них равен $\frac{180^\circ}{7}=\alpha$, $25^\circ<\alpha<26^\circ$. Рассмотрите наименьший угол.

25. Расположите мысленно в ряд листья по величине отбрасываемой ими на землю тени и оборвите 8/15 из них, начиная с «наименее теневого» конца ряда.

26. Один из способов раздачи: первому мальчику не дать орехов, второму — один орех, третьему — два,..., двадцать первому — двадцать. При этом нужно иметь 210 орехов. Докажите, что при любом другом способе раздачи нужно еще больше орехов.

27. Расположим отрезки по величине: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_7$. Докажите, что из отрезков $a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant a_{k+2}$ можно составить треугольник тогда и только тогда, когда $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$. Предположим, утверждение задачи неверно. Значит, $a_k+a_{k+1}\leqslant a_{k+2}$ ($k=1, 2, \ldots, 5$). Докажите, что длина a_7 будет наименьшей, если $a_1=a_2=10$ *см*, $a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$. Но даже в этом случае $a_7=130$ *см*.

28. Ровно 100 нечетных чисел меньше 200. Для каждого числа a из них «кустом a» назовем совокупность чисел a, $2a$, $4a$, $8a$... Каждый член рассматриваемого в задаче ряда попадет в один из «кустов». Ясно, что из двух чисел «куста» одно делится на другое. Остается применить принцип Дирихле.

К заметке
«У нас в гостях Вася Смекалкин»
(См. «Квант» № 7, 4-я стр. обложки)

«Сколько медалей?». 30 золотых, 31 серебряная, 35 бронзовых.

«Попробуйте разделить» Яблоки получили отец, сын и внук.

«Сколько конфет было у Саши?». 25 конфет.

«60 ступенек до Нины. А до Тани?». До Тани 20 ступенек.

«Где какие шарики?». В первом ящике — зеленый шарик, во втором — белый, в третьем — черный.

«Как расположить одним приемом?». Взять пятый стакан, перелить содержимое во второй стакан, а его поставить на место.

«Какие цифры поставить?». 12×89=1068.

«Сколько денег у Коли?». 3 копейки.

К статье
«Инверсия и задача Аполлония»

1. По свойству 5 окружности переходят в прямые, их общая точка переходит в общую точку полученных прямых, следовательно, указанные окружности переходят в прямые, пересекающиеся в одной точке.

2. По свойствам 2 и 7 параллельные прямые переходят в окружности, касающиеся в точке O — центре инверсии.

3. Пусть A и B — данные точки, а искомая окружность касается данной прямой в точке X. Проведем секущую искомой окружности через точки A и B до пересечения с данной прямой в точке C (рис. 1). Тогда по известной теореме $CX^2=CA\cdot CB$. Но отрезки CA и CB можно считать данными,

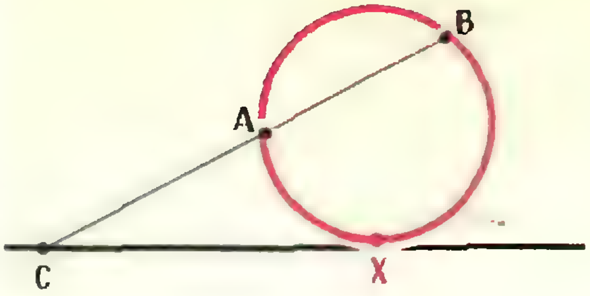


Рис. 1.

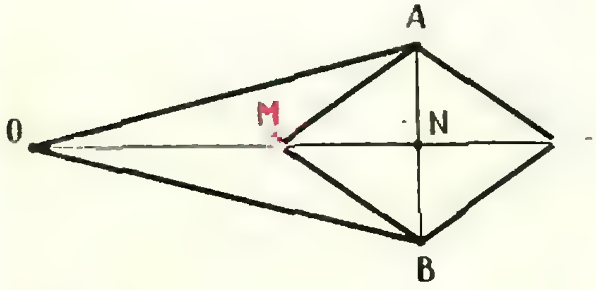


Рис. 2.

следовательно, можно построить и отрезок CX, после чего по трем точкам A, B и X восстанавливается искомая окружность.

4. Инверсор Поселье. Проведем отрезки OM' и AB, пусть N — точка их пересечения (рис. 2). Обозначим через x отрезок MN. Поскольку $AM'BM$ — ромб, то по теореме Пифагора находим

$$AN^2 = AM^2 - x^2,$$

отсюда

$$ON^2 = OA^2 - AN^2 = OA^2 - AM^2 + x^2.$$

Отрезок OM равен

$$ON - x = \sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} - x,$$

а отрезок OM' равен

$$ON + x = \sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} + x.$$

Их произведение,

$$OM \cdot OM' = \left(\sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} - x\right) \times$$
$$\times \left(\sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} + x\right) = OA^2 - AM^2,$$

что и требовалось доказать.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович; М. И. Башмаков; В. Г. Болтянский; И. Н. Бронштейн; Н. Б. Васильев; И. Ф. Гинзбург; В. Г. Зубов; П. Л. Капица; В. А. Кириллин; В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*); А. И. Маркушевич; М. Д. Миллионщиков; Н. А. Патрикеева; Н. Х. Розов; А. П. Савин; И. Ш. Слободецкий; М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*); Я. А. Смородинский; В. А. Фабрикант

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климаков
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор Н. Я. Кришталь
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 22/IV 1971 г.
Подписано в печать 28/VI 1971 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,87. Тир.
Т-09671. Цена 30 коп. Заказ 817.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской обл.

КВАНТ для младших школьников

Еще несколько задач Васи Смекалкина

В. М. Розентуллер

1. Дан ряд целых чисел, который составлен по определенному математическому закону:

4, 7, 12, 21, 38, …

Продолжить ряд до получения восьмого числа.

2. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 624. Найти уменьшаемое, вычитаемое и разность, если разность меньше вычитаемого на 56.

3. Найти последние три цифры произведения всех натуральных чисел от 1 до 18.

4. Имеются два сосуда вместимостью в 3 *л* и 5 *л*. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 4 *л* воды?

5. В таблицу вписаны числа по некоторому правилу. Найти это правило и вписать недостающие числа.

а)

2	3	5	9		33

б)

1	5	6	11		28

6. В магазине имеется мастика в ящиках по 16 *кг*, 17 *кг* и 21 *кг*. Как получить одной организации 185 *кг* мастики, не вскрывая ящики? Найти все решения.

7. На доске было произведено действие умножения. Потом часть цифр стерли и заменили звездочками. Восстановить стертые цифры:

```
  ***
   *8
  ---
  ***
****
-----
****0
```

8. Ученик купил 4 книги. Все книги без первой стоят 42 коп., без второй — 40 коп., без третьей — 38 коп., без четвертой — 36 коп. Сколько стоит каждая книга?

9. В каких случаях месяц имеет 5 понедельников?

10. На столе лежат 15 карандашей. Двое берут по очереди один, два или три карандаша. Проигрывает тот, кому осталось взять один последний карандаш. Как должен играть начинающий игру, чтобы он заставил своего противника взять последний карандаш?

НОМЕР
9

В номере:

Вычислительные машины и системы счисления *Р. С. Гутер* 1
Беседа о принципе неопределенности *М. Я. Азбель* 7
М. В. Остроградский *И. А. Марон* 11
«Похожие» движения *Я. А. Смородинский* 15
Лунные дорожки *Л. Г. Асламазов* 18
Блеск в природе, или почему у кошки глаза светятся *С. А. Хейфец* 20
Может ли машина переводить! *В. В. Раскин* 25

Задачник «Кванта»

Задачи 31
Премии «Кванта» 33
Решения задач М61—М63 и Ф72—Ф74 *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* 34

Практикум абитуриента

Квадратный трехчлен *М. С. Атамукас* 41
Кинематика *И. А. Зайцев* 47
Шахматно-математические заметки *Е. Я. Гик* 52
История изобретения электрического конденсатора *А. К. Кикоин* 56

Рецензии. Библиография

Как видят невидимое *В. А. Лешковцев* 57

Уголок коллекционера

Марка и этикетка, посвященные М. В. Остроградскому *Н. Н. Колесников* 59
Логические кубики *Г. И. Копылов* 60
Ответы, указания, решения 62
«Квант» для младших школьников *3-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Вычислительные машины и системы счисления

Р. С. Гутер

Маленькую логарифмическую линейку можно положить в карман. Маленькая электронная вычислительная машина (например, «Проминь») имеет размеры письменного стола, а большая поместится не в каждой комнате. Еще больше различие в скоростях: настольная клавишная машина ВММ-2 выполняет около двухсот пятидесяти действий в час, машина БЭСМ-6 — около миллиона действий в секунду. Но при классификации вычислительных машин за основу принимаются не размеры и не скорость, а *принцип действия*. По принципу действия вычислительные машины делятся на *машины непрерывного действия* (иначе — *моделирующие*, или *аналоговые*) и *цифровые* (*дискретные*) *машины*.

Простейшую вычислительную машину непрерывного действия легко самостоятельно собрать в школьной физической лаборатории. Для этого достаточно взять любой источник постоянного тока и замкнуть его на сопротивление. Включив в цепь амперметр и вольтметр, как показано на рисунке 1, мы получим машину для умножения и деления.

Действительно, ток в такой цепи подчиняется известному закону Ома: $I=\frac{U}{R}$. Зная напряжение U и сопротивление R, мы можем по показаниям амперметра находить частное I от деления U на R. Зная ток и сопротивление, по показаниям вольтметра можно получать произведение $U=IR$.

Этот элементарный пример хорошо разъясняет странное, на первый взгляд, утверждение: вычислительные машины непрерывного действия на самом деле не выполняют никаких вычислений. Они лишь воспроизводят (моделируют) процесс, который описывается данной функцией, уравнением или системой.

Числа представляются здесь физическими величинами, которые могут изменяться непрерывно. Это могут быть ток или напряжение в электрической цепи, температура, давление, длина отрезка, угол поворота вала и т. п. Точность такой машины определяется точностью

Рис. 1.

физических приборов, измеряющих соответствующие величины.

Совсем иначе представляется число в цифровой машине. Тут оно записывается в своей обычной числовой форме и, следовательно, требует использования некоторой определенной *системы счисления*.

Для изображения каждого разряда числа в цифровой машине отводится специальный элемент, имеющий определенное число различных устойчивых состояний. Например, в обычных русских счетах (которые являются более близкими родственниками современных вычислительных машин, чем логарифмическая линейка) для изображения цифры каждого разряда отводится спица с надетыми на нее десятью косточками. Точность записи числа на счетах определяется количеством разрядов числа, а значит — количеством имеющихся на раме спиц.

К цифровым машинам относятся также арифмометры и клавишные вычислительные машины. В них для изображения каждого разряда числа используется шестеренка с переменным числом зубцов, которая может находиться в одном из десяти различных устойчивых состояний, в зависимости от угла поворота шестерни на валу, или ступенчатый валик, также с десятью возможными состояниями.

Во всех упомянутых случаях речь идет о десяти состояниях каждого элемента. Легко сообразить, что это связано с десятичной системой счисления: в каждой позиционной системе счисления *количество различных знаков* (цифр), *требующихся для изображения числа, равно основанию системы*. Мы видим здесь, что система счисления предъявляет свои требования к конструкции вычислительной машины. Удовлетворить этим требованиям нетрудно: на спицу счет можно надеть любое количество косточек или на шестерне нарезать любое нужное количество зубцов.

Но бывает и так, что машина предъявляет свои требования к системе счисления. Скажем, для электрических, релейных и электронных элементов характерным является наличие двух устойчивых состояний. Например, электромеханическое реле может быть замкнуто или разомкнуто (как и обычный выключатель), конденсатор — заряжен или разряжен, электронная лампа — проводит или не проводит ток (открыта или заперта), ферритный сердечник намагничен в одном или противоположном направлении и т. п. Использование таких элементов требует обращения к системе счисления, в которой достаточно двух цифр. Такова *двоичная система счисления*: позиционная система с основанием *два*.

В такой системе единица каждого следующего разряда вдвое больше единицы предыдущего. Поэтому число «два» изображается как 10, число «четыре», как 100, а «восемь» — как 1000.

Вот как выглядят некоторые числа в двоичной системе:

Десятичные числа	Двоичные числа	Десятичные числа	Двоичные числа
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1 000
4	100	50	110 010
5	101	100	1 100 100

Преимущества двоичной системы для вычислительных машин не исчерпываются тем, что она позволяет непосредственно использовать элементы с двумя устойчивыми состояниями. Для построения вычислительной машины имеет значение суммарное число различных устойчивых состояний всех элементов. И в этом отношении двоичная система счисления оказывается более выгодной, чем десятичная. Действительно, для записи, например, целых чисел в интервале $1 \leqslant N \leqslant 999$ в десятичной системе достаточно трех элементов (по одному для каждого разряда), с десятью состояниями каждый. Всего мы получим 30 возможных состояний. В двоичной системе потребуется десять элементов, так как $2^9 = 512 < 999$, а $2^{10} = 1024 > 999$, но зато всего лишь по два состояния, то есть всего 20 возможных состояний.

Еще одно достоинство двоичной системы связано с особенностями арифметических действий. Во всех позиционных системах счисления арифметические действия над многозначными числами сводятся к действиям над однозначными, поэтому для их выполнения достаточно знать таблицы сложения и умножения однозначных чисел. В двоичной системе такие таблицы предельно просты:

$0+0=0 \qquad 0\times0=0$

$0+1=1+0=1 \qquad 0\times1=1\times0=0$

$1+1=10 \qquad 1\times1=1$

Так как здесь нет иных цифр, кроме нуля и единицы, то умножение многозначных чисел сводится лишь к сдвигу чисел и сложению. Таким образом, основой арифметического устройства вычислительной машины, работающей в двоичной системе счисления, является *многоразрядный двоичный сумматор*, осуществляющий сложение двух многозначных двоичных чисел. С его же помощью выполняются и все остальные арифметические операции. В свою очередь, многоразрядный сумматор может быть составлен из одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых предназначен для сложения элементов одного разряда.

Такой одноразрядный двоичный сумматор должен иметь три входа: на два из них поступают значения соответствующих разрядов двух слагаемых, а третьим является возможный перенос в данный разряд из младшего. Выходов у этого сумматора должно быть два: один из них — сумма, которая должна получиться в данном разряде, а второй — возможный перенос из данного разряда в старший. Двоичный одноразрядный сумматор изображают на схемах так, как показано на рисунке 2. Многоразрядный двоичный сумматор легко составить из нужного количества одноразрядных (рис. 3).

Каждая цифра, подаваемая на любой вход одноразрядного двоичного сумматора, может быть либо нулем, либо единицей. Так как всех входов три, то всего возможно восемь (2^3) различных комбинаций. Для любой такой комбинации сумматор должен

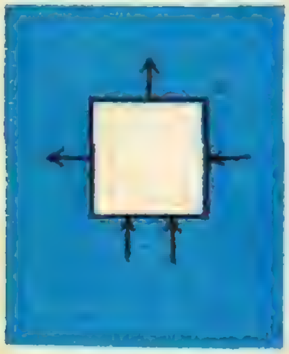


Рис. 2.

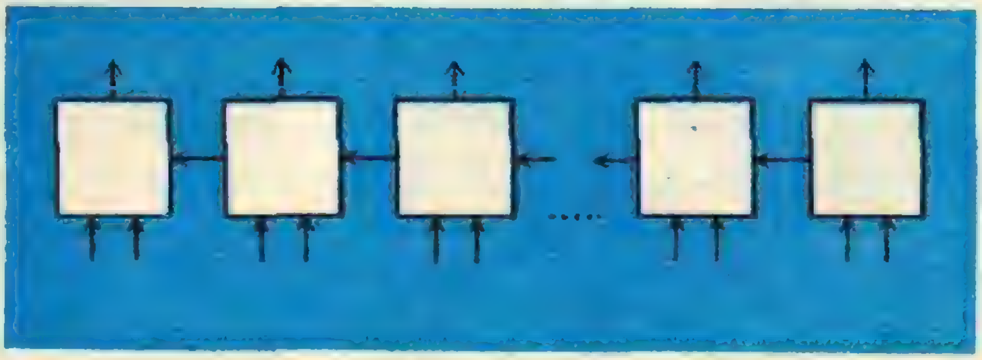


Рис. 3.

давать определенные цифры на выходе. При этом все входы равноправны и значения выходов определяются не тем, что подается на тот или иной вход, а общим количеством единиц, подающихся на входы.

Например, если на вход подаются две единицы и один нуль, то на выходе сумматор должен дать нуль в качестве цифры суммы в данном разряде и единицу переноса в старший разряд ($1+1+0=10$), независимо от того, будет ли нуль на входе переносом из младшего разряда или цифрой одного из слагаемых. Поэтому работу двоичного одноразрядного сумматора можно описать приведенной ниже таблицей. В ней A и B означают входы, на которые подаются цифры соответствующего разряда первого и второго слагаемых, C — выход, содержащий цифру данного разряда в сумме, а Z_1 и Z_2 — переносы соответственно из младшего разряда в данный (вход) и из данного разряда в старший (выход). Проверьте самостоятельно правильность приведенных результатов.

Таблица работы одноразрядного двоичного сумматора

Входы			Выходы	
A	B	Z_1	C	Z_2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0		
0	0	1		
1	1	0	0	1
1	0	1		
0	1	1		
1	1	1	1	1

Прежде, чем рассматривать схемы, дающие возможность осуществить работу сумматора в соответствии с приведенной таблицей, познакомимся с так называемыми *логическими* операциями *), определенными на множестве из двух элементов: 0 и 1.

1. Операция «или» (ее называют также *логическим сложением*). Результат этой операции равен единице, если единице равно хотя бы одно слагаемое. Обозначая эту операцию знаком $\vee$, получим таблицу:

$$0\vee 0=0,\quad 0\vee 1=1\vee 0=1,\quad 1\vee 1=1.$$

2. Операция «и» (иначе — *логическое умножение*). Ее результат есть единица, если оба сомножителя — единицы. Эту операцию обозначают $\wedge$:

$$0\wedge 0=0,\quad 0\wedge 1=1\wedge 0=0,\quad 1\wedge 1=1.$$

3. Операция отрицания обозначается знаком $\neg$. Она переводит единицу в нуль и наоборот:

$$\neg 0=1,\quad \neg 1=0.$$

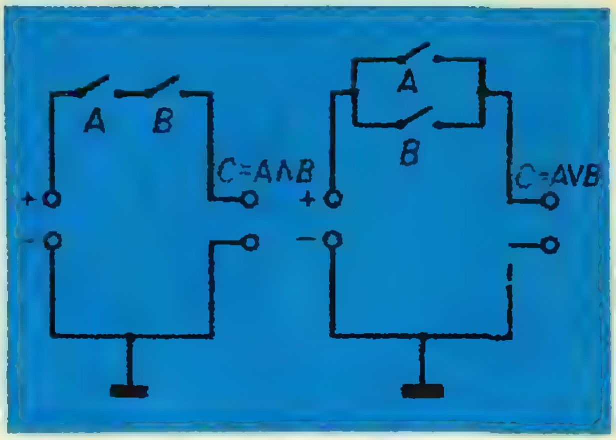


Рис. 4.

Для реализации операций $C=A\vee B$ и $C=A\wedge B$ легко построить простые *контактные схемы* (рис. 4). Здесь значение 1 для A и B выражается замкнутым контактом, а 0 — разомкнутым. Для C значению 1 соответствует наличие напряжения в указанном месте схемы, а 0 — отсутствие напряжения. Ясно, что для операции «и» ток через точку C пойдет тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта, а для операции «или» — когда замкнут хотя бы один.

Употребительны схемы и других типов. Например, для логического сложения и умножения легко составить диодные схемы, в которых значение 1 характеризуется наличием в соответствующей точке высокого потенциала относительно земли, а значение 0 — отсутствием потенциала.

На рисунке 5 показана диодная *схема совпадения*, осуществляющая операцию «и», на рисунке 6 — *собирающая схема*, осуществляющая операцию «или». В них используются полупроводниковые диоды, проводящие ток лишь в одном направлении, показываемом направлением сторон треугольника. Вместо них можно было бы использовать электронную лампу — диод с двумя электродами, которая пропускает ток лишь от анода к катоду.

Если приложить высокий положительный потенциал в точках A и B схемы совпадения (рис. 5), то оба диода окажутся запертыми и в точке C мы получим высокий потенциал $+E$ относительно земли. Это соответствует

---

*) См., например, «Квант» № 4, 1971, стр. 14.

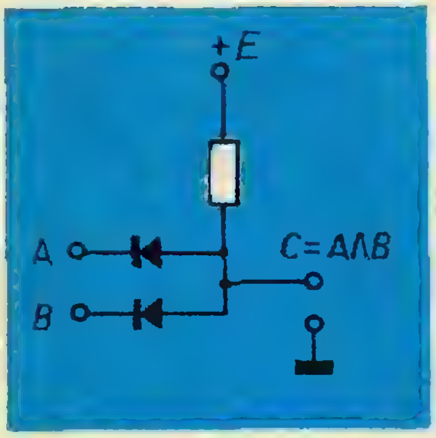


Рис. 5.

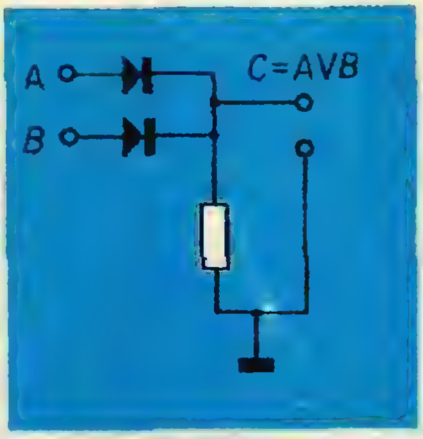


Рис. 6.

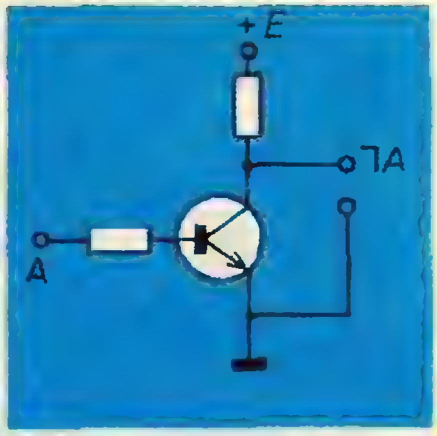


Рис. 7.

равенствам $A=B=1$ и $C=1$. Если же хотя бы в одной из точек A или B высокий потенциал отсутствует, то есть $A=0$ или $B=0$, то соответствующий диод будет открыт, ток пройдет через него и потенциала в точке C не будет, то есть мы получим $C=0$.

Аналогично работает и собирающая схема (рис. 6). Если хотя бы в одной из точек A или B приложен высокий потенциал, то он же будет и в точке C, то есть получится $C=1$. Отсутствие потенциала в точке C, то есть значение $C=0$ получится только в том случае, когда $A=B=0$.

Схему для операции отрицания (*инвертор*) оказывается нельзя собрать из одних диодов — здесь необходим *триод*: электронная лампа с тремя электродами, имеющая, кроме анода и катода, еще *управляющую сетку*. Полупроводниковый триод — *транзистор* — также имеет три контакта: *эмиттер*, *коллектор* и *базу*. Транзистор проводит ток лишь в одном направлении (это направление указывается на схеме стрелкой); база играет роль управляющей сетки: при подаче на нее соответствующего потенциала транзистор отпирается (проводит ток), а без него — запирается. Сказанного достаточно для понимания работы инвертора (рис. 7).

Обладая элементами, осуществляющими три описанные здесь операции, можно построить схему двоичного одноразрядного сумматора, работающего в соответствии с приведенной выше таблицей. Одна из возможных схем сумматора изображена на рисунке 8. Ее составными элементами являются инвертор, собирающие схемы и схемы совпадения. Все они изображены на схеме в виде прямоугольников, в которых написаны сокращенные наименования осуществляемых ими операций.

Рассмотрев последовательно работу всех этих элементов, легко убедиться, что для всех возможных комбинаций входных данных выходы будут соответствовать указанным в таблице. Для облегчения такой проверки на рисунке 8 рассмотрен случай $A=1$, $B=0$, $Z_1=1$, для чего у всех входов и выходов отдельных элементов схемы поставлены соответствующие цифры. На выходе получается $C=0$ и $Z_2=1$, что и должно быть.

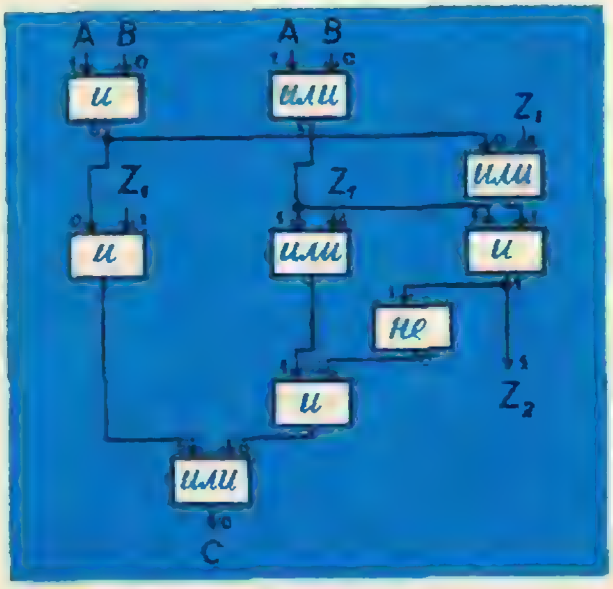


Рис. 8.

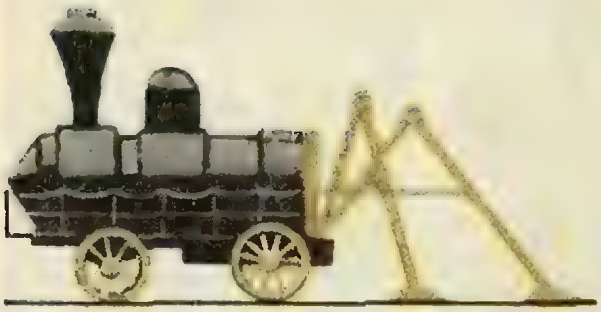


Рис. 9.

Вычислительные машины, работающие в позиционной системе счисления, можно сказать, имитируют поведение человека, считающего «столбиком». В сущности, все машины начинались с подражания виденному, живому: первые «самодвижущиеся повозки» были с «ногами» (рис. 9), а первые летательные аппараты пытались делать с машущим крылом. Не исключено, что будущие, более совершенные вычислительные машины будут работать с совсем иными системами счисления. Пока трудно сказать, каковы должны быть такие системы, но попытки искать новые принципы уже делаются, и об одной из них мы сейчас расскажем.

Недостатком позиционных систем счисления (при использовании их в машинах) являются межразрядные связи, задерживающие выполнение операций: для получения окончательного результата в каком-либо разряде нужно, чтобы предыдущий (младший) разряд был уже обработан. Непозиционные же системы (в других отношениях, как известно, менее удобные) позволяют работать с каждым «разрядом» независимо и отдельно.

Одним из возможных способов представления натуральных чисел, который можно рассматривать как «непозиционную систему счисления», является *система остаточных классов.* В системе остаточных классов число представляется своими остатками от деления на выбранную систему оснований («модулей).

При выборе одного модуля p различными остатками от деления на p обладают p целых чисел, взятых подряд из натурального ряда. Если же модулей несколько, то возможный диапазон чисел, обладающих различными представлениями, расширяется.

Принимая соответствующие остатки за знаки изображения числа, мы получаем непозиционную систему счисления, разрядами которой являются остатки по каждому модулю в отдельности. Цифрами в каждом разряде служат различные остатки, меньшие модуля. Чем большим выбран данный модуль, тем больше диапазон представляемых чисел и тем больше возможных значений остатков (цифр в данном разряде). Вместе с тем, все разряды числа в такой системе счисления совершенно независимы друг от друга.

Арифметические действия в такой системе выполнять очень просто. Например, остаток от деления суммы двух чисел на данный модуль p равен сумме остатков, образованных отдельными слагаемыми, если эта сумма меньше p, либо на p меньше этой суммы. Аналогичное правило верно и для операции умножения.

Рассмотрим в качестве примера систему остаточных классов, определяемую тремя модулями $p_1=7$, $p_2=9$, $p_3=10$. Число n в этой системе будем записывать в виде (a, b, c), где a, b, c — соответственно остатки от деления n на p_1, p_2, p_3. Такое представление определяет однозначно натуральные числа в диапазоне $0 \leqslant n \leqslant 629$, причем возможные значения a, b, c заключены в пределах $0 \leqslant a \leqslant 6$, $0 \leqslant b \leqslant 8$, $0 \leqslant c \leqslant 9$. Например:

$5=(5, 5, 5)$; $20=(6, 2, 0)$;

Арифметические действия:

$$(3, 2, 1)+(1, 4, 4)=(4, 6, 5);$$
$$(2, 5, 3)\times(2, 7, 6)=(4, 8, 8).$$

(В десятичной системе эти равенства переходят соответственно в $101+274=375$, $23\times16=368$.)

Мы вовсе не утверждаем, конечно, что именно арифметика остаточных классов непременно найдет применение при создании новых вычислительных машин (хотя бы по той причине, что при этой системе затруднено сравнение чисел, нужное для многих целей). Но она представляет простой и поучительный пример связи «абстрактных» (и несколько «старомодных» и вполне традиционных) теоретико-арифметических закономерностей с «чисто техническими» проблемами современной машинной математики.

Беседа о принципе неопределенности

М. Я. Азбель

Во втором номере нашего журнала за 1971 год была напечатана статья М. Я. Азбеля «Диалог о температуре» Статья вызвала много откликов читателей. Во всех письмах говорилось о том, что статья интересна. Однако в статье было много опечаток, за которые редакция и автор приносят свои извинения. В письмах читатели ставили очень интересные вопросы Поэтому мы решили не давать просто список опечаток, а попросить автора продолжить разговор с читателем.

Автор. Я никак не ожидал, что редакция поможет мне превратить воображаемый диалог с читателем в реальный, и даже не диалог, а беседу. Вот что пишет читатель Володя Маргулис из Саранска.

В. Маргулис. В вашей статье «Диалог о температуре» содержится, мне кажется, множество опечаток Постоянные Больцмана и Планка завышены на два порядка, заряд электрона — на порядок и так далее

Автор. Вы совершенно правы. Открою вам профессиональный секрет: как и многие физики-теоретики, я помню только одну систему единиц: CGSE. В ней были проведены все оценки и приведены константы в моей статье: постоянная Планка $h \approx 6{,}5 \times 10^{-27}$ *эрг·сек*, постоянная Больцмана $k \sim 10^{-16}$ *эрг/град*, заряд электрона $e \sim 5 \cdot 10^{-10}$ ед. CGSE. (Напомню, что нас интересует только порядок величины!)

Однако в статье, вышедшей в журнале, все вычисления оказались в системе СИ и притом в «деформированном виде». Это, конечно, неприятно, но большой беды тут нет Каждому читателю-школьнику, которому положено знать системы единиц, будет полезно проделать расчеты и вернуть им правильный вид. Полезно и поучительно. Дело в том, что описки и опечатки в научных статьях — явление нередкое, и надо учиться относиться к ним без волнения, исправляя по мере надобности.

В. Маргулис. Я так и поступил, но правильный расчет дал для электронов потенциальную энергию на два порядка меньше кинетической. А для гелия потенциальная энергия оказалась значительно больше кинетической! *)

---

*) Для тех, кто не читал статьи «Диалог о температуре», поясню, о чем идет речь Из так называемого принципа неопределенности следует, что наименьшее возможное значение импульса $p_{\min}$ частицы, сосредоточенной в области, размеры которой порядка a. $p_{\min} \sim \frac{h}{a}$. Отсюда наименьшая возможная кинетическая энергия $E_{\text{кин}} \sim \frac{p^2_{\min}}{2m} \sim \frac{h^2}{2ma^2}$, где m — масса частицы

Автор. Вас подвела очередная опечатка. Во всех формулах статьи правильнее писать постоянную Планка h, а не $h=\frac{h}{2\pi}$. Поэтому кинетическая энергия нулевых колебаний в гелии порядка

$$\frac{h^2}{2ma^2}\sim 2\cdot 10^{-15}\ \textit{эрг}\sim 20^\circ\mathrm{K}$$

(поскольку $m\sim 10^{-23}$ *г*, $a\sim 3\cdot 10^{-8}$ *см*). Эта величина всего в 5 раз превышает действительную, несмотря на грубость оценки.

Расчет потенциальной энергии взаимодействия атомов гелия я не производил, так как этого нельзя сделать, исходя из общих соображений.

В. Маргулис. Теперь мне ясна также ситуация с электронным газом. По формуле $E_{\min}\sim\frac{h^2}{2ma^2}$ при $a\sim 3\cdot 10^{-8}$ *см* получается около $2\cdot 10^{5\circ}$ К. А поскольку a может меняться, оценка имеет смысл только по порядку величины. Электронный газ действительно имеет энергию в десятки, даже сотни тысяч градусов.

Автор. Совершенно верно. Должен в заключение сказать, что мне очень понравилось ваше письмо. С удовольствием желаю вам успехов в продвижении к науке. И еще — прошу прощения и у вас, и у всех остальных участников нашей беседы за превращение их писем в реплики.

Читатель М. Мохнаткин (Саратов). А меня вы еще не убедили. Ведь согласно принципу неопределенности

$$\Delta p_x\cdot\Delta x=h,$$

а не $\Delta p\cdot\Delta x=h$, как написано в «Диалоге». Значит, поскольку $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$, приведенное значение минимальной энергии следует утроить!

Автор. Если бы в соотношении неопределенности стоял знак равенства, вы были бы совершенно правы. Но очень важно помнить: речь идет только о порядке величины. Допустим, для определенности, что наибольшим из Δp_x, Δp_y, Δp_z является Δp_x. Тогда для $\Delta p=\sqrt{(\Delta p_x)^2+(\Delta p_y)^2+(\Delta p_z)^2}$ получаем $\Delta p_x\leqslant\Delta p\leqslant\Delta p_x\sqrt{3}$, так что заведомо $\Delta p\sim\Delta p_x$ и $\Delta p\Delta x\sim h$.

При вычислениях порядков величин важно не превышать точности расчета, «уточняя» коэффициенты — это может только ухудшить дело. Такие расчеты очень полезны, но они не могут дать больше того, на что рассчитаны — ошибка в десять раз естественна.

В частности, для свободной частицы, «запертой» в сферическом ящике диаметра a, точный расчет дает как раз

$$E_{\min}=h^2/2ma^2$$

Читатель В. Рубин (Москва). А почему вы в случае электронного газа говорите о кулоновском взаимодействии? Ведь электроны сами по себе никак не могли бы образовать кристалл — они отталкиваются друг от друга!

Автор. Конечно. Поэтому я говорил об электронах в металле. Там им не дают разлететься положительные ионы. К взаимодействию с ними и относился расчет. А кулоновским взаимодействие было взято по следующей причине. Само по себе электростатическое взаимодействие является классическим. Пусть на каждый атом приходится один свободный электрон, так что единственное характерное расстояние задачи — межатомное (точнее, межионное) расстояние a, и нас интересует расстояние только такого порядка. Тогда единственная величина, имеющая размерность энергии, которую можно сконструировать из a и заряда электрона e, есть $\frac{e^2}{a}$.

Конечно, такая запись верна только по порядку величины и только на таких расстояниях. На бо́льших расстояниях разноименные заряды экранируют друг друга, и взаимодействие быстро убывает с расстоянием.

В. Рубин. Еще один вопрос. Почему, если у вас для электрона в ядре получается скорость, превышающая световую, вы все-таки используете нерелятивистские формулы?

Автор. Потому что мне хотелось показать: в нерелятивистской квантовой механике наличие «запертых» электронов в ядре приводило бы к неприятностям. А это наводит на мысль, что, вероятно, они там не могут быть заперты. Однако вы, конечно, правы: подобное рассуждение не есть доказательство.

Коль скоро об этом зашла речь, давайте произведем более аккуратный расчет. Используя опять принцип неопределенности, получаем порядок минимального импульса $p_{\min}$ электрона, «запертого» в ядре радиуса R, $p_{\min} \sim \frac{h}{R}$. По теории относительности $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (m_0 — масса покоя частицы, v — ее скорость). «Наш» импульс $p_{\min} \gg m_0 c$. Это означает, что $v \approx c$ и $p \approx mc$ (m — масса релятивистского электрона). Значит, для электрона, «запертого» в ядре, $m \sim \frac{h}{R_c}$, что дает величину порядка массы покоящегося протона. Следовательно, близость массы ядра к сумме масс только протонов и нейтронов означает отсутствие электронов, «запертых» в ядре: попав в ядро, они с легкостью вырываются оттуда.

Вы видите, сколь существен размер области, в которой сосредоточены частицы. Эта область может либо строго ограничивать их движение, как ядро — движение протонов и нейтронов или атом — движение электронов, либо быть характерной лишь с точки зрения принципа неопределенности.

Читатель А. Петров (Ленинград). Если среднее расстояние между частицами a, то $\Delta x \geqslant a$ и возможно даже $\Delta x = L$, где L — размер системы. Значит, $p_{\min} \sim \frac{h}{L}$!

Автор. Совершенно верно. Мы оцениваем характерную энергию, а она определяется средним расстоянием a. Наименьшая же возможная энергия есть $\frac{h^2}{2mL^2}$, причем возможны и промежуточные значения энергии, соответствующие $a < \Delta x < L$.

Поясню это замечание подробнее. Среднее расстояние между электронами в металле a определяет характерное расстояние в принципе неопределенности и характерную энергию нулевых колебаний, оценивавшуюся нами. Однако, в принципе, отдельные электроны могут находиться в редко встречающихся состояниях, оказываясь друг от друга на расстоянии порядка размеров системы L. В соответствии с этим минимальная кинетическая энергия (энергия нулевых колебаний), которую имеет очень небольшое число электронов, порядка $\frac{h^2}{2mL^2}$, то есть крайне мала.

И здесь уже проявляется кардинальное отличие фермиевских и бозевских частиц.

Поскольку бозевские частицы могут в любом состоянии собираться в неограниченном количестве, при очень низких температурах они начнут скапливаться именно в состояниях с ничтожной энергией — начинается так называемая конденсация Бозе — Эйнштейна в пространстве энергий.

Сказанного достаточно, чтобы получить основные характеристики Бозе-газа. Начнем с рассмотрения теплового излучения, сосредоточенного в полости нагретого тела (и находящегося в равновесии с этим телом). Так как тепловое излучение состоит из квантов электромагнитных волн (фотонов), число которых в единице объема определяется температурой излучающего их нагретого тела, единственной энергетической характеристикой оказывается температура. Поэтому средняя энергия фотона ε порядка kT. Теперь у нас задано не размытие расстояния, а тепловое размытие энергии. Перепишем принцип неопределенности в несколько ином виде, введя характерное время Δt:

$$h \sim \Delta p \Delta x \sim \frac{\Delta p}{\Delta t} \Delta x \Delta t.$$

Но изменение импульса за данное время есть произведение силы на время ее действия: $\Delta p = F \Delta t$. Значит, $\frac{\Delta p}{\Delta t} \Delta x = F \Delta x$ есть работа силы на пути Δx, то есть, согласно закону сохранения энергии, изменение энергии ΔE. Таким образом,

$$\Delta E \Delta t \sim h$$

(очень важная форма принципа неопределенности).

Для фотонов $\Delta E \sim \varepsilon$, а величина Δt — порядка времени τ, характеризующего период колебаний фотонов. Поэтому $\varepsilon\tau \sim h$ и $\varepsilon \sim h\nu\left(\nu = \frac{1}{\tau}\right)$.

Из полученного равенства, учитывая, что $\varepsilon \sim kT$, находим период колебаний $\tau = \frac{1}{\nu} \sim \frac{h}{kT}$ и длину волны λ (расстояние, проходимое волной, движущейся со скоростью света c за период колебания τ):

$$\lambda = c\tau \sim \frac{ch}{kT}.$$

Длина волны определяет характерное расстояние, «приходящееся на квант» *). Соответствующий объем есть λ^3, так что число фотонов в единице объема порядка

$$\lambda^{-3} \sim \left(\frac{kT}{ch}\right)^3.$$

Полная же их энергия в единице объема, то есть плотность энергии теплового излучения,

$$E_1 \sim kT \cdot \lambda^3 \sim \frac{(kT)^4}{(ch)^3}.$$

Мы получили знаменитую формулу Стефана — Больцмана! Точная формула отличается коэффициентом $\frac{\pi^2}{20} \approx \frac{1}{2}$.

А теперь перейдем от макромира газов к микромиру ядра. Попробуем оценить порядок величины ядерных сил, ничего не зная о них, кроме того, что радиус ядра $R \sim 10^{-12}$—10^{-13} *см*, и оно состоит из взаимодействующих между собой протонов и нейтронов. Кинетическая энергия порядка $\frac{h^2}{MR^2}$. А так как ядро не разваливается и не сжимается, а удерживается в равновесии ядерными силами, потенциальная энергия взаимодействия должна быть порядка кинетической!

Вот мы и добрались до энергии в тысячи миллиардов (10^{12}) градусов. Не забывайте только, что это именно энергия, измеренная в градусах, а отнюдь не температура частиц в ядре!

А разница масс ядерных частиц — протона и нейтрона — порядка массы электрона m_e. (Это не случайно, поскольку нейтрон может превращаться в протон и электрон.) Значит, связанная с зарядом энергия порядка m_ec^2, то есть «всего» порядка 10^{10} градусов и значительно меньше энергии ядерного взаимодействия. Поэтому ядерные силы практически не зависят от заряда, а говорить о нейтронах и протонах в ядре как об отдельных частицах не имеет смысла, и их называют просто «нуклонами».

А какова скорость ядерных частиц? В нерелятивистской механике $\frac{Mv^2}{2} \sim \frac{h^2}{MR^2}$ и $v \sim \frac{h}{MR}$. Получается скорость порядка скорости света! Более точная оценка приводит к $v \sim 0{,}1\ c$, поэтому во многих случаях для частиц в ядре в грубом приближении удается ограничиться нерелятивистской теорией.

Как видите, понимание фундаментальных физических законов дает фундаментальные физические следствия, из которых мы затронули лишь малую часть.

Упражнения

1. Определите зависимость давления от плотности частиц (их числа в единице объема) в идеальном фермиевском газе *) при низких температурах. Получите уравнение состояния такого газа (с точностью до численного множителя). Сравните его с уравнением состояния классического газа.

2. Найдите критерий квантовости идеального фермиевского газа.

3. Определите зависимость от температуры теплоемкости бозевского газа при низких температурах.

4. Найдите критерий классичности и квантовости бозевского газа.

5. Оцените размер атома водорода.

6. Зная, что связь атомов в жидкостях и кристаллах определяется в основном электростатическим взаимодействием, оцените расстояние между атомами.

---

*) Конечно, это утверждение выглядит не очень убедительным, но оно оказывается правильным, а потому просто примите его на веру.

*) См. «Диалог о температуре».

И. А. МАРОН

М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ

(К 170-летию со дня рождения)

По-разному складываются судьбы научных идей и открытий.

Одни, заинтересовав поначалу современников, умирают еще при жизни их автора. Другие, просуществовав многие годы, все же, в конце концов, морально устаревают и заменяются новыми, более оригинальными, более целесообразными. Третьи, как бы оказываются неподвластными времени. Им нет износа. Таким завидным запасом прочности и долговечности обладает научное и педагогическое наследие выдающегося русского математика и просветителя Михаила Васильевича Остроградского.

М. В. Остроградский родился 24 сентября 1801 года в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии (теперь Козельщанский район Полтавской области УССР) в семье небогатого помещика.

В 1816 году он поступил на физико-математическое отделение Харьковского университета и вскоре стал удивлять всех своими необыкновенными успехами в изучении математики. На Остроградского обратил внимание ректор университета, профессор Т. Ф. Осиповский — талантливый математик и выдающийся педагог. Он приблизил к себе многообещающего юношу и руководил его занятиями.

В октябре 1818 года Остроградский окончил Харьковский университет, а в 1820 году он успешно сдал экзамены на звание кандидата наук, и перед ним, казалось, открывалась прямая дорога к университетской профессуре.

Однако ученой степени Остроградский не получил, и причиной тому послужила острая идейная борьба, развернувшаяся в Харьковском и других университетах России, вызванная наступлением реакции в последние годы царствования Александра I. Первыми жертвами реакции стали просвещение и университеты.

Мракобесы разных мастей и рангов — от попечителей учебных округов, которым подчинялись университеты, до проходимцев, захвативших там кафедры, ополчились на все передовое и прогрессивное. Разумеется, в таких условиях профессор Осиповский — любимец передового студенчества, человек откровенно материалистических убеждений — пришелся не ко двору. Его уволили в отставку, одновременно нанеся удар и по его единомышленникам и поклонникам. Одному из первых досталось лучшему ученику Осиповского — Остроградскому, на которого донесли, что он не посещал лекций по философии и по обязательному для всех студентов «богопознанию и христианскому учению». На этом ничтожном, надуманном основании ему не только отказали в присуждении степени кандидата наук, но и лишили его диплома об окончании университета. Это было неслыханным глумлением над будущим ученым, чей талант был замечен уже тогда.

К счастью, мракобесам не удалось погубить талант Остроградского. Наоборот, в нем сильно укрепилась любовь к математике, и он решает продолжить свои занятия в Париже под руководством выдающихся математиков Политехнической школы — детища французской революции. Он приезжает туда в мае 1822 года. В политехнической школе, Сорбонне, коллеж де Франс он слушает лекции знаменитых ученых: Коши, Фурье, Лапласа, Монжа, Пуассона, Лежандра, Штурма, Понселе, Бине и других, пролагавших новые пути в математическом анализе, математической физике и механике. Изучив и усвоив результаты, достигнутые французской математической школой, Остроградский и сам стал заниматься важными и актуальными вопросами того времени, часто опережая своих парижских коллег. В 1826 году русский ученый представил Парижской Академии наук свою первую научную работу — «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», высоко оцененную Коши и напечатанную в трудах Академии. О научном значении этой работы можно судить хотя бы по тому, что еще в 1816 году Академия объявила специальный конкурс на ее решение.

В 1824—1827 годах Остроградский представил еще несколько мемуаров. Эти работы укрепили научную репутацию молодого ученого и завоевали ему дружбу и уважение многих французских математиков.

Но Михаила Васильевича неумолимо тянет на родину, где об его успехах хорошо знали. Недаром молодых людей, отправлявшихся учиться за границу, родные и близкие напутствовали словами: «Становись Остроградским».

В 1828 году он выехал в Россию. Тяжелой была эта поездка. В дороге его обокрали, и ему пришлось от Франкфурта-на-Майне до Петербурга добираться пешком. «Русский пешеход», пробирающийся к тому же из-за границы, выглядел весьма подозрительным, и мнительные власти, которым везде чудились восстания декабристов, установили за ним тайный полицейский надзор. Вероятно, об этом Остроградский не знал до конца своих дней.

Сразу же после приезда Остроградского в Петербург началась его плодотворная работа в Академии наук и кипучая педагогическая деятельность. Академия наук высоко оценила научную деятельность Остроградского: в августе 1830 года его избрали экстраординарным, а через год — ординарным академиком по прикладной математике. С этого времени его жизнь была полна творческих удач, и деятельность его отмечалась присвоением ряда почетных ученых званий. Так, в 1834 году он был избран членом Американской Академии наук, в 1841 году — членом Туринской Академии, в 1853 году — членом Римской Академии Линчей и в 1856 году — членом-корреспондентом Парижской Академии.

Научные интересы Остроградского определились рано, еще до отъезда в Париж. В объяснении совету Харьковского университета Остроградский еще в 1820 году писал, что желает «усовершенствовать себя по части наук, относящихся к прикладной математике». И действительно, многие свои труды он посвятил математической физике и механике, заложив вместе с Лапласом, Пуассоном, Фурье, Коши, Якоби, Гамильтоном фундамент этих наук.

По математической физике Остроградский написал 15 работ. Бо́льшая часть их относится к задачам распространения тепла, теории упругости и гидродинамики. Наибольшее научное значение имеют его работы по теории теплоты. Эти исследования, помимо того, что содержат важнейшие результаты, относящиеся непосредственно к теории распространения тепла, имеют огромное общематематическое значение, поскольку в них, с одной стороны, заложены начала для ряда важных теорий, развивающихся и в наше время, а с другой стороны, в них получены теоремы, являющиеся одним из центральных результатов математического анализа.

Первым из русских ученых Остроградский стал заниматься аналитической механикой. Его труды по механике, включая «Лекции по аналитической механике» и «Курс небесной механики», явились фундаментом, на котором строилась и развивалась русская школа в области механики. Работы Остроградского по математическому анализу в большинстве случаев вызваны его исследованиями по математической физике и механике: они дают решение математических вопросов, поставленных теоретическим естествознанием того времени. Так, в связи с исследованиями вопросов распространения тепла в твердом теле он получил знаменитую формулу, вошедшую теперь во все учебники математического анализа под именем формулы Остроградского — Грина. В настоящее время эта формула играет огромную роль в математической физике, векторном анализе и других разделах математики и ее приложений. Не будет преувеличением сказать, что Остроградский внес выдающийся вклад и в область математического анализа. Его результаты вошли в современную математику в качестве существенной и неотъемлемой ее части и представляют собой то необходимое оружие, без которого математика уже не может обойтись.

В круг интересов Остроградского входили также и алгебра, и теория чисел, и теория вероятностей. По словам Н. Е. Жуковского, «в творениях М. В. Остроградского нас привлекает общность анализа, основная мысль, столь же широкая, как широк простор его родных полей».

Остроградский оказал неоценимую услугу русской науке, воспитав целую плеяду талантливых учеников, ставших впоследствии выдающимися представителями русской науки. В числе его учеников были: И. А. Вышнеградский — основоположник теории автоматического регулирования; Н. П. Петров — создатель гидродинамической теории смазки и автор классических исследований по теории механизмов; А. Н. Тихомандрицкий, Е. И. Бейер, Д. М. Деларю, Е. Ф. Сабинин — известные профессора математики, и многие другие математики и выдающиеся инженеры.

Замечательной чертой передовых представителей русского естествознания вообще и математиков в частности являлось то, что они были не только новаторами в науке, смелыми мыслителями, но и учителями в широком смысле этого слова; они не замыкались в круг своих научных интересов, а значительную часть времени и сил отдавали делу просвещения.

Прогрессивное значение педагогической деятельности русских математиков заключается не только в их личном преподавании, а в том, что они принимали активное участие в общем педагогическом движении и оказали существенное влияние на развитие математического просвещения и культуры в России. Педагогическая деятельность М. В. Остроградского в этом отношении особенно характерна.

Человек своего времени, смелый мыслитель и блестящий лектор, он много и плодотворно работал на педагогическом поприще. В разные годы он преподавал в Офицерских классах при Морском кадетском корпусе, открытых по инициативе известного мореплавателя и ученого И. Ф. Крузенштерна; был профессором Института корпуса инженеров путей сообщения, лучшего в то время технического учебного заведения страны (ныне Ленинградский институт железнодорожного транспорта); читал курс лекций на физико-математическом отделении Главного педагогического института, в стенах которого учились Д. И. Менделеев, Н. А. Добролюбов, И. А. Вышнеградский. Он преподавал с 1841 года в Офицерских классах Главного артиллерийского и Главного инженерного училищ. Остроградский до конца своей жизни оставался профессором всех этих учебных заведений. Ему принадлежит заслуга высокой постановки математического образования во всех существовавших тогда военно-технических учебных заведениях Петербурга.

Педагогическая деятельность Остроградского не ограничивалась только личным преподаванием. Около двадцати лет он руководил преподаванием математики в военно-учебных заведениях России, занимая должность главного наблюдателя. За это время Остроградский провел огромную организационную и методическую работу, направленную на повышение общего уровня математического просвещения. Он привлек к этому крупнейших математиков и механиков того времени: В. Я. Буняковского, О. И. Сомова, А. Н. Савича, И. А. Вышнеградского, Г. Е. Паукера, Д. М. Перевощикова, П. Л. Чебышева и др.

На основе составленных при участии и под руководством Остроградского учебных планов, программ и конспектов были составлены учебные руководства по математическим наукам для военно-учебных заведений. Эти книги оставили глубокий след в преподавании математических дисциплин в России и в истории развития учебных руководств по математике. Не остался в стороне и сам Остроградский, написавший несколько учебных пособий и трехтомное «Руководство начальной геометрии».

Остроградский был решительным сторонником введения в старших классах средних школ идеи функции и начал анализа. По его инициативе в 1850 году в кадетских корпусах были введены элементы высшей математики.

Он шел еще дальше и утверждал, что основные понятия высшей математики должны стать достоянием широких кругов грамотных людей.

Остроградский настойчиво добивался, чтобы преподавание математики и механики было увязано с физикой и естествознанием. По его инициативе созывались объединенные совещания математической и физической комиссий для совместного обсуждения программ*). Таким образом, есть все основания заключить, что в ряде пунктов Остроградский предвосхитил идеи известного международного движения за реформу преподавания, возникшего в XX веке.

Педагогические интересы Остроградского не ограничивались лишь вопросами методики математики. Его глубоко интересовали и общие проблемы воспитания и образования, которыми он особенно увлекался в последние годы своей жизни. Примечательно в этом отношении его сочинение «Размышления о преподавании», написанное совместно с французским математиком А. Блумом.

Высказанные в нем идеи настолько свежи, интересны, что, появись эта брошюра в наши дни, она была бы воспринята советским читателем как увлекательное педагогическое сочинение, толкующее о вполне современных педагогических проблемах.

Таким образом, Остроградский выступает перед нами не только как крупнейший математик своего времени, но и как замечательный деятель, отдавший много труда и творческой энергии делу отечественного просвещения вообще и математического в частности. Эту прекрасную традицию с честью продолжают наши советские математики.

---

*) Главным наблюдателем за преподаванием физики в военно-учебных заведениях был академик Э. Х. Ленц.

Я. А. Смородинский

Похожие движения

Существует ряд механических движений, которые хотя и различны, но описываются одними и теми же формулами. Поэтому, если мы выясним, как меняются какие-то величины при одном движении, можно сделать выводы для аналогичных. Расскажем о двух таких движениях.

1. Гармонические колебания

Между движением по окружности и гармоническим движением можно установить полезное соответствие. Рассмотрим материальную точку, которая движется равномерно по окружности. Ее скорость равна v и направлена по касательной к окружности. Если радиус окружности обозначить через R, то центростремительное ускорение точки равно $\frac{v^2}{R}$ и направлено по радиусу к центру (рис. 1).

Посмотрим, как движется проекция точки на диаметр окружности. Из рисунка ясно, что если положение точки на окружности задается углом φ, то положение ее проекции определяется координатой

$$x = R\cos\varphi. \qquad (1)$$

Проекция скорости на диаметр (обозначим ее через u) равна

$$u = -v\sin\varphi \qquad (2)$$

и, наконец, проекция ускорения

$$a = -\frac{v^2}{R}\cos\varphi. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (3) легко получить, что

$$a = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x. \qquad (4)$$

С таким же ускорением двигалась бы материальная точка с массой m под действием силы

$$F = am = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)xm. \qquad (5)$$

Такая сила, пропорциональная координате, называется гармонической, а движение под действием такой силы — гармоническим движением.

Введем вместо линейной скорости угловую $\omega = \frac{v}{R}$ (в *рад/сек*). Тогда $\varphi = \omega t$ и

$$x = R\cos\omega t, \quad u = \omega R\sin\omega t,$$
$$a = -\omega^2 R\cos\omega t.$$

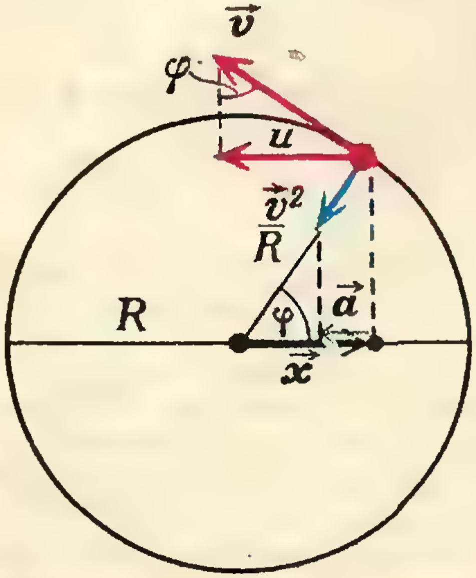


Рис. 1.

Таким образом, мы получили все характеристики гармонического движения. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию точки на окружности можно заменить реальной частицей, движение которой будет описываться полученными выше формулами.

Напомним, что входящие в уравнение Ньютона величины F и a — векторы. Их, следовательно, можно спроектировать на любое направление, и зависимость между проекциями будет описываться уравнением Ньютона.

Туннели в Земле

Покажем, что на точку, находящуюся внутри Земли, действует тоже гармоническая сила (вне Земли на точку действует сила $F=\gamma\frac{Mm}{R^2}$).

Пусть материальная точка массы m находится на расстоянии r от центра Земли. Действие, которое оказывает на точку Земля, можно разбить на две части (рис. 2): действие внутренней сферы (красной) и действие внешнего сферического слоя (желтого).

Как известно, сферический слой не создает внутри себя поля тяжести (если плотность ρ в нем постоянна) *). Поэтому на точку будет действовать только «красная часть», масса которой

$$M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho. \qquad (7)$$

Сила, с которой действует на точку «красная часть», равна

$$F=-\gamma\frac{Mm}{r^2}=-\gamma\frac{4\pi\rho m}{3}\cdot r. \qquad (8)$$

Следовательно, внутри Земли (в туннеле) на точку действует гармоническая сила, пропорциональная расстоянию от центра Земли. Движение в туннеле оказывается похожим на движение тела, подвешенного к пружине — упругая сила пружины также пропорциональна ее растяжению.

Теперь мы можем решить такую задачу: через центр Земли прорыт узкий туннель (рис. 3). В него уронили из точки A (без начальной скорости) камень. Камень долетит до точки B и начнет падать обратно, долетит до точки A и начнет падать к точке B и так далее. Как найти период колебаний?

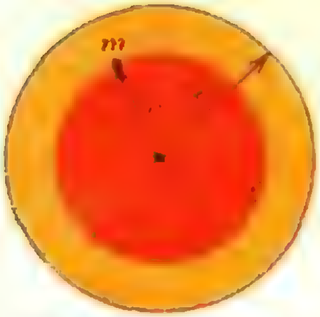


Рис. 2.

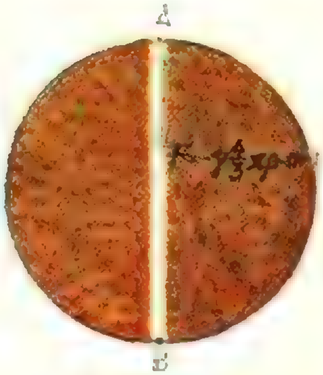


Рис. 3.

Фактически, эту задачу мы уже решили. Движение камня в туннеле можно рассматривать как движение проекции точки, вращающейся вокруг Земли у ее поверхности (например, спутника на круговой орбите вблизи Земли). Поэтому частота колебаний камня в туннеле равна угловой частоте вращения спутника вокруг Земли. Так как центростремительное ускорение спутника $a=\omega^2R$ (расстояние от спутника до поверхности Земли $h\ll R$) и $a=\frac{F}{m}$, то

$$\omega=\sqrt{\frac{a}{R}}=\sqrt{\frac{F}{mR}}=\sqrt{\gamma\frac{4\pi\rho mR}{3mR}}=$$
$$=\sqrt{\gamma\frac{4\pi\rho}{3}}. \qquad (9)$$

---

*) Или плотность зависит только от радиуса, но не зависит от углов (см. «Квант» № 5 (1971), решение задачи № Ф43 «Задачника «Кванта»).

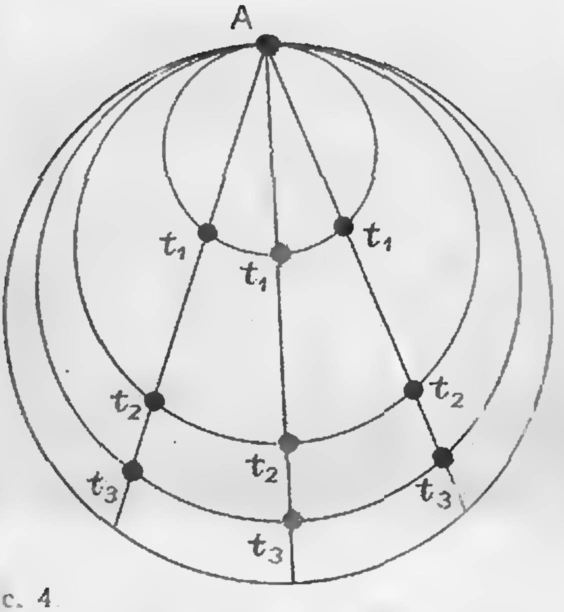


Рис. 4

Период колебаний, следовательно, равен

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}}. \qquad (10)$$

Следует отметить, что формула (10) определяет и период колебаний тел в туннеле, проведенном через Землю в любом направлении (не обязательно через центр). Это следует из приведенного выше утверждения о том, что уравнение Ньютона остается справедливым, если входящие в него векторные величины заменить их проекциями на любое направление. Однако, можно провести доказательство и непосредственно, заметив, что хорда во столько же раз меньше диаметра, во сколько проекция силы на направление хорды меньше самой силы. Попробуйте сделать это сами.

Тот же период будет описывать и движение точки по подземному круговому туннелю с центром в центре Земли. (Докажите.)

Теперь вы, наверное, сами можете показать, что если одновременно уронить несколько тел в разные туннели, исходящие из одной точки A (рис. 4), то в любой момент времени t_1, t_2, ... они будут находиться на окружности, проходящей через точку A.

ДВЕ ЗАДАЧИ

1. После смерти отца наследство размером в 1320 рублей было распределено в соответствии с завещанием между его тремя сыновьями и больницей. Если бы первый сын наряду со своей долей получил также и долю, завещанную больнице, то общая сумма полученного им наследства равнялась бы сумме долей двух других сыновей. Если бы доля, завещанная больнице, досталась второму сыну, то вместе с причитающейся ему долей он получил бы в два раза больше, чем его братья. Если бы доля больницы перешла в пользование третьего сына, то вместе с причитающейся ему долей общая сумма денег в три раза превысила бы сумму наследств двух его братьев. Найти размер каждого наследства.

2. В известной игре в «пятнадцать» фишки расположены таким образом, как это показано на рисунке.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Необходимо переместить их так, чтобы сумма фишек, расположенных в каждом из четырех столбцов, в каждой из четырех строк и в каждой из двух диагоналей равнялась бы 30. Найти наименьшее число движений и указать их последовательность. Решение может быть найдено при помощи самодельных картонных фишек с цифрами, которые должны располагаться в указанном выше порядке.

А. Дмитриев

Л. Г. Асламазов

ЛУННЫЕ ДОРОЖКИ

Отражения самых различных источников света от поверхности воды часто имеют вид длинных дорожек света, направленных от источника к нашему глазу. Вспомните хотя бы отражение Солнца в море во время заката или отражения уличных фонарей на набережной в реке. Широкую полосу света отбрасывает Луна, отражаясь в море или озере.

Все эти явления происходят вследствие того, что каждая маленькая волна на поверхности воды дает свое отдельное изображение. Попробуем разобраться, почему все освещенные волны вместе образуют продолговатую фигуру, вытянутую от источника света к наблюдателю — дорожку.

Рябь образуется на воде при ветре от 2 до 13 *м/сек*. При меньшем ветре поверхность воды отражает как плоское зеркало (состояние штиля). При большем — она покрывается белыми барашками, и световая дорожка теряет резкие очертания. Рябь можно представить как множество мелких волн, разбросанных по поверхности воды абсолютно неправильно и возникающих одинаково часто во всех направлениях. Крутизна склона волн при этом не превышает некоторого предельного значения α, которое зависит от силы ветра и может достигать 20—30°.

Попробуем теперь найти границу полосы света, несколько упростив задачу. Именно, будем считать, что в каждом месте поверхности имеется большое число маленьких зеркальных волн, крутизна склонов которых меняется в пределах от нуля до α, и волны имеют различные направления. Кроме того, для простоты будем считать, что наблюдатель и источник

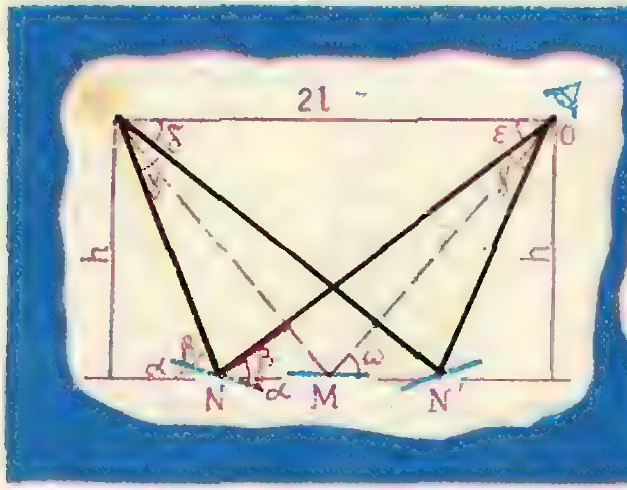
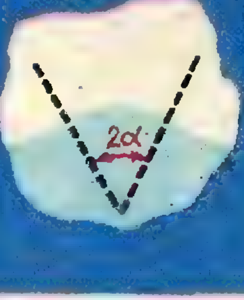


Рис. 1.



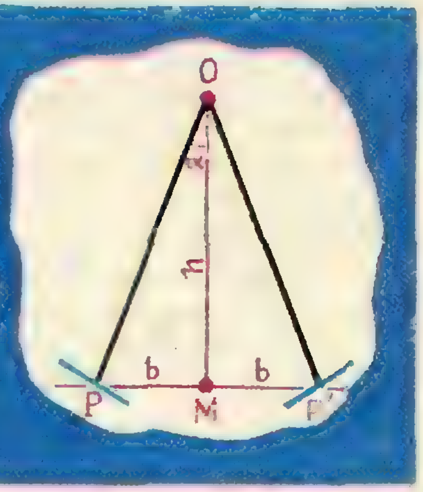


Рис. 2.

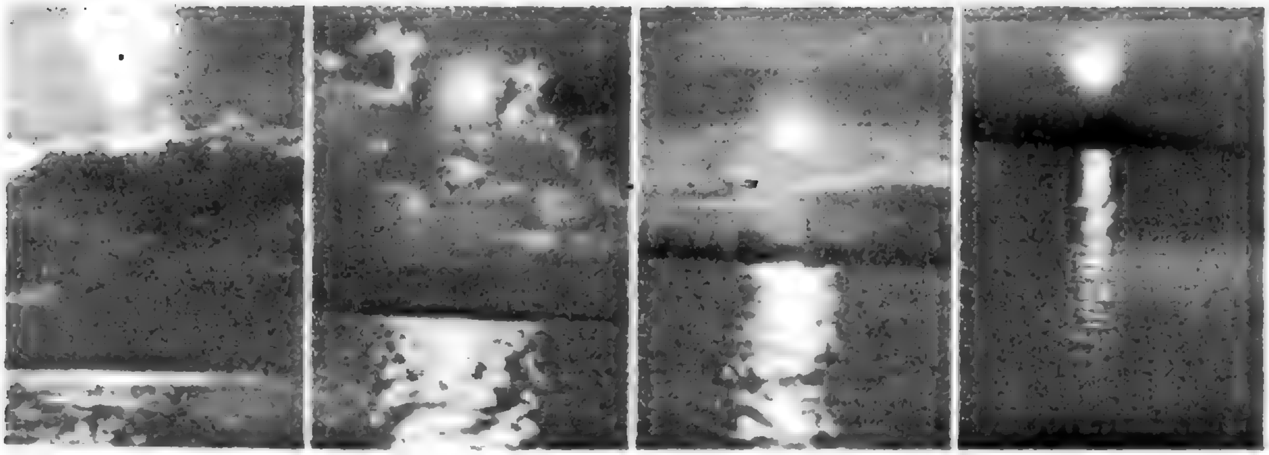


Рис. 3. Скорость ветра (слева направо): 2 *м/сек*, 5 *м/сек*, 12 *м/сек*, 12 *м/сек*. Высота Солнца над горизонтом: 7°, 13°, 20°, 30°.

света находятся на одном уровне над поверхностью воды (рис. 1).

Маленькое горизонтальное зеркальце будет отбрасывать свет в глаз наблюдателя O только в том случае, когда расстояния от него до наблюдателя и до источника одинаковы (в точке M). Если же зеркало наклонено под углом α в сторону наблюдателя, то для того, чтобы отраженный свет попадал в глаз, оно должно быть несколько сдвинуто от наблюдателя (точка N). Зеркальце, наклоненное под углом α в противоположную сторону, должно находиться в точке N'.

Наклонные положения зеркала аналогичны крайним положениям волн, при которых отраженный от них свет еще попадает в наш глаз. Расстояние между N и N' поэтому определяет длину световой дорожки. Во всех точках между N и N' найдутся участки волн, имеющие достаточный наклон для того, чтобы отражать лучи в наш глаз.

Рассмотрим теперь углы между лучами света. Из чертежа видно, что $\beta+\alpha=\gamma+\delta$, $\beta-\alpha=\varepsilon=\delta$, откуда $\gamma=\alpha+\beta-(\beta-\alpha)=2\alpha$. Таким образом мы приходим к выводу, что угол, под которым мы видим большую ось светового пятна, просто равен углу между двумя наиболее крутыми склонами. Нетрудно посчитать и линейный размер большой оси пятна NN'

Короткая ось пятна отраженного света легко находится аналогичным способом. Если сместить зеркальце из точки M в направлении, перпендикулярном NN', то для того, чтобы отраженный свет попал в глаз наблюдателя, зеркальце надо повернуть на некоторый угол вокруг оси, параллельной NN' (рис. 2). Считая, что предельный угол поворота зеркальца по-прежнему равен α, находим, что ширина полосы света $PP'=2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, и, следовательно, короткая ось стягивает угол $\beta=\dfrac{2h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{l^2+h^2}}$.

Отношение двух видимых полуосей пятна будет равно $\beta/2\alpha$ или, считая, что пятно невелико и угол α мал, равно $\beta/2\alpha=\sin\omega$, где ω — угол, под которым мы смотрим на воду.

Чем меньше этот угол, тем более вытянуто пятно. Если взгляд скользит по поверхности, то пятно света будет до бесконечности вытягиваться и суживаться.

При наблюдении световых дорожек на поверхности моря угол ω обычно мал — световые дорожки достигают горизонта (см. фотографии на рисунке 3), так что можно говорить только о ширине дорожки. И хотя полученные нами формулы буквально не применимы в этом случае, пользуясь ими, можно не только качественно объяснить происхождение дорожек, но и понять зависимость их ширины от силы ветра и высоты Солнца над горизонтом: с увеличением α и h ширина дорожки возрастает.

БЛЕСК В ПРИРОДЕ, или почему у кошки глаза светятся

С. А. Хейфец

Тяга к блестящему запрятана где-то в глубинах сознания. Ребенок, впервые увидевший свет, тянется к яркому; туземцы отдают за блестящие безделушки и пищу, и воду. Одаренный, глубокий ум люди называют «блестящим». Мы не будем интересоваться, связано ли это внимание к блестящему с атавистическими воспоминаниями о пляшущем огне или с гипнозом, мы попробуем разобраться, почему появляется блеск — будь то блеск золота, алмаза или кошачьих глаз в темноте.

Мы судим о яркости предмета по количеству света, которое отразилось от него и попало к нам в глаз*). Ясно, что это количество зависит и от доли отраженного света, и от его направленности. Белый лист бумаги отражает лучше черного, зеркальная поверхность — лучше матовой.

Направление света, отраженного от гладкой поверхности, определяется хорошо известным законом: угол падения равен углу отражения. А энергия отраженного света зависит еще и от коэффициента преломления среды n. Если свет падает по нормали на границу сред с показателями преломления n_1 и n_2, то доля отраженной энергии равна $\eta = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$. Для стекла $n = 1{,}52$, для воздуха $n = 1$, так что отражается всего 4,3% падающего света. Для стеклянной пластинки доля отраженной энергии будет примерно в два раза больше, так как часть прошедшего света отразится от второй поверхности стекла и вернется назад. Если лучи падают не вертикально, а под углом, они отражаются лучше (рис. 1). При 60° отражаются от стекла не 4,3%, а 9%; при 80° уже 39%. Когда угол падения приближается к 90° — скользящий луч,— почти весь свет отражается (коэффициент отражения стремится к 100%). Даже очень черные тела, такие как графит, сажа, бархат, начинают блестеть, если смотреть на них под маленьким углом к поверхности.

При нормальном падении света на стеклянную пластинку доля отраженной энергии близка к 8,6%. Мало это или много? Оказывается, немного. Свежий снег отражает 80—85% падающего света, столько же отражают облака.

Однако осколок стекла на снегу легко заметить, так же как и блестки отдельных снежинок. Это объясняется не столько отражательными свойствами пластинки, сколько параллельностью солнечных лучей — расходимость их составляет всего 31′ (примерно 0,5°, или $^1/_{100}$ *рад*). Если осколок плоский, то и отраженный пучок лучей будет расходиться слабо — на расстоянии 100 *м* его размеры будут порядка метра (если осколок стекла маленький). А поверхность земли, на которой лежит осколок, отражает свет во все стороны (на 180°) поровну, поэтому осколок легко заметить на окружающем фоне. По той же причине «светятся» в темноте кошачьи глаза — падающий на них свет отражается почти параллельным пучком. Подойдите близко — и блеск пропадает, так как преимущество направленного пучка исчезает. (Впрочем, исчезновение блеска при близком рассмотрении — довольно обычная жизненная ситуация.) Если вы летали на самолете, то могли заметить, что реки и озера блестят на солнце точно так же, как далекий осколок стекла. В этом случае коэффициент отражения от поверхности воды 7% — почти такой же, как у стеклянной пластинки, и хотя поверхность озера или реки не бывает такой ровной, как стеклянная пластинка, размеры ее гораздо больше.

---

*) Яркость определяется световым потоком, попадающим на сетчатку глаза.

Почему же тогда сверкающие снежинки заметны только на небольшом расстоянии, а дальше все сливается в одну белую пелену? Мы уже рассматривали количество света, отраженного от осколка стекла. Однако, кроме «полезных сигналов», есть еще «шум» — средняя освещенность поверхности земли или снега. Особенность нашего глаза состоит в том, что мы способны различить два объекта, если их яркости отличаются не меньше чем на 5—10%. (Правда, это относится к тем случаям, когда яркости не очень малы.) Поэтому, например, способность различать звезды зависит от общей освещенности неба. Теперь ясно, что происходит со снежинкой. Чем дальше, тем меньше ее яркость, так как отраженные лучи все же не строго параллельны. При этом яркость снежинки убывает пропорционально квадрату расстояния. Яркость снежного фона, который можно считать матовой поверхностью, убывает с расстоянием линейно. Проще всего в этом убедиться, заметив, что свет, отраженный равномерно освещенной матовой поверхностью больших размеров, вблизи нее является плоской волной. Для наблюдателя, зрачок которого параллелен поверхности, ее яркость не зависит от расстояния. Если же расстояние до поверхности задано ростом наблюдателя, а угол зрения меняется, то количество света, попадающего в глаз, уменьшается пропорционально косинусу угла зрения. Когда яркости фона и снежинки сравняются, мы снежинку просто не заметим. Попробуйте оценить, на каком расстоянии это должно произойти, и проверьте зимой получившийся результат.

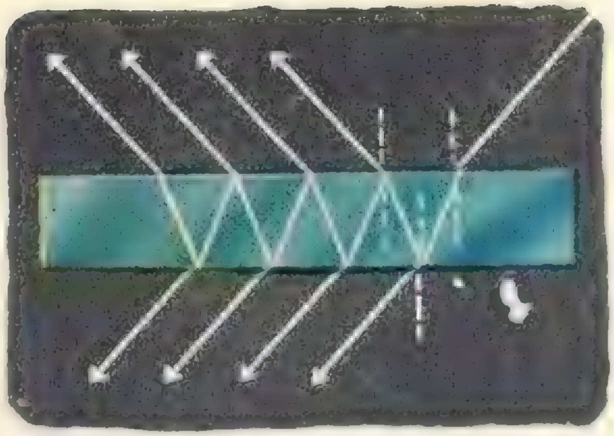


Рис. 1.

До сих пор мы считали, что луч падает на поверхность из воздуха. При этом большая часть света проходила внутрь тела или поглощалась им. Тело блестело, если отражение

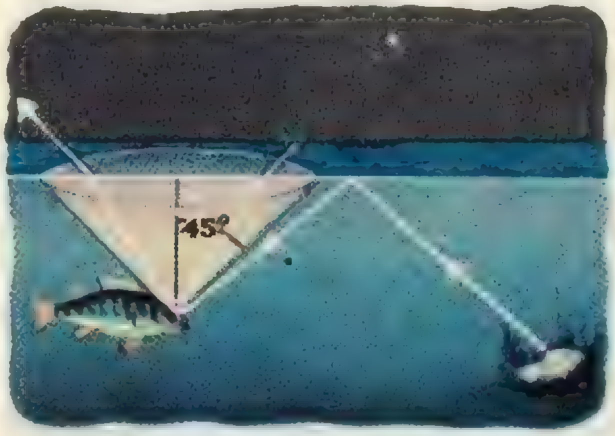


Рис. 2. Для рыб большая часть поверхности зеркальна.

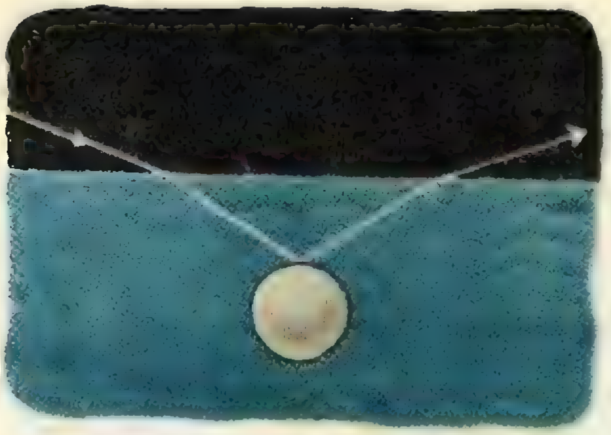


Рис. 3. Отражение от пузырька воздуха.

отличалось направленностью. Исключение составляли «скользящие» лучи. Тогда блеск был следствием почти 100% отражения падающего света. Подобное положение наблюдается, если луч попадает на границу раздела двух сред из более плотной среды. Если свет падает по нормали, то доля отраженной световой энергии определяется той же формулой, что и раньше. Для воды это означает, что 98% света выходит в воздух. С увеличением угла падения β интенсивность преломленного луча уменьшается, и при $\sin\beta = \frac{1}{n}$ преломленный луч исчезает. При этом весь падающий свет отражается от границы — происходит так называемое полное внутреннее отражение. Для стекла $n = 1{,}52$, так что лучи, идущие под углом к нормали $\beta \geqslant 36°$, не выходят наружу. Для воды $n = 1{,}33$, так что рыба может видеть небо только в «лунку» с углом раствора около 45° (рис. 2). Остальная поверхность воды (с точки зрения рыб) блестит и отражает только дно водоема. Граница раздела при полном внутреннем отражении — идеальное зеркало.

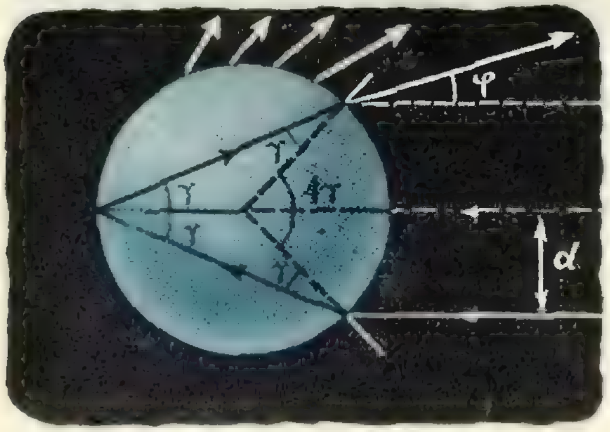


Рис. 4. Ход лучей в капле воды.

Еще одно интересное применение этого эффекта — светопроводы. Если пустить луч внутрь стекловолокна, то можно потом плавно изгибать эти волокна, даже крутить узлы, и луч света покорно закрутится, следуя закону полного внутреннего отражения.

Опустите в воду лист серебристой ивы. Обратная сторона листа, покрытая множеством пузырьков, начинает серебриться. А сверкание капли росы вам наверняка приходилось видеть. В обоих случаях дело в полном внутреннем отражении: в первом случае — от внешней, во втором — от внутренней поверхности пузырька воздуха или капли росы (рис. 3, 4). Угол между вошедшим в каплю и вышедшим лучами легко определить, если учесть, что радиус перпендикулярен поверхности шара. Этот угол $\varphi = 4\gamma - 2\alpha$. Впервые такой расчет сделал Декарт. Труднее проанализировать зависимость угла отклонения φ от прицельного параметра d.

Если падающие лучи параллельны, то, пройдя сквозь каплю, они начинают расходиться. Однако существует минимальный угол отклонения. Он близок к 42°. Вблизи этого направления преломленные лучи идут гуще, то есть основная доля преломленных лучей идет именно в этом направлении. Росинка, наблюдаемая под этим углом, блестит особенно ярко. Под этим же углом к солнечным лучам видна радуга.

Где бы ни находился яркий источник света (Солнце, яркое небо), вы всегда сможете наблюдать в росинке его искру-изображение (рис. 5). Отраженные от поверхности капли лучи могут попадать в глаз, даже если угол α близок к 180°. В этом смысле в капле воды действительно отражается весь мир.

Говоря о блеске, нельзя не вспомнить о драгоценных камнях. Обычно

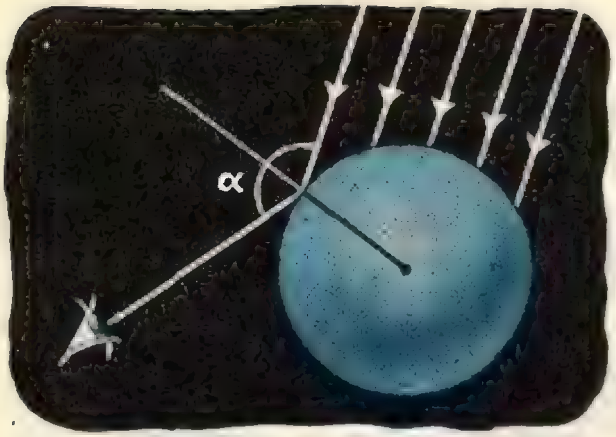


Рис. 5. Отражение от капли.

коэффициент преломления твердых тел равен 1,5—1,6. Исключительными свойствами обладает алмаз. И задолго до того, как человечество поняло его огромную ценность как самого твердого природного материала, люди искали, находили и воспевали алмаз. Коэффициент преломления у алмаза равен 2,42. Легко сосчитать, что коэффициент отражения при этом равен 17% — почти в четыре раза больше, чем у стекла. Но прославился алмаз не за отражение от внешней поверхности, а за отражение от «внутренней» (так же, как это происходит в капле). А если вспомнить, что попадаются кристаллы без внутренних дефектов— алмазы «чистой воды», то сравнение с росинкой становится еще понятнее. Но только обработанный, ограненный алмаз — бриллиант завораживает людей. Угол полного внутреннего отражения алмаза (24°24′) позволяет создать такую огранку, которая заменяет сферическую поверхность капли, концентрируя вышедшие лучи вблизи определенных направлений (рис. 6, 7). Эффект усиливается тем, что коэффициент преломления зависит от длины волны света. Поэтому условия полного внутреннего отражения для лучей разного цвета различны. В зависимости от угла наблюдения бриллиант меняет не только яркость, но и окраску луча. Недаром один из них назван «Кохинур», что означает «гора света». Определение лучшего способа огранки алмаза — серьезная задача. Первый вариант огранки был найден еще в 1454 году, а попытки улучшить ее делаются и поныне. Но носят бриллианты да и видят их не так уж много людей. Гораздо популярнее технический алмаз. В инструментах (на что идет 80% добываемых алмазов) он применяется в виде алмазной пыли или полировочных паст. И если при этом говорят о блеске, то имеют в виду блеск обработанных поверхностей, не требующих добавочной шлифовки и полировки.

Блеск золота стал нарицательным понятием. Блестят все металлы. Так даже и говорят: «металлический» блеск. Полностью это свойство проявляется, если поверхность металла гладкая. При нормальном падении лучей слой серебра отражает 85—95% падающего света, слой никеля — 55—65%, стали — 50—55%. Это свойство металлов тесно связано с другой их особенностью — высокой проводимостью. Чтобы разобраться,

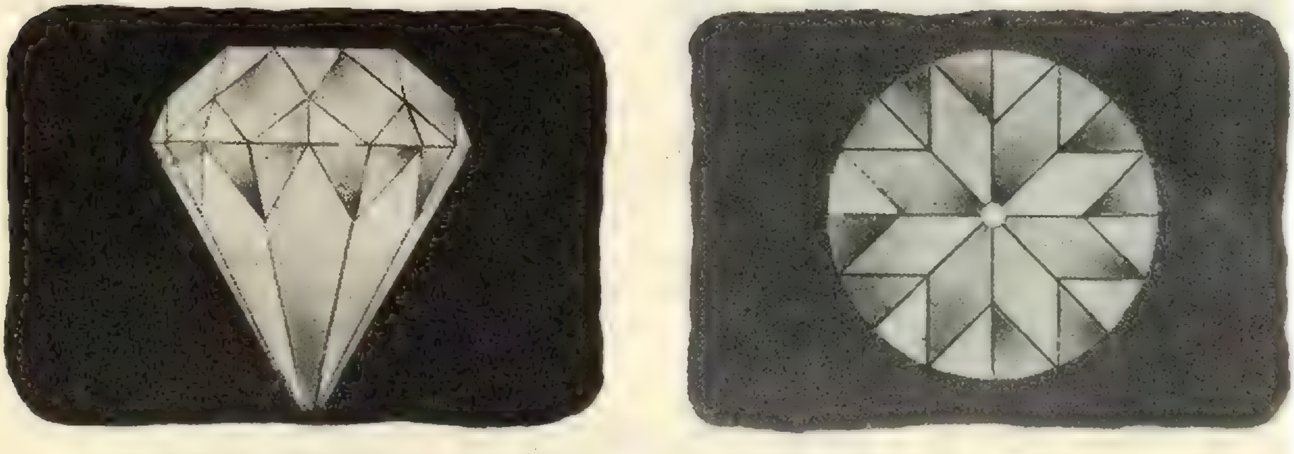


Рис. 6. *а*) Огранка бриллианта; *б*) огранка нижней поверхности бриллианта.

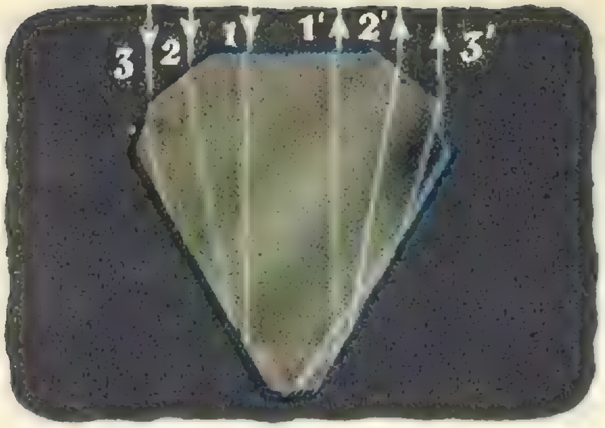


Рис. 7. Ход некоторых лучей в бриллианте.

в чем тут дело, нужно «влезть» внутрь металла. Рассмотрение возникающих явлений потребовало бы отдельной статьи. Укажем только, что особенности металлов объясняются слабой связью части электронов с атомами и образованием благодаря этому легко подвижного «газа» свободных электронов. Поэтому движение электронов в поле электромагнитной волны в металлах совершенно отлично от движения в диэлектриках, где каждый электрон «знает» свой атом. Свободные электроны легко поглощают и излучают обратно бо́льшую часть света, падающего на поверхность металла. Именно поэтому металлы хорошо отражают радиоволны и даже видимый свет. Обычно при этом электромагнитные волны, прошедшие внутрь металла, сильно поглощаются. Интересно, что иногда наблюдается обратная картина: вещества, поглощающие свет на определенном участке спектра, приобретают металлический блеск (например, засохшие фиолетовые чернила).

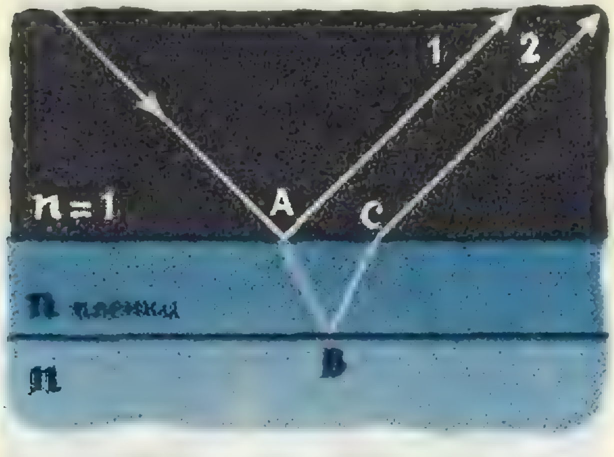


Рис. 8. Разность хода *ABC* между лучами *1* и *2* должна составлять нечетное число полуволн.

Окисленные металлы блестят гораздо хуже, поэтому нужно ожидать, что электрический ток они проводят хуже, чем чистые.

Конечно, блестящие вещи чаще всего красивы, но иногда с блеском приходиться бороться. Если линзы бинокля или фотоаппарата блестят, это означает, что к глазу или фотопластинке приходит меньше света: часть его отражается. Убирают блеск, нанося на поверхность линзы очень тонкую и прозрачную пленку. Толщину ее и коэффициент преломления подбирают так, чтобы лучи, отраженные от двух поверхностей пленки (рис. 8), были сдвинуты по фазе на 180° и, интерферируя, гасили друг друга. Этого нельзя добиться для всей области видимого света, но можно для той длины волны, к которой фотопленка или глаз наиболее чувствительны.

Мы не рассматривали такое интересное явление, как блеск счастья в глазах — но его, видимо, нельзя описать одними физическими законами, да вряд ли к этому и нужно стремиться.

Упражнения

1. Как изменяется яркость Луны для подлетающего к ней космонавта?

2. Отраженная волна исчезает полностью, если интенсивности лучей *1* и *2* (рис. 8) одинаковы. Докажите, что для этого должно быть

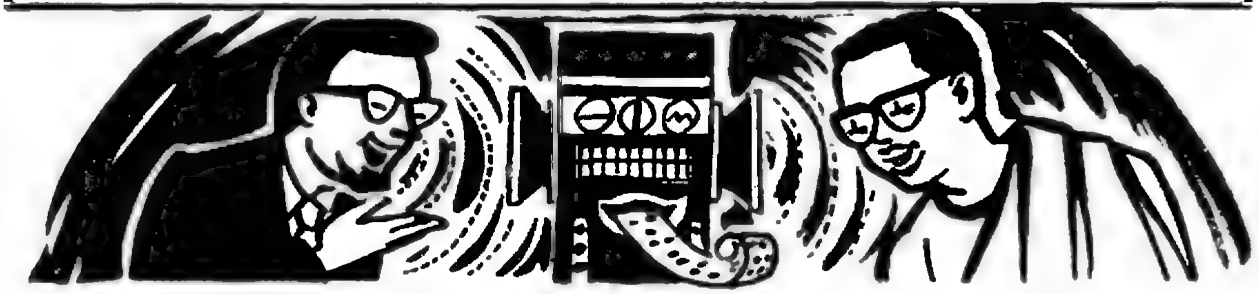
$$n_{\text{пленки}} = \sqrt{n}.$$

3. Отражение света можно уменьшить, если сгладить переход от $n = 1$ к $n > 1$. Сравните количество отраженного света от границы воздух — стекло и от стекла, на которое налит слой воды (поглощением в воде пренебречь).

4. Можно ли (и как) увеличить количество отраженного света, нанося прозрачную пленку на стекло?

5. На некоторых тканях под определенными углами виден глянец. Дайте объяснение этому эффекту.

МОЖЕТ ЛИ МАШИНА ПЕРЕВОДИТЬ?



В. В. Раскин

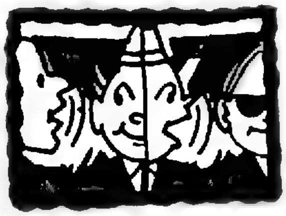
Вавилонская башня и что из-за нее получилось

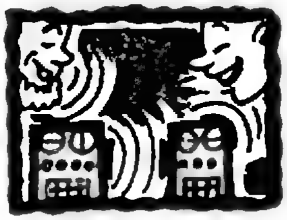
Начнем с общих мест. Человек живет в обществе. А в обществе надо общаться с себе подобными. Как общаться? А язык-то на что? И вот с незапамятных времен люди только и делают, что говорят. Выходит, все в порядке. Есть потребность общаться — разговаривай. Но вот беда: люди могут разговаривать друг с другом, только если они говорят на одном и том же языке. А языков — великое множество. И если ты говоришь на другом языке, непонятном окружающим, тебя прозовут «немцем», от слова «немой», как будто ты вобще не умеешь говорить.

Почему так вышло? Откуда это множество языков? Попытки объяснения содержатся в самых древних мифах. По библейской легенде бог лишил людей взаимопонимания (он-то знал, как важно оно для совместной деятельности!) и заставил их говорить на разных языках, чтобы они не смогли достроить Вавилонскую башню — башню до небес, символ человеческой гордыни. Но эта легенда явно не принимала и не могла еще принять в расчет достижений сравнительного языкознания. Примерно полтора века назад было доказано, что многие языки родственны друг другу и происходят из общего источника.

Разноязычие — результат естественного процесса. Но от этого не легче. Потребность поговорить с иноплеменниками возникла давно. И для улаживания пограничных конфликтов, и для торговли, и в процессе войны необходим был человек действительно древнейшей профессии — толмач, переводчик.

Перевод с одного языка на другой обходится человечеству очень до-



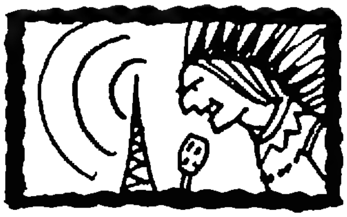


рого. Ведь подумайте: если бы на свете было только 100 языков, то для перевода с каждого языка на любой другой (и наоборот) понадобилось бы $100 \times 99/2 = 4950$ переводчиков. Но языков гораздо больше, да и не для каждой пары языков можно обойтись одним переводчиком. Неудивительно, что с появлением мощной электронной вычислительной техники забрезжила надежда переложить бремя перевода на машину.

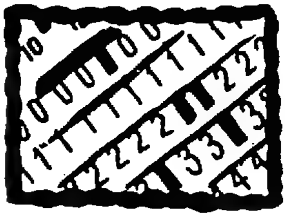
Начало этой странной истории

Идея автоматического (машинного) перевода овладела массами (речь идет, конечно, о массах ученых) в послевоенный период, на заре кибернетики, в первые годы электронной эры.

1946 год. Между американскими учеными У. Уивером и А. Д. Бутом происходит дискуссия о границах применения автоматических цифровых вычислительных машин. Первый считает, что основные «элементы языка» можно обнаружить при помощи дешифровочных устройств, разработанных во время войны для раскрытия секретных кодов противника, и на базе этих «элементов» построить машинный перевод. Другой осторожнее: он говорит о принципиальной возможности лишь пословного перевода, да и то при очень небольшом словаре — объем машинной памяти был еще очень невелик. (В следующем году Бут со своим коллегой Бриттеном разработал программу такого перевода.) Но Уивер полон оптимизма. Он затевает переписку с «отцом кибернетики» Норбертом Винером. Винер отнесся к идее Уивера с осторожностью и указал на большие трудности, которые встают на пути исследователя. Уивер не унывает. Его кредо: «Предложение на одном языке — это просто зашифрованная фраза другого языка». Надо научить машину расшифровывать. Однако Уивер не обратил внимания на одно крайне важное обстоятельство: при помощи формальных дешифровочных операций, легко осуществимых в машине, удается дойти лишь до первоначального текста на языке оригинала. Но понять текст на этом языке машина не может: ведь для этого язык надо знать. В годы первой мировой войны дешифровщики долго бились над разгадкой одного секретного кода, но дело не двигалось с места, пока кто-то не догадался, что зашифрован текст на японском языке. Сам-то шифр был обнаружен сразу, но узнать смысл сообщения удалось только после того, как стало известно, на каком языке оно написано, и только при помощи знания этого языка. В годы второй мировой войны немецкие дешифровщики, лихо расшифровывавшие все наисекретнейшие коды американских радистов, сломали себе зубы об один такой код, который оказался просто-напросто открытым текстом на неизвестном им индейском языке. Таким образом в распоряжении ученых не было пока никаких сведений о том, что естественный человеческий язык поддается «расшифровке».



Ниже приводится задача, в которой сообщается, на каких языках написаны зашифрованные тексты, и произвести дешифровку в этом случае оказывается совсем несложно.



Задача 1. (Три варианта: англо-русский, немецко-русский и французско-русский.)

Слева записаны в зашифрованном виде слова иностранного языка, справа (напротив) — их перевод (иногда для одного слова несколько переводов, но не обязательно все) на русский язык. Латинские буквы закодированы (взаимнооднозначно) числами, записанными арабскими цифрами, русские — римскими. Буквы одного и того же слова отделены друг от друга запятыми, слова в заданиях — точками с запятой, фразы в заданиях — точками. Надстрочные знаки и апострофы не учитываются, но «и» и «й» считаются разными буквами.

English — Russian

1	— I	8, 4	— X
2, 3, 4, 5, 6, 7	— II, III, IV, V	11, 3, 12	— IV, XI или XII, XI
8, 9, 10	— V или III	9, 3	— XIII, IX, IV
2, 11	— II, VII, VIII или II, VII, I или II, VII, IX	4, 7, 6, 6,	— XIV, IX, XV, IX, XII, V, I
5, 6, 7	— IX, IX	14, 7, 1, 6, 9, 10, 13	— XIV, XV, X, XVI, V, I

Переведите на английский:

I, XII; II, VII, XV, IX, IV, X, IV; VI; IV, III, II.
XII, IX, XV, XIII, VII.
II, IX, XIII, I; XVI, VII, XII, X, IV; IV, VII, II.
XII, VII, IV; II, VII, VIII; XIV, VII, II.

Deutsch — Russisch

1, 2, 3	— I	1, 2, 10	— VII, VIII, IV
4, 5, 6	— II	11, 4, 12	— VIII, IX
2, 7, 8	— III	11, 5, 6, 13, 10	— X, XI, XII, V, VI, XIII
9, 2, 7, 8	— I, IV, XIV, III		

Переведите на немецкий:

VII, VI, XI, IV
I, VI; VII, VIII, VI, XIII
V, VI, XI, VI, X
IV, V, VI; X, VI, VII
VI, VIII; VII, VI, XIII; X, XI, XII, V

Francais — Russe

1, 2	— I	3, 8, 5	— II, III, IV или II, IV, III, I, или I
3, 2	— II, III, IV или II, IV, III, I	10, 11, 6	— III, XIV
4, 5	— V, II, IV, VI	11, 9	— XII, XV, V, III
4, 5, 3, 2, 6	— VII, VI, VIII, V, IX, X	2, 7	— V или XIV
7, 8, 9	— IX, XI, XII, XIII или IX, XI, XII, IV		

Переведите на французский:

XII, XV, V, III; XV, IV, III, X, I; IX, IV, VIII, I; VII, VI, VIII, VII, VI.

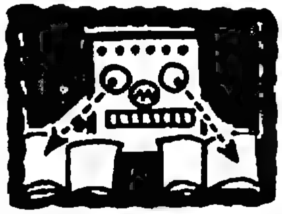
Шли годы. Росло число исследователей по машинному переводу, увеличивалось количество работ.

В 1954—1956 годах произошли весьма важные события. В Америке был произведен публичный эксперимент по машинному переводу при помощи электронной вычислительной машины. В Советском Союзе были проведены два опыта: в Институте точной механики и вычислительной техники переводили на русский язык английский научно-технический текст, а в Математическом институте им. Стеклова — французский математический текст. Испытания прошли успешно. Так что же, праздновать победу? Нет. Вскоре выяснилось, что нужно, наоборот, считать раны.

Далеко ли уедешь на машине, или повесть о том, как мгновенный успех может обернуться затяжной неудачей

Что умеет делать машина? Она умеет совершать простые, механические операции: сравнивать содержание двух ячеек своей памяти, складывать, вычитать, перемножать и т. п. И ей безразлично, осуществляет ли она программу перевода или высчитывает траекторию спутника. Но таких операций машина может делать очень много, и, комбинируя их самым различным образом, программист может заставить машину совершать какие-то определенные, целенаправленные операции.

Какие операции должна произвести машина, чтобы перевести текст с одного языка на другой? Во-первых, она должна его «прочесть». Это сделать не так уж сложно. Текст вводится в закодированном виде в ячейки памяти машины, а заглядывать в свою собственную память машина умеет. Затем машина должна опознать слова. Это делается так: каждое слово (от одного пробела до другого) сравнивается со словарем, который должен храниться в памяти машины. Машина должна определить, в какой форме стоит каждое слово (морфологический анализ), чтобы затем понять, в каких отношениях находятся все слова предложения по отношению друг к другу (синтаксический анализ) А что потом? Потом надо переводить. Собственно, человек-переводчик проделывает все описанные операции мгновенно и бессознательно, и сам процесс перевода начинается именно с этого момента. Нужно найти слова в том языке, на который текст переводится (этот язык называется выходным), эквивалентные словам языка, с которого осуществляется перевод (входной язык). Затем поставить эти слова в соответствующие формы, то есть упорядочить их согласно законам морфологической и синтаксической структуры выходного языка. Здесь уже что ни шаг, то трудности. Придется в них разобраться.



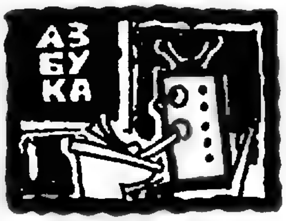
Первые энтузиасты машинного перевода рассчитывали обойтись пословным переводом (ну, может быть, с небольшими исключениями). Возьмем английскую фразу:

I know his daughter.

Дословный перевод этой фразы оказывается правильным:

Я знаю его дочь.

Правда, английский глагол *know* спрягается иначе, чем русский глагол *знать*: в настоящем времени только в третьем лице единственного числа он имеет окончание *-s*, а во всех других лицах имеет общую форму — *know*. Как тогда машине понять, что в русской фразе этому глаголу должна соответствовать форма *знаю*, а не *знаешь* и не *знаете*? Из словарной статьи для *know* этого не выявишь, что бы там ни записать: одну форму *знать* или все возможные формы: *знать*, *знаю*, *знаете*, *знаем*, *знают* и, наконец, *знай*(*те*). Подсказка, однако, содержится в английском слове *I* — *я*, прямо указывающем на первое лицо единственного числа. Значит, нужно вложить в машину правило, согласно которому для перевода глагола *know* (как и других английских глаголов в настоящем времени) правильной формой русского глагола она должна учесть подлежащее, то есть перевод каждого слова по отдельности при помощи только словаря межъязыковых соответствий оказывается недостаточным для правильного перевода. А если бы



в английской фразе был артикль, которого нет в русском языке? Что записать в словарной статье артикля? Да и вообще, что писать в словаре? В русском языке слова могут выступать в разных формах: имена склоняются, глаголы спрягаются. Указывать все возможные формы русского слова при соответствующем английском? Но это раздует словарь, а мы должны экономить машинную память. И потом — главное! — как догадаться, какую из форм употребить? Ведь в английском языке у слов свои формы — какую из них писать в словарь?

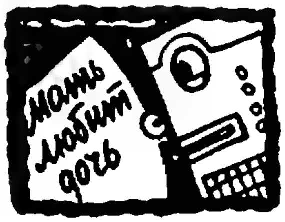
Ответы на эти вопросы удалось найти довольно быстро. Нужно создать отдельные словари основ и окончаний. Тогда, например, латинский глагол *amat* машина будет опознавать так: сперва она разыщет в словаре основ самую длинную из содержащихся там основ, которая вкладывается в это слово,— основы *amat* она не найдет, *ama* — тоже, а вот основа *am* там должна быть, и она соответствует понятию *любить*; это машина запоминает и проводит границу: *am/at*; *at* — это окончание, и его надо искать в словаре окончаний; оно соответствует третьему лицу единственного числа. Значит, переводим так: основа *люб*, окончание *ит* — *любит*. Правильно! Но нам повезло: латинские окончания более или менее соответствуют русским. Однако и с латинскими окончаниями не всегда гладко. Есть в латыни самое короткое на свете предложение, оно состоит из одной буквы. Это *I* — *Иди*! Кроме того, *i* может обозначать еще 8 различных окончаний. Как догадаться, какое из них употреблено в тексте? Снова нужно обращаться к контексту. Причем разгадка может таиться не в соседнем слове, а через слово, через два. Как узнать, в каком? А лингвист должен все предусмотреть и вооружить машину правилом на любой случай.

Еще более твердым орешком оказывается синтаксис. Вы сами можете в этом убедиться.

Задача 2. Установите грамматические связи между словами во фразе: *Раскапывайте погребенных в земле слепых исполинов. (Задача принадлежит А. Е. Кибрику.)*

(Хорошим считается решение, где будет предложено не менее 9 способов — а всего их около 20).

Эта фраза подобрана специально. Но в языке много таких фраз, в которых синтаксический анализ можно сделать не единственным способом. А от этого меняется и смысл предложения. Возьмем фразу: «Мать любит дочь». Кто же кого любит (иными словами, что здесь подлежащее и что дополнение)? Когда такая фраза попадет в машину, то, даже если машина правильно установит формы всех слов, она окажется в большом затруднении: чтобы верно определить синтаксическую структуру, нужно выйти за пределы этого предложения, обратиться к более широкому контексту, понять, о чем идет речь. Как быть?



Может быть, робко предложит запуганный читатель, записывать в словаре и переводить не отдельные слова, а целые словосочетания? Ведь все время приходится обращаться к контексту. А если переводить целыми словосочетаниями, может, будет легче? Пожалуйста! Давайте попробуем. Пусть в языке имеется 1000 слов (а сколько их на самом деле?!). В словосочетании «что бы то ни было» пять слов. Давайте записывать в словарь все пятисловные словосочетания (без повторений слов). Теоретически возможное их число равно $N=1000\times999\times998\times997\times996\approx10^{15}$.

Конечно, осмысленных словосочетаний много меньше, но все равно их число превысит объем памяти самой памятливой из всех ныне действующих машин. Кроме того, машина будет долго искать каждое словосочетание в таком словаре.

Долгие годы лингвисты искали выход из этого трудного положения. Придумывали новые очень хитрые алгоритмы, остроумные модели языка, изобретательные методы его описания. Соображали, как упростить процедуру обработки, как улучшить качество перевода. Встречались, обсуждали, спорили. Но позвольте, спохватится читатель, если дело оказывается таким сложным, то почему же так удачно прошли первые опыты?

Секрет прост. Эти опыты проводили на очень небольшом материале. И понятно, что для небольшого и вполне определенного текста легко предусмотреть все исключения и варианты, запастись необходимыми правилами на все случаи, которые имеются в этом тексте. И текст переводится. Вы сможете убедиться в этом сами на примере следующей задачи.

Задача 3. Последовательности арабских цифр при помощи системы правил переводятся в последовательности римских цифр. На каждом шагу применяется одно правило, заменяющее одну арабскую цифру на одну римскую цифру. Используются правила следующих четырех видов:

бесконтекстные:
например, 2→III заменить 2 на III;
одноконтекстные одинарные:
а) 2 (3)→III заменить 2 на III,
б) (3) 2→III если после (перед) 2 стоит 3;

одноконтекстные двойные:
а) 2 (3, 4)→III заменить 2 на III, если
б) (3, 4) 2→III после (перед) 2 стоят 3 и 4);
двуконтекстные:
(3) 2 (4)→III (заменить 2 на III, если перед 2 стоит 3, а после — 4)

К каждой последовательности арабских цифр правила применяются в следующем порядке: сначала все двуконтекстные, затем одноконтекстные двойные, затем одинарные и, наконец, бесконтекстные. Любую совокупность правил этих видов назовем программой. В программе могут быть представлены правила не всех видов.

Пронумеруем арабскими цифрами от 1 до 6 следующие английские (французские, немецкие) слова:

lake, a, this, what, beautiful, is;
champ, un, ce, que, vert, sera;
Feld, das, was, grün, grüne, ist.

Задание 1. Составить список всех предложений, состоящих из данных слов.

Задание 2. Составить минимальный список русских слов, необходимых для перевода предложений из задания 1 на русский язык, и пронумеровать их римскими цифрами.

Задание 3. Составить программу перевода цифровых последовательностей таким образом, чтобы каждая последовательность арабских цифр, соответствующая какому-либо предложению П из задания 1, переводилась в последовательность римских цифр, соответствующую русскому предложению, являющемуся правильным переводом предложения П.

Если эта задача решена правильно, то тем самым осуществлен машинный перевод всех предложений из задания 1 на русский язык: осталось только записать пронумерованные слова в соответствующие ячейки машинной памяти и ввести в машину программу из задания 3. Но ведь этого мало. Нужно придумать такие правила, создать такую программу обработки и так составить словарь, чтобы машина могла перевести любой текст. А вот здесь-то и выплывают все те трудности, об очень небольшой и не самой «трудной» части которых мы успели рассказать.

ЗАДАЧНИК Кванта

ЗАДАЧИ

Решения задач из «Задачника «Кванта» можно присылать не позднее полутора месяцев после выхода из печати соответствующего номера журнала. Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения нужно написать: фамилию, имя и отчество; шестизначный почтовый индекс, класс и школу, в которой вы учитесь.

M101. В колонию, состоящую из n бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго, или в конце концов погибнет?

Р. М. Ковтун

M102. Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек обладает следующим свойством: для любых двух точек A и B множества найдется точка C множества такая, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

В. Гурари

M103. Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a, \\ x^2 - y^2 = b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Э. А. Ясиновый

M104. Внутри треугольника ABC лежат такие две точки P и Q, что отрезки AP и AQ составляют равные углы с биссектрисой угла A треугольника, а отрезки BP и BQ составляют равные углы с биссектрисой угла B. Докажите, что отрезки CP и CQ составляют равные углы с биссектрисой угла C (рис. 1).

В. Н. Березин

M105. Сумма цифр числа после умножения на 8 может уменьшиться: $75\cdot 8=300$ — сумма цифр была $7+5=12$, а стала 3. Однако она не может уменьшиться более чем в 8 раз.

Докажите, что $\frac{S(8M)}{S(N)} \geqslant \frac{1}{8}$, где M — натуральное число, а $S(A)$ — сумма цифр числа A (в десятичной записи). Для каких еще натуральных чисел k существует такое положительное число c_k, что

$$\frac{S(kN)}{S(N)} \geqslant c_k$$

для всех натуральных N? Найдите наибольшее подходящее значение c_k.

И. Н. Бернштейн

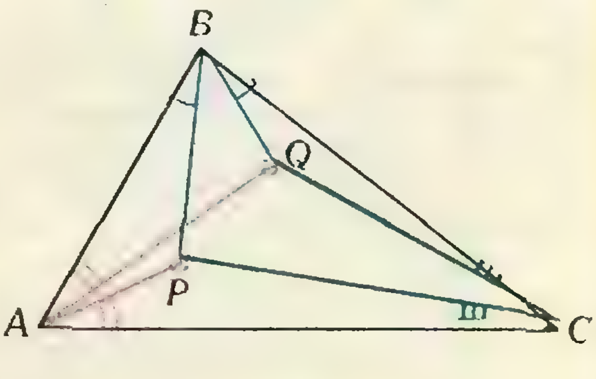


Рис. 1.

Ф113. Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?

Ленинградская городская олимпиада по физике, 1971 г.

Ф114. Два шарика с массами m_1 и m_2 могут колебаться на пружинках одинаковой жесткости вдоль стержня, прикрепленного к бруску с массой M (рис. 2). Брусок лежит на горизонтальной плоскости. В начальный момент шарики притянуты друг к другу с помощью ниточки, сила натяжения которой равна T. Ниточку пережигают. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и плоскостью брусок не сдвинется с места?

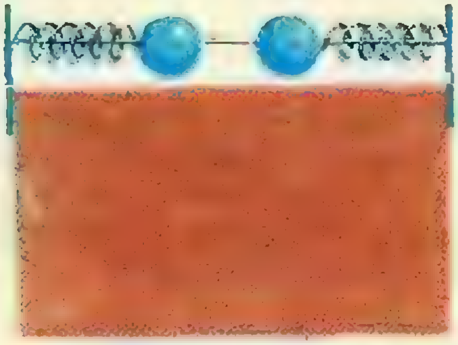


Рис. 2.

Г. Л. Коткин

Ф115. «Черный ящик» — коробка с неизвестной схемой внутри — имеет два вывода. Последовательно с ящиком включают сопротивление $R = 4$ *ом* и затем эту цепь подключают к источнику с э. д. с. $E_1 = 5$ *в* (рис. 3). При этом по цепи идет ток $I_1 = 1$ *а*. Если цепь подключить к источнику с э. д. с. $E_2 = 20$ *в*, то по ней будет идти ток $I_2 = 2$ *а*. Какая схема находится внутри «черного ящика»? Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

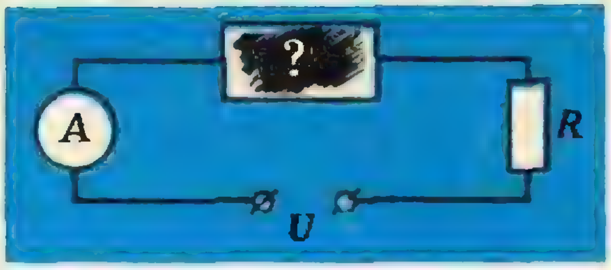


Рис. 3.

Я. А. Смородинский

Ф116. Если температура воздуха в цилиндре, показанном на рисунке 4, равна t_0 ($t_0 > 0$° С), то он остывает до температуры $\frac{t_0}{2}$ примерно за 30 *сек*. Поршень начинают вдвигать и выдвигать с некоторой частотой. В каком случае растает больше льда, окружающего цилиндр, за 50 ходов поршня, если они сделаны а) за 1 *мин*; б) за 1 ч; в) за 30 *сутки*?

Г. Л. Коткин

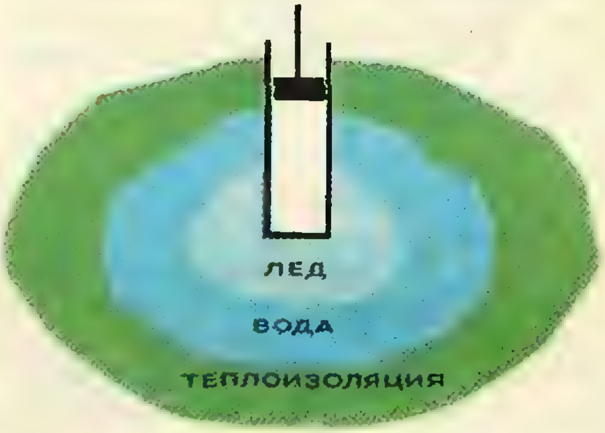


Рис. 4.

Ф117. По обледенелой дороге обычно идут, делая маленькие шаги. С какой шириной шага должен идти человек, не боясь упасть, если длина его ног равна 1 метру, а коэффициент трения подошв обуви о дорогу равен 0,1?

И. Ш. Слободецкий

ПРЕМИИ Кванта

Редакция журнала получила более 2000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1972 год.

Вот имена победителей нашего конкурса:

Дмитрий Григорьев — Ленинград, школа-интернат № 45 при ЛГУ;

Юрий Оболонков — Воронеж, школа № 58;

Эдуард Туркевич — Черновцы, школа № 9;

Михаил Прегер — Томск, школа № 51;

Аркадий Черняк — Минск, школа № 50;

Леонид Брагинский — Фрунзе, школа № 61;

Виктор Кривицкий — дер. Клетное Борисовского р-на Минской обл.;

Александр Григорян — Баку, школа № 211;

Григорий Зайцев — Гагра, школа № 2;

Иван Гричик — Давид-Городок Брестской обл., школа № 1;

Александр Жуков — Кировск Харцизского р-на Донецкой обл., школа № 11;

Анатолий Анищенко — Сарапул, школа № 13 Удмуртской АССР;

Евгений Губарев — Москва, школа № 144.

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М61-М63 и Ф72-Ф74.

М61

Два мудреца играют в новую игру, состоящую в следующем. Выписаны числа 0, 1, 2,..., 1024. Первый мудрец вычеркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычеркивает 256 из оставшихся чисел, затем снова первый вычеркивает еще 128, потом второй — еще 64 числа и т. д. Своим последним пятым ходом второй вычеркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как надо играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

Ответ: При правильной игре разность оставшихся чисел равна 32 (как говорят, «цена игры» равна 32).

На этот ответ наводят следующие соображения: первый игрок стремится к тому, чтобы разность между оставшимися числами была как можно больше, и он должен все время стараться максимально «разредить» остающееся множество чисел, а второму выгодно вычеркивать числа «с краев» (рис. 1). Эти соображения, конечно, не являются строгим доказательством. Многие читатели, руководствуясь не менее правдоподобными, на первый взгляд, соображениями, например, такими: первый должен вычеркивать числа из середины, чтобы оставались числа с большой разностью, получали неверные ответы: 1 или 5, или 6 и разные другие.

Для того чтобы полностью обосновать ответ, в этой задаче (как и при исследовании любой игровой ситуации) нужно доказать два утверждения: 1) как бы ни играл второй, первый может получить не меньше 32; 2) как бы ни играл первый, второй может потерять не больше 32.

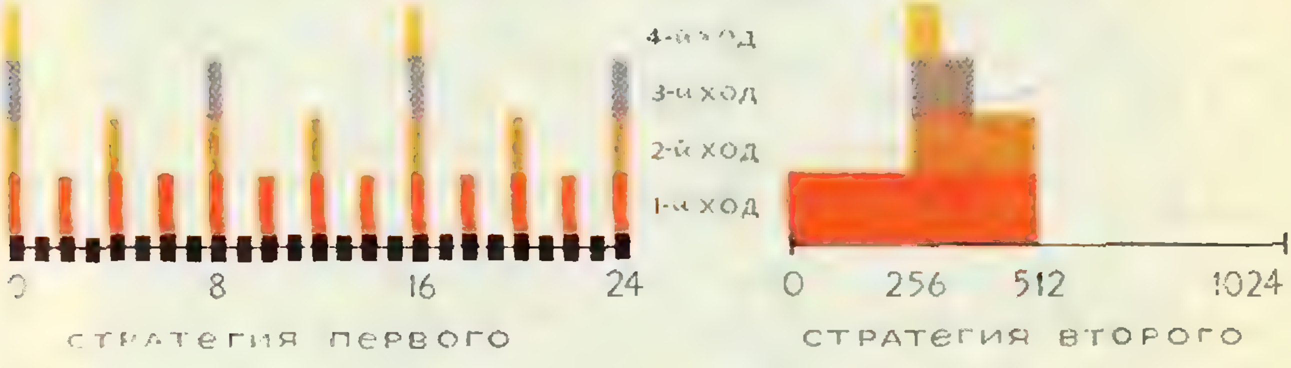


Рис. 1.

Для доказательства утверждения 1) мы укажем такую стратегию первого игрока, которая независимо от ходов второго гарантирует, что разность оставшихся двух чисел будет не меньше 32. Эта стратегия описывается очень просто: при каждом ходе вычеркивать числа через одно, то есть вычеркивать второе, четвертое, шестое,... число из оставшихся (мы считаем, что числа расположены в порядке возрастания). Тогда после 1-го хода разность между любыми соседними из оставшихся чисел будет не меньше 2, после 2-го — не меньше 4, после 3-го — не меньше 8, после 4-го — не меньше 16 и после 5-го — не меньше 32.

Для доказательства утверждения 2) достаточно указать стратегию второго игрока, которая независимо от ходов первого позволит ему проиграть не больше 32. Она состоит в следующем. Первым ходом он вычеркивает все числа, меньшие 512, или все числа, большие 512 (ясно, что или тех, или других осталось не больше 256). После этого разность между крайними из оставшихся чисел будет не больше 512. Аналогично вторым ходом он может добиться того, что все оставшиеся числа будут находиться только в одном из отрезков [0,256]; [256, 512]; [512, 768]; [768, 1024], то есть уменьшить разность между крайними числами по крайней мере до 256. Точно так же 3-м ходом он может уменьшить эту разность до 128, 4-м — до 64 и 5-м — до 32.

Наиболее четкие решения этой задачи прислали *Ю. Оболонков* из Воронежа и *В. Лузгин* из Москвы.

Разумеется, аналогично можно было бы доказать, что если игра состоит из n ходов и начинается с чисел 0, 1, 2,... 2^{2n}, то «цена игры» равна 2^n. Но детальное исследование подобной игры, начинающейся с произвольного множества чисел (не обязательно арифметической прогрессии) представляет собой существенно более трудную задачу.

М62

Докажите, что для любого нечетного числа a найдется такое натуральное b, что 2^b-1 делится на a.

Вот наиболее короткое доказательство.

Рассмотрим числа 2^0-1, 2^1-1,..., 2^a-1. Этих чисел $(a+1)$. Какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на a, потому что различных таких остатков существует всего a (это рассуждение называется «принцип Дирихле», о его применениях рассказывалось в статье А. Орлова в «Кванте» № 7). Пусть, скажем, числа 2^k-1 и 2^m-1 дают одинаковые остатки при делении на a и $k<m$. Тогда число $(2^m-1)-(2^k-1)=2^k(2^{m-k}-1)$ делится на a и, поскольку a нечетно, $2^{m-k}-1$ делится на a.

Точно так же доказывается и более общий факт: если натуральные числа a и c взаимно просты, то найдется такое натуральное b, что c^b-1 делится на a. Многие читатели заметили, что утверждение задачи вытекает из следующей теоремы Эйлера*): для любых натуральных a и c число $c^{\varphi(a)+1}-c$ делится на a, где $\varphi(a)$ — количество натуральных чисел, меньших a и взаимно простых с ним, и даже приводят формулу для вычисления «функции Эйлера»

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r})=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})\times$$

$$\times(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\cdots(p_r^{\alpha_r}-p_r^{\alpha_r-1}).$$

Правильные решения прислали *А. Черняк* из Минска, *Э. Туркевич*, *Ш. Слепой* из Черновцов, *Г. Левин* из Куйбышева, *Н. Демиденко* из д. Колыбовка Гомельской обл., *А. Пухальский* из Москвы, *Ю. Семенюк* из п. Мирный Краснодарского края и другие читатели.

М63

Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? (Например, такое расположение плиток, как на рисунке 2, не годится, так как здесь есть «шов» AB.)

Предположим, что нам удалось выложить квадрат 6×6 плитками 1×2 без «швов». Тогда каждая из десяти прямых, разрезающих этот квад-

---

*) См., например, книгу И. М. Виноградова «Основы теории чисел» ГИТТЛ, М., 1953 или другой учебник по теории чисел.

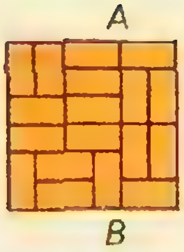


Рис. 2.

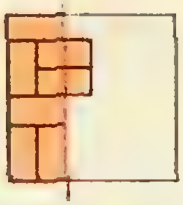


Рис. 3.

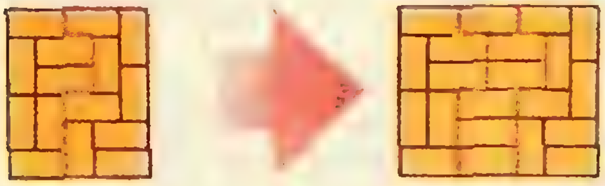


Рис. 4.

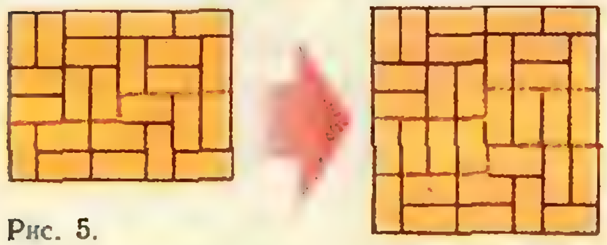


Рис. 5.

рат на клетки 1×1, должна пересекать по крайней мере одну плитку 1×2. Нетрудно доказать, что каждая такая прямая пересекает обязательно четное число плиток. Действительно, она отрезает от квадрата 6×6 прямоугольник $6\times k$, состоящий из четного числа клеток 1×1; этот прямоугольник содержит некоторое количество целых плиток 1×2 и еще некоторое четное количество клеток 1×1 — половинок плиток, пересеченных прямой (рис. 3).

Но если каждая прямая пересекает не менее двух плиток, то общее число плиток должно быть не меньше $2\cdot 10=20$, а их всего 18.

Таким образом, мы доказали, что квадрат 6×6 разрезать требуемым образом на плитки нельзя.

Правильное решение этой задачи прислали *А. Костюрин* из Московской области, *И. Кашапов* из Уфы, *В. Шварц* из Ленинграда и другие. В большинстве из присланных писем обсуждается общий вопрос: когда прямоугольник $m\times n$ можно разрезать на плитки 1×2 без швов. Легко доказать, что прямоугольники $2\times n$, $3\times n$ и $4\times n$ разрезать таким образом нельзя. Если же $m\geqslant 5$, $n\geqslant 5$ и mn четно (последнее условие, разумеется, необходимо), то во всех случаях, кроме рассмотренного выше 6×6, нужное разбиение существует. Для доказательства достаточно придумать разбиение прямоугольников 5×6 и 6×8 и заметить, что из разбиения прямоугольника $m\times n$ легко получить разбиение прямоугольника $(m+2)\times n$ (рис. 4 и 5).

Н. Б. Васильев

Ф72

Почему в марте продолжительность дня меняется быстрее, чем в декабре?

Изменение продолжительности дня связано с углом наклона земной оси к плоскости орбиты движения Земли вокруг Солнца (≈23,5°). Если бы земная ось была перпендикулярна к плоскости орбиты, продолжительность дня практически не менялась бы.

Наклон оси в пространстве не меняется, а так как Земля вращается вокруг Солнца, то она видна с Солнца по-разному (рис. 6) — Солнце различное время освещает участки земной поверхности, и продолжительность дня не постоянна. Очевидно, что в декабре и июне, когда в северном полушарии продолжительность дня соответственно минимальна или максимальна, а северный полюс наклонен от Солнца или к Солнцу, положение земной оси относительно Солнца меняется очень медленно. Медленно меняется и продолжительность дня. В то же время в марте и сентябре положение оси меняется быстрее всего — быстрее всего меняется и продолжительность дня.

Интересно нарисовать примерный график зависимости продолжительности дня от времени года. Грубо — это синусоида (рис. 7). Скорость изменения продолжительности дня, очевидно, пропорциональна тангенсу уг-

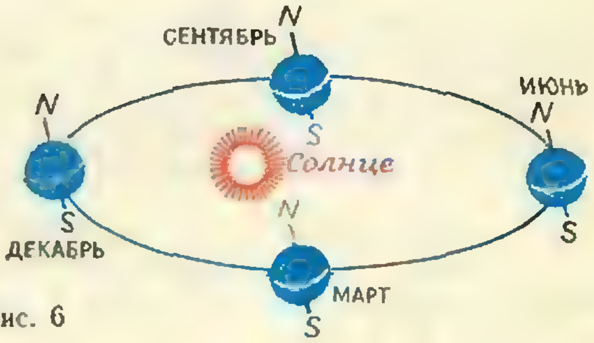


Рис. 6

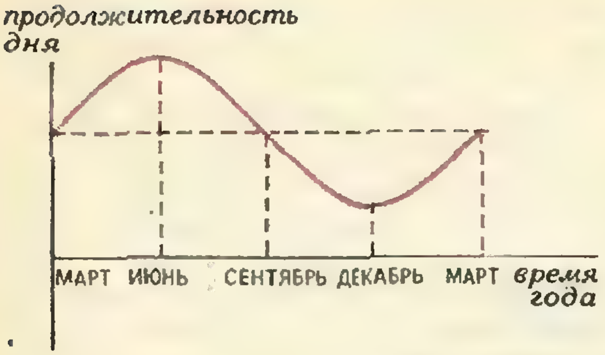


Рис. 7.

ла наклона касательной к графику. В декабре и июне касательная почти горизонтальна (она горизонтальна 22 июня и 22 декабря), а в марте и сентябре ее наклон максимален.

Правильное решение прислали *Ф. Тахватулин* и *З. Таракулов* (Ташкент).

Ф73

Внутрь стеклянной трубки налит раствор сахара. Нижний конец трубки затянут пленкой, проницаемой для воды, но не проницаемой для молекул сахара. Трубку погружают в сосуд с чистой водой до уровня раствора сахара и закрепляют в этом положении. Уровень жидкости в трубке при этом начинает подниматься и через достаточный промежуток времени устанавливается на некоторой высоте над уровнем воды в сосуде (рис. 8).

Чем объясняется это засасывание воды внутрь трубки? Откуда берется энергия для поднятия жидкости?

Если в сосуде, разделенном перегородкой, находятся по разные стороны перегородки два различных (или одинаковых) газа, то как только мы уберем перегородку, газы перемешаются так, что концентрация газовой смеси и давление во всех точках сосуда будут одними и теми же. Причем давление в сосуде будет равно сумме парциальных давлений, то есть давлений, которые были бы в сосуде, если бы весь объем сосуда занимал только один из этих газов (закон Дальтона). Но стоит перегородку сделать проницаемой только для одного из газов, и картина получится другой. Давление по разные стороны перегородки будет различным, причем будут одинаковыми парциальные давления газа, проходящего через перегородку.

Похожее явление есть и в жидкостях. Если два раствора с различной концентрацией раствореииого вещества разделены границей, через которую могут проходить как молекулы растворенного вещества, так и молекулы растворителя (например, они разделены пористой перегородкой), то через некоторое время — обычно довольно большое, концентрация раствора благодаря диффузии станет одинаковой. Это вы могли наблюдать, например, заваривая чай в чашке и не помешивая его ложечкой.

Иное дело, если жидкости разделены полупроницаемой перегородкой, через которую свободно проходит растворитель, но не проходят молекулы растворенного вещества. В этом случае растворитель будет переходить в раствор, и уровень жидкости в той части сосуда, в которой находится раствор, будет повышаться, пока не установится некоторая разность уровней между раствором и растворителем. При этом давление по разные стороны перегородки будет различным (рис. 9). В правой части сосуда, в которой находится раствор, давление на перегородку больше на величи-

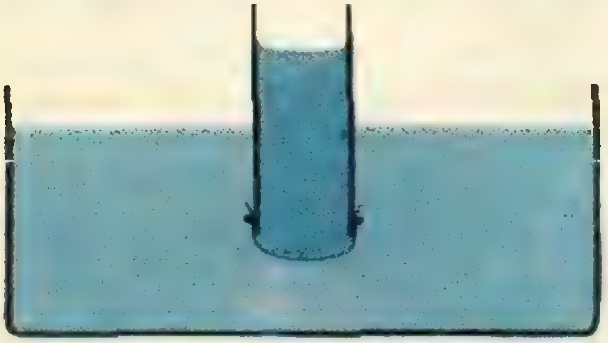


Рис. 8.

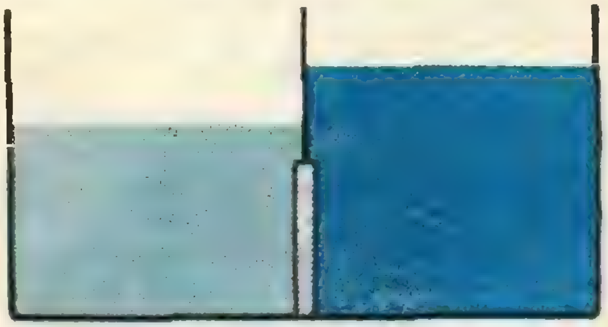


Рис. 9.

ну давления, оказываемого молекулами растворенного вещества. Это давление носит название осмотического давления. Условие равновесия жидкостей в сосудах — это не равенство гидростатических давлений по обе стороны перегородки, а равенство, грубо говоря, давлений молекул растворителя.

Молекулы растворенного вещества ведут себя подобно молекулам газа. Они стремятся занять как можно больший объем, передвинув перегородку (им это удалось бы, если бы перегородка была подвижной). Но так как перегородка закреплена, то смещается не она, а уровень раствора.

Аналогия между поведением молекул газа и молекул растворенного вещества полная. Если раствор слабый, то молекулы растворенного вещества находятся далеко друг от друга и слабо взаимодействуют друг с другом — так же как и молекулы идеального газа (они взаимодействуют друг с другом только сталкиваясь). Поэтому осмотическое давление p должно быть связано с объемом раствора V, температурой T и числом n молей растворенного вещества такой же формулой, как и давление идеального газа:

$$pV=nRT$$

(R — газовая постоянная).

Этот закон был открыт и доказан экспериментально Вант-Гоффом. Осмотическое давление не зависит от природы растворенного вещества и определяется лишь концентрацией раствора. Для сильных растворов (растворов большой концентрации) можно записать уравнение, подобное уравнению Ван-дер-Ваальса для реального газа. Если у нас имеются в растворе разные вещества, то, по аналогии с газами, осмотическое давление равно сумме осмотических парциальных давлений отдельных растворенных веществ. Аналогично с идеальным газом будет вести себя раствор в поле тяжести: именно таким же будет распределение числа молекул по высоте. Это позволило Перрену «взвесить» атом (см. статью М. П. Бронштейна «Как был взвешен атом», «Квант» № 2, 1970 г.).

Энергия на поднятие жидкости берется из тепловой энергии движения частичек растворенного вещества. Точно так же, как и настоящий газ, «газ» частичек растворенного вещества, расширяясь и совершая работу, охлаждается. При этом, конечно, охлаждается весь раствор.

Осмотическое давление играет очень важную роль в жизни человека, животных и растений. Оболочки многих органов представляют собой полупроницаемую перегородку — например, стенки кровеносных сосудов и кишечника, поверхность корней растений и так далее. Именно осмотическое давление обусловливает обмен веществ.

Эту задачу правильно решили многие читатели: *В. Соколов* (пос. Мышанск Гомельской обл., БССР), *С. Арасланова* (пос. Нижнеивкино Куменского р-на Кировской обл.), *Н. Федин* (Омск), *Н. Коленко* (Бондар Одесской обл.), *Н. Егоров* (с. Майя Мечинокангаласского р-на, ЯАССР), *М. Козловский* (Москва), *С. Панфинь* (Новосибирск), *П. Хмара* (Ворошиловград), *А. Фиалков* (Караганда), *Т. Рудакова* (Иркутск), *О. Ким* (Ульяновск), *В. Тапезян* (с. Мщарское Гудаутского р-на, Абхазская АССР), *К. Кириллов* (Минусинск Красноярского края), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл., УССР), *М. Максименко* (Балаклая Харьковской обл.), *А. Верещага* (Орехов Запорожской обл., УССР), *С. Иванов* (Москва).

Ф74

Два конденсатора включены последовательно. Первый имеет емкость C_1 и рассчитан на максимальное напряжение U_1, второй — емкость C_2 и рассчитан на напряжение U_2. К какому напряжению можно подключить эту батарею конденсаторов?

Так как конденсаторы соединены последовательно, то их заряды одинаковы, а емкость батареи равна $C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Если на батарею конденсаторов подано напряжение U, то ее заряд будет равен $q=CU=$ $=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U$. Этот заряд не должен превышать максимальный заряд, на который рассчитан каждый из конденсаторов: $q_1=C_1U_1$ и $q_2=C_2U_2$. Поэтому должны выполняться неравенства

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_1U_1$$

и

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_2U_2.$$

Ясно, что заряд конденсаторов не должен превышать меньшего из возможных максимальных зарядов конденсаторов. Пусть для определенности

$$q_1=C_1U_1<q_2=C_2U_2.$$

Тогда

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_1U_1$$

и

$$U\leqslant\frac{C_1+C_2}{C_2}U_1.$$

Если $C_1U_1=C_2U_2$, то мы получаем естественный результат:

$$U\leqslant\frac{C_2\frac{U_2}{U_1}+C_2}{C_2}U_1=U_1+U_2.$$

Правильное решение этой задачи прислали *В. Чупик* (Торжок Калининской обл.), *Н. Николаева* (с. Белая Глина Краснодарского края), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл.), *С. Иванов* (Москва), *В. Соколов* (пос. Мышанск Гомельской обл., БССР), *Н. Федин* (Омск), *Н. Коленко* (Бондар Одесской обл.), *Н. Алексеенко* (Кировск Мурманской обл.), *А. Старченко* (пос. Петропавловка Петропавловского р-на Днепропетровской обл.), *М. Козловский* (Москва), *П. Хмара* (Ворошиловград), *Е. Головко* (Ставрополь), *В. Пархоменко* (д. Поколюбичи Гомельской обл.), *Ю. Батыгин* (Москва), *М. Рамазанов* (Махачкала, ДАССР), *Е. Свиридчук* (Ровенки Ворошиловградской обл.), *Т. Селина* (с. Салтыково Пензенской обл.), *В. Сычев* (Алга Актюбинской обл.), *А. Костюрин* (пос. Красново Московской обл.), *К. Кириллов* (Минусинск Красноярского края).

И. Ш. Слободецкий

ИГРА НА ПЛОСКОСТИ

На плоскости нарисовано несколько точек (вершин). Некоторые из них соединены отрезками. Вася и Петя играют в такую игру: они отмечают поочередно вершины — Вася крестиками, а Петя нуликами. После того как все вершины отмечены, Вася подсчитывает, сколько у него «своих» отрезков, то есть таких отрезков, у которых обе вершины отмечены крестиками, а Петя — сколько отрезков у него. Выигрывает тот, у кого отрезков больше. Исследуйте, как нужно играть в эту игру. Кто может обеспечить себе выигрыш или ничью? Разберите следующие случаи:

а) когда нарисован многоугольник;

б) когда у нарисованной фигуры в каждой вершине сходится ровно k отрезков;

в) когда в разных вершинах сходится разное число отрезков.

Л. Лиманов

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Дано уравнение:

$$mf\left(\frac{a+x}{c+x}\right)+nf\left(\frac{a-x}{c-x}\right)=kx.$$

$$(m\neq n).$$

Определить функцию $f(x)$.

Я. Килимник

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

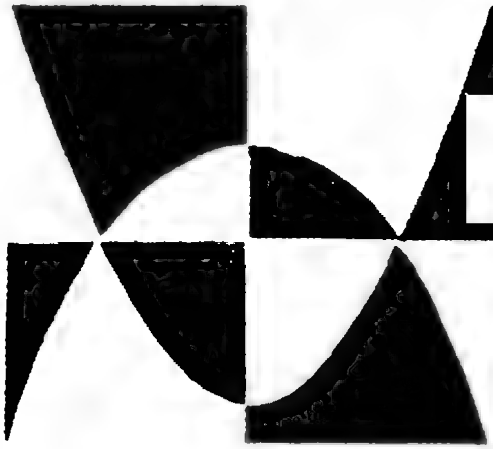
В текущем учебном году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот отдел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы очень благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь некоторые темы, которые имеют принципиальное значение и в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач, и обычно вызывают затруднения у поступающих.

Например, мы предполагаем рассказать о равносильности неравенств, о решении систем нелинейных уравнений, о задачах на комбинации пространственных тел, о графическом методе решения некоторых задач на составление уравнений и т. д. По физике будут опубликованы статьи, касающиеся таких вопросов, как кинематическое уравнение движения, решение задач на равновесие тел, тепловые процессы, законы тока и другие.

Эти статьи будут содержать по возможности подробное изложение теоретического материала, сопровождаться разбором задач, взятых из практики вступительных экзаменов.

Мы предполагаем также в порядке информации помещать образцы вариантов по математике и физике, предлагавшихся в 1971 году на вступительных экзаменах в различных вузах страны. Эти варианты будут снабжены только ответами (или указаниями) — надеемся, что читателям будет интересно самостоятельно попробовать свои силы на решении конкурсных задач.



КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

М. С. Атамукас

Квадратным трехчленом называется многочлен второй степени общего вида

$$ax^2+bx+c, \qquad a\neq 0.$$

На вступительных экзаменах по математике задачи, прямо или косвенно связанные с квадратным трехчленом, предлагаются довольно часто. Да это и не удивительно — в школьной программе уделяется много места и времени изучению квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

выяснению свойств квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c.$$

Эта функция встречается и в физике; например, при описании движения материальной точки, брошенной наклонно к горизонту.

Школьники, конечно, хорошо знают все формулы, относящиеся к квадратному трехчлену, умеют они и изобразить график квадратичной функции — параболу. Однако, когда речь идет о решении конкретной задачи, большинство пытается действовать чисто аналитически, привлекая лишь формулы. Между тем очень часто использование геометрических соображений позволяет получить ответ проще и быстрее.

Мы покажем на нескольких примерах, как важно бывает при решении задач мыслить одновременно и на алгебраическом, и на геометрическом языках.

Для того чтобы проверить, насколько хорошо вы знакомы со свойствами квадратного трехчлена, рассмотрим сперва такую задачу (она предлагалась на устных экзаменах в МГУ).

1. *На рисунке 1 изображено несколько графиков квадратных трехчленов. Рисунок приблизительный, масштаб не указан. Для каждой из этих парабол определить знаки соответствующих коэффициентов a, b и c.*

Возьмем, например, параболу 4; она является графиком некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Так как ветви этой параболы направлены вверх, то коэффициент $a>0$. (Докажите! Многие поступавшие объясняли это так: «В учебнике доказы-

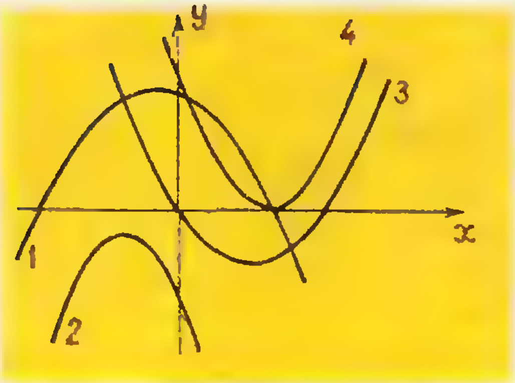


Рис. 1.

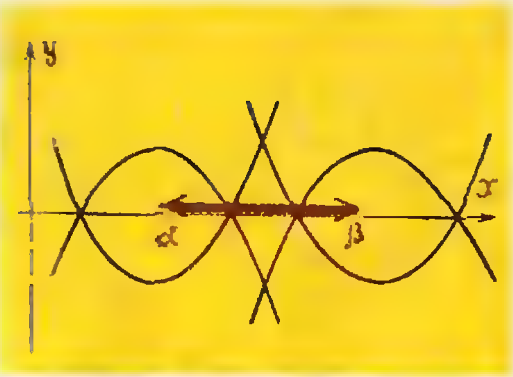


Рис. 2.

вается, что если $a>0$, то парабола направлена вверх». Убедительно ли такое объяснение?). Далее, коэффициент c равен значению функции y в точке $x=0$, то есть $c=f(0)$. Из рисунка видно, что парабола 4 пересекает положительную полуось ординат, а потому $c>0$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{b}{2a}$; из рисунка ясно, что она положительна. Мы уже знаем, что $a>0$, и, следовательно, $b<0$.

Ответ: $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Остальные случаи, представленные на рисунке 1, читатели могут разобрать самостоятельно.

Во многих задачах необходимо выяснить поведение квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ на заданном промежутке (α, β), описать расположение корней этого трехчлена относительно фиксированной точки $x=\gamma$ оси абсцисс и т. д. В этих задачах геометрический язык делает рассуждения простыми и наглядными (и притом вполне строгими!).

2. *На оси абсцисс указан промежуток* $\alpha<x<\beta$. *При каких* a, b *и* c *уравнение*

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq0, \quad b^2-4ac>0$$

имеет на этом промежутке только один корень?

Иными словами, надо выяснить, при каких a, b и c график функции $f(x)=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс на промежутке $\alpha<x<\beta$ ровно один раз.

Если пытаться решить этот вопрос аналитически, с помощью формул для корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена, то условия, при которых только один корень лежит между числами α и β, записываются весьма громоздко. Геометрический же подход дает возможность получить это условие сразу и в простом виде.

Представим себе, как может вести себя график трехчлена, удовлетворяющего поставленному в задаче условию; очевидно, возможно одно из четырех положений, представленных на рисунке 2. Заметим, далее, что в каждом из этих случаев значения функции $f(x)$ в точках α и β имеют противоположные знаки, то есть

$$f(\alpha)\,f(\beta)<0,$$

или, более подробно,

$$(a\alpha^2+b\alpha+c)(a\beta^2+b\beta+c)<0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ (при $a\neq0$, $b^2-4ac>0$) имело ровно один корень на интервале (α, β).

Итак графики помогли нам найти это условие. Они же подсказывают, как доказать, что это условие необходимое и достаточное.

Необходимость. Пусть уравнение имеет два корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), причем один корень лежит внутри интервала (α, β), а другой — вне его. Тогда одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2), а другое — вне его. Но в школьном учебнике доказывается, что значения функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ вне интервала (x_1, x_2) между корнями и значения функции внутри этого интервала имеют противоположные знаки. Следовательно, $f(\alpha) f(\beta)<0$.

Достаточность. Пусть числа $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имеют разные знаки. Тогда *) $b^2-4ac>0$, уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2, и значения функции внутри интервала (x_1, x_2) и вне его имеют противоположные знаки. Поэтому только одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2). Но это означает, в свою очередь, что только одно из чисел x_1, x_2 лежит внутри интервала (α, β).

Понятно, что квадратичная функция

$$y=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0, \quad b^2-4ac=0,$$

имеет лишь один корень $x_0=-\frac{b}{2a}$, и он лежит на промежутке (α, β), если $\alpha<-\frac{b}{2a}<\beta$.

Применим изложенные только что соображения для решения следующей задачи, взятой из практики устных экзаменов.

3. *Доказать, что квадратный трехчлен*

$$f(x) = (x-a)(x-b) + \lambda(x-c)(x-d)$$

имеет действительные корни при любом действительном λ, *если известно, что ровно одно из чисел* c, d *лежит между* a *и* b.

Заметим, что

$$f(c)=(c-a)(c-b), \quad \text{а} \quad f(d)=(d-a)(d-b).$$

Согласно условию, одно из этих значений положительно, а другое — отрицательно. Следовательно, трехчлен имеет два действительных корня, причем один из них лежит на интервале (a, b), а другой вне его.

Рассматривая графики различных квадратных трехчленов, легко заметить одно важное свойство: максимальные и минимальные значения квадратного трехчлена на отрезке $[\alpha, \beta]$ могут достигаться только в трех следующих точках: в точке $x=-\frac{b}{2a}$, если, конечно, она принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$; в точке α; в точке β (в концах отрезка). Докажем это; будем считать, что $a>0$ (случай $a<0$ разбирается аналогично).

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Воспользовавшись такой записью, нетрудно показать, что при $a>0$ функция $f(x)$ в точке $x=-\frac{b}{2a}$ имеет абсолютный минимум, равный $c-\frac{b^2}{4a}$; на интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ монотонно убывает, а на интервале $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ монотонно возрастает.

---

*) Проверьте самостоятельно, что из $f(\alpha)f(\beta)<0$ следует $b^2-4ac>0$

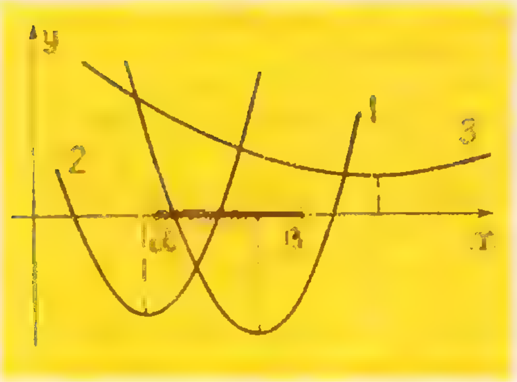


Рис. 3.

Поэтому, если

$$\alpha \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant \beta,$$

то функция $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ принимает наименьшее значение $c-\frac{b^2}{4a}$ в точке $-\frac{b}{2a}$ (см. график *1* на рисунке 3).

Наибольшее значение, в силу монотонности, достигается в одном из концов интервала.

Пусть теперь точка $-\frac{b}{2a}$ находится вне отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. графики *2*, *3* на рисунке 3).

Тогда отрезок $[\alpha, \beta]$ принадлежит одному из интервалов монотонности, и, следовательно, минимальное значение принимается в одном из его концов, а максимальное — в другом.

Попытайтесь теперь сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня на заданном промежутке $\alpha<x<\beta$.

Замеченное свойство квадратного трехчлена облегчит нам решение следующих задач.

4. (МГУ, мехмат, 1970). *При каких значениях параметра* α *неравенство*

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\alpha\sin x\cos x\geqslant 0$$

выполняется для всех x*?*

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+\alpha \sin x\cos x=$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+\alpha\sin x\cos x=$$

$$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x]+\alpha\sin x\cos x=$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{\alpha}{2}\sin 2x.$$

Обозначим $\sin 2x$ через y; очевидно, $-1\leqslant y\leqslant 1$, коэффициент при y^2 отрицателен, поэтому на отрезке $[-1; 1]$ минимум квадратного трехчлена $-\frac{3}{4}y^2+\frac{\alpha}{2}y+1$ достигается в концах отрезка.

Следовательно, неравенство

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{\alpha}{2}y+1\geqslant 0$$

выполняется на всем отрезке $[-1; 1]$ в том и только в том случае, когда трехчлен неотрицателен в концах отрезка:

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}(-1)^2+\frac{\alpha}{2}(-1)+1\geqslant 0,\\ -\frac{3}{4}\cdot 1^2+\frac{\alpha}{2}\cdot 1+1\geqslant 0\end{cases}$$

то есть $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ и $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$.

Ответ: данное неравенство выполняется для всех x при $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

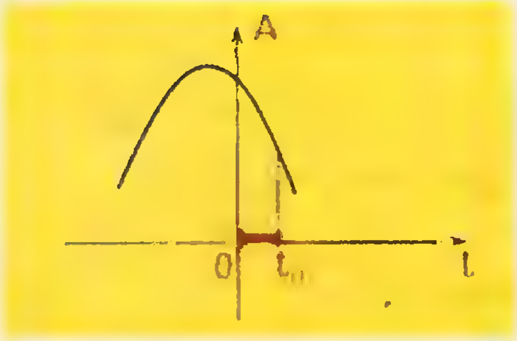


Рис. 4. Минимум при $t = t_0$.

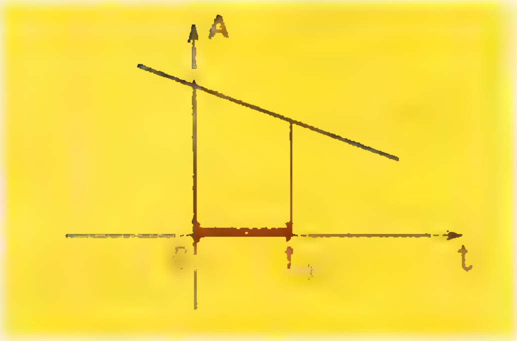


Рис. 5. Минимум при $t = t_0$.

5. (ЛГУ, матмех, 1966). *Ракета должна пройти отрезок, равный H. Она начинает движение с постоянной скоростью v и в любой момент времени может включить дополнительный двигатель, дающий постоянное ускорение a ($a>0$) и работающий до конца пути. Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения, а при включенном дополнительном двигателе — квадрату времени с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно (k_1, $k_2>0$). Какое время ракета должна двигаться с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?*

Пусть τ — время движения ракеты с постоянной скоростью, t — время движения с включенным дополнительным двигателем, A — расход топлива. Из уравнений:

$$H = v\tau + vt + \frac{at^2}{2}, \qquad A = k_1\tau + k_2t^2$$

находим

$$\tau = \frac{1}{v}\left(H - vt - \frac{at^2}{2}\right), \qquad A = \left(k_2 - \frac{ak_1}{2v}\right)t^2 - k_1t + \frac{k_1H}{v}. \qquad (*)$$

Заметим, что $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где t_0 — положительный корень уравнения

$$H = vt + \frac{at^2}{2}, \qquad t_0 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}.$$

(Это время полета в том случае, если двигатель включен с самого начала.) Нужно найти минимум функции $A = A\ (t)$ ($*$), заданной на отрезке $[0,\ t_0]$.

1) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} < 0$. Вершина параболы $A = A\ (t)$ имеет абсциссу

$$t^* = \frac{k_1}{2\left(k_2 - \frac{ak_1}{2v}\right)} < 0.$$

Парабола расположена так, как указано на рисунке 4. Минимум при $t = t_0$.

2) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} = 0$; $A = -k_1t + \frac{k_1H}{v}$. Минимум при $t = t_0$ (рис. 5).

3) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} > 0$. Абсцисса вершины параболы

$$t^* = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} > 0.$$

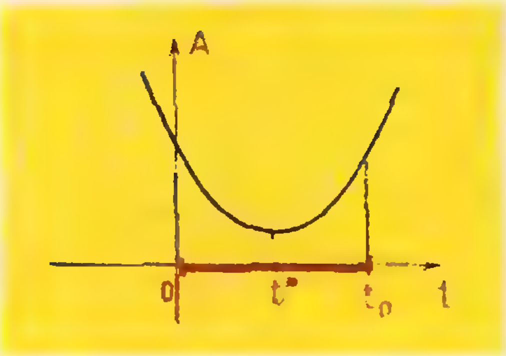


Рис. 6. Минимум при $t=t^*$.

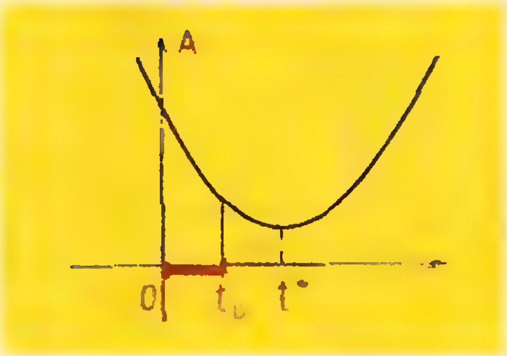


Рис. 7. Минимум при $t=t_0$.

Если $t^* \leqslant t_0$, то минимум при $t=t^*$ (рис. 6).
Если $t^* \geqslant t_0$, то минимум при $t=t_0$ (рис. 7).
Ответ: Если $2vk_2-ak_1>0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} \leqslant \frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a},$$

то

$$t=\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1}.$$

Если $2vk_2-ak_1 \leqslant 0$ или $2vk_2-ak_1>0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} > \frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a},$$

то

$$t=\frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a}.$$

Упражнения

1. Указать условия, при которых оба корня трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ меньше заданного числа α.

2. Указать условия, при которых данное число α лежит между корнями трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$.

3. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1968). Найти все те значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-2bx-1=0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

4. (МГУ, физфак, 1965). Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительны и больше a.

5. (МГУ, отделение биологии, 1969). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а его высота равна H. Определить высоту цилиндра, вписанного в этот конус и имеющего наибольшую боковую поверхность.

7. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1969). Указать все корни уравнения $x^2+1=\cos x$.

8. (МГУ, физфак, 1964). Найти все значения m, при которых выражение x^2+mx+m^2+6m будет отрицательно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $1<x<2$.

9. (МГУ, физфак, 1963). Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту со скоростью v_0. В самой верхней точке траектории снаряд разрывается на две равные по массе части, причем скорости частей тут же после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Одна половина снаряда упала на расстоянии S от места выстрела. Определить место падения второй половины, если известно, что она упала дальше первой. Считать, что полет снаряда происходит в безвоздушном пространстве.

И. А. Зайцев

Кинематика

Как вы решаете задачи на кинематику? Сколько формул вы помните? 5? 10? 15? Очень часто решение задач начинается с выписывания большого количества формул — формулы для пути, пройденного телом за *n*-ю секунду, формулы для отношения путей, пройденных телом за последовательные промежутки времени, формулы для разности квадратов скоростей тела и так далее. Затем эти формулы пытаются подставлять друг в друга, делить, множить... Иногда таким способом удается найти ответ. Но чаще всего задачи на кинематику — непреодолимая преграда. Это, пожалуй, один из самых трудных разделов для абитуриентов. Хотя должен быть одним из самых простых. Давайте разберемся в нем.

Будем сначала говорить о прямолинейном движении тела. Если прямую, вдоль которой оно движется, принять за ось координат OX (точка O — начало координат), то положение тела определяется его координатой x. При движении с постоянным ускорением координата тела меняется со временем по закону

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (*)$$

где x_0 — начальная координата тела (при $t=0$), v_0 — его начальная скорость и a — ускорение. Уравнение (*) и есть кинематическое уравнение движения тела. Конечно, уравнение (*) — проекция на ось x векторного уравнения для радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение центра масс тела (рис. 1). Поэтому проекция на ось OX тех векторных величин, которые направлены так же, как и ось OX, положительны, а тех, которые направлены в противоположную сторону,— отрицательны. Это нужно учитывать, подставляя эти величины в уравнение (*).

Подчеркнем еще раз: уравнение (*) — уравнение для координаты тела, а не для пути, пройденного им. Путь — положительная скалярная величина, которая не может уменьшаться. В то же время, координата тела может вести себя как угодно. Например, если v_0 положительно и $a=-a_0$ отрицательно (вектор скорости $\mathbf{v}_0$ направлен в ту же сторону

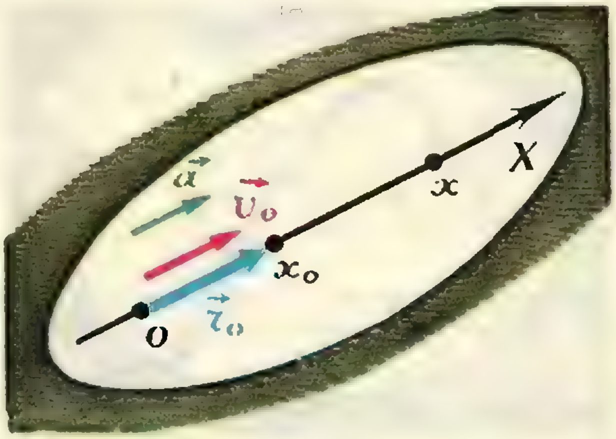


Рис. 1.

что и ось OX, а вектор ускорения $\mathbf{a}$ — в противоположную), то координата тела вначале будет увеличиваться, а затем уменьшаться. Это сразу видно из графика зависимости x от t (рис. 2). Через некоторое время после начала движения координата станет отрицательной. Только в том случае, когда тело движется в одну сторону, путь, пройденный телом, равен абсолютному значению изменения его координаты. Поэтому, если нам нужно найти путь, пройденный телом за какое-то время, приходится разбивать движение на участки, на которых тело двигалось в одну сторону, находить изменения координаты тела на этих участках и складывать их абсолютные величины. Но в этом нет необходимости, если нас интересуют другие величины — координата, время, скорость и ускорение. Нужно просто воспользоваться кинематическим уравнением движения (*).

Решим с его помощью следующую задачу.

Задача 1. Камень брошен вертикально вверх. Через какое время он упадет на землю?

Выберем ось координат, направленную вертикально вверх, с началом координат, связанным с землей. В этом случае $x_0=0$, $v_0>0$ и $a=-g<0$. Поэтому

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

В момент падения на землю $x=0$. Подставляя это значение x в кинематическое уравнение движения камня (1), получим уравнение

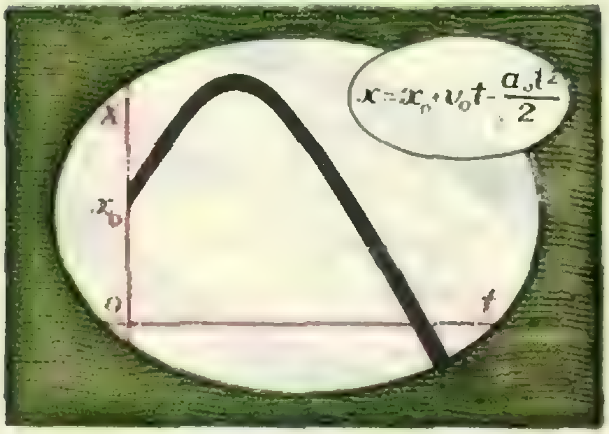


Рис. 2.

$$gt^2-2v_0t=0,$$

решая которое, найдем

$$t_1=0,\ t_2=\frac{2v_0}{g}.$$

Значение $t_1=0$ соответствует моменту бросания камня; t_2 — время движения камня.

Конечно, уравнение движения определяет координату тела в любой момент времени. Воспользовавшись этим, найдем, например, тот момент времени, когда камень находился на высоте h. Подставляя в уравнение движения $x=h$, получим

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gh}}{2h},$$

$$t_2=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2-2gh}}{2h}.$$

На высоте h тело было дважды — в момент t_1 при подъеме и в момент t_2 при спуске (конечно, $2gh\leqslant v_0^2$, так как максимальная высота подъема тела $h_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}$).

Часто нам нужно знать скорость тела в разные моменты времени. Так как $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$, то для проекции скорости на ось OX имеем

$$v_x=v_0+at. \qquad (**)$$

Это второе кинематическое уравнение движения — уравнение скорости. Оно, конечно, тоже справедливо во все время движения тела, если только ускорение a было постоянным.

Найдем, например, скорость камня в момент падения на землю. В этом случае $a=-g$, $t=t_2=\frac{2v_0}{g}$. Поэтому

$$v(t_2)=v_0-g\frac{2v_0}{g}=-v_0,$$

то есть в момент падения на землю скорость камня равна начальной, но направлена в противоположную сторону.

Уравнение (**) позволяет легко найти время $t_{\text{п}}$ подъема камня. Так как в точке максимального подъема скорость камня равна нулю, то

$$0=v_0-gt_{\text{п}}.$$

Отсюда $t_{\text{п}}=\frac{v_0}{g}$. Время подъема камня равно половине времени полета.

Мы видим, что два уравнения — для координаты и для скорости позволяют получить ответ на любой вопрос относительно движения камня. Именно их и нужно всегда помнить.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло $^1/_3$ своего пути. Сколько секунд (n) и с какой высоты (h) падало тело?

Примем за начало координат точку бросания, а ось координат направим вертикально вниз. Тогда координата тела зависит от времени по закону

$$x=\frac{gt^2}{2}$$

($v_0=0$, $x_0=0$, $a=g$). Если тело падало n секунд, время падения равно $n\cdot\tau$ ($\tau=1$ *сек*), и

$$h=\frac{gn^2\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Через время $(n-1)\tau$ после начала движения координата тела была равна $\frac{2}{3}h$. Поэтому

$$\frac{2}{3}h=\frac{g(n-1)^2\tau^2}{2}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем,

$$n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\approx 5{,}45, \qquad h\approx 145 \text{ м}.$$

Можно было выбрать и другую систему координат, например, связанную с землей и осью координат, направленной вверх. Тогда уравнение движения тела было бы таким:

$$x=h-\frac{gt^2}{2} \quad (x_0=h,\ v_0=0,\ a=-g).$$

Здесь при $t=n\tau$ $x=0$, а при $t=(n-1)\tau$ $x=\frac{1}{3}h$.

Можно выбрать и еще одну систему координат — с началом в точке бросания и осью, направленной вверх. В этой системе

$$x=-\frac{gt^2}{2};$$

при $t=n\tau$ $x=-h$, при $t=(n-1)\tau$ $x=-\frac{2}{3}h$.

В данной задаче выбор системы координат не очень существен, но часто, удачно выбрав систему координат, можно значительно упростить решение.

Решим, например, такую задачу.

Задача 3. С каким промежутком времени τ оторвались от крыши две дождевые капли, если через время t_0 после начала падения второй капли расстояние между каплями было равно l?

Эту задачу можно, конечно, решать в системе координат, связанной с крышей (сделайте это сами).

Но удобнее перейти к системе координат, связанной со второй каплей. Так как капли падают с одинаковым ускорением относительно земли, то их относительное ускорение равно нулю: капли движутся друг относительно друга равномерно. Их относительная скорость равна скорости первой капли относительно земли в момент отрыва второй капли $v_0=g\tau$. Уравнение движения первой капли в системе координат, связанной со второй, выглядит так:

$$x=v_0t+x_0,$$

где $x_0=\frac{g\tau^2}{2}$. При $t=t_0$ $x=l$, то есть

$$l=g\tau t_0+\frac{g\tau^2}{2}.$$

Решив это уравнение, получим ответ:

$$\tau=\sqrt{t_0^2+\frac{l}{g}}-t_0.$$

Решим еще такую задачу.

Задача 4. Снаряд взрывается в некоторой точке траектории. На какой поверхности будут находиться осколки снаряда через некоторое время t после взрыва?

В системе координат, связанной с точкой взрыва снаряда и движущейся с той же скоростью, что и снаряд, и с тем же ускорением относительно земли, осколки снаряда движутся равномерно. Поэтому через время t каждый из них будет находиться на расстоянии v_0t от точки взрыва (v_0 — скорость осколков в нашей системе координат), то есть все они будут находиться на сфере радиуса v_0t с центром в точке взрыва снаряда.

Попробуйте решить эту задачу в системе координат, связанной с землей.

В заключение разберем случай, когда тело движется по криволинейной плоской траектории с постоянным ускорением **a**. В этом случае, спроектировав скорость $\mathbf{v}_0$ и ускорение **a** тела на два взаимно перпендикулярных направления — на оси OX и OY, получим два однотипных уравнения движения:

$$x = x_0 + v_{OX}t + \frac{a_xt^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{OY}t + \frac{a_yt^2}{2},$$

и два уравнения для скорости v тела:

$$v_x = v_{OX} + a_xt, \quad v_y = v_{OY} + a_yt.$$

(Если траектория движения тела не лежит в одной плоскости, то мы должны записать три уравнения.)

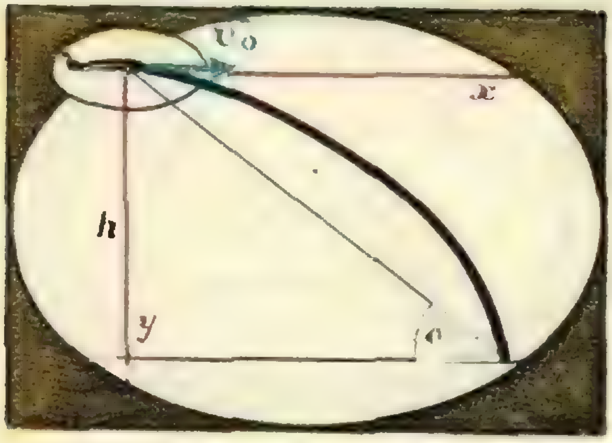


Рис. 3.

Решим с помощью этих уравнений следующую задачу.

Задача 5. Самолет летит горизонтально на высоте h со скоростью v_0. Летчик должен сбросить бомбу в цель, лежащую впереди самолета. Под каким углом α к горизонту он должен видеть цель в момент сбрасывания бомбы?

Выберем неподвижную относительно земли систему координат с началом координат в точке, в которой находился самолет в момент сбрасывания бомбы (рис. 3). Начальная скорость бомбы равна $\mathbf{v}_0$ и горизонтальна, а ускорение $\mathbf{a}=\mathbf{g}$ направлено вдоль оси y. Поэтому

$$x = v_0t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения бомбы на землю в выбранной нами системе координат $x=S$, а $y=h$ (см. рис. 4), поэтому

$$S = v_0t_0,$$

$$h = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Исключая t_0, получим

$$S = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{S} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Решим еще одну задачу.

Задача 6. Камень бросают горизонтально со скоростью v_0 с горы, уклон которой равен α. На каком

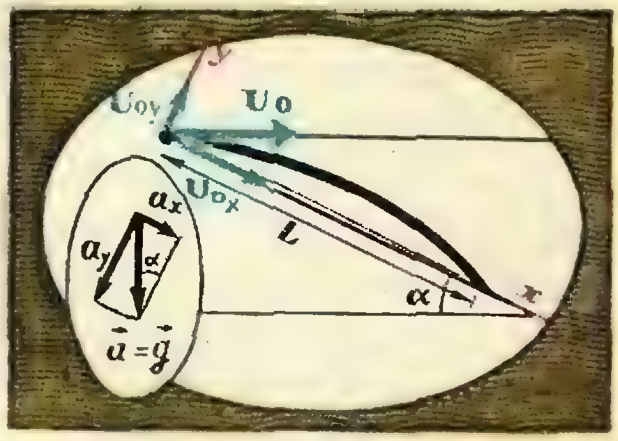


Рис. 4.

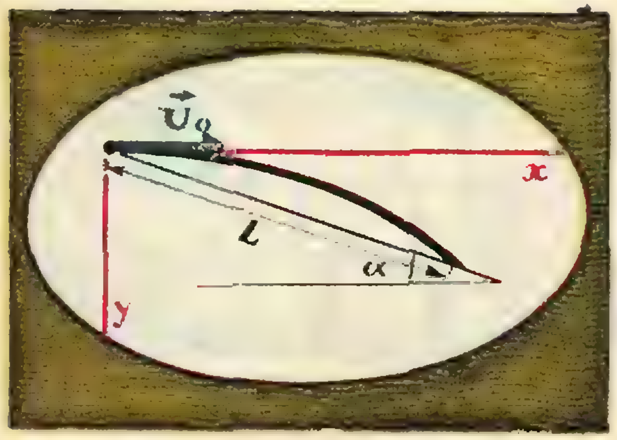


Рис. 5.

расстоянии L от места бросания камень упадет на землю?

В системе координат, показанной на рисунке 4, положение камня в момент времени t определяется координатами

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения на землю $x = L\cos\alpha$, а $y = L\sin\alpha$, то есть

$$L\cos\alpha = v_0 t_0,$$

$$L\sin\alpha = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Можно было бы выбрать и другую систему координат, например, показанную на рисунке 5. Иногда это бывает удобно. В этой системе координат

$$v_{0X} = v_0\cos\alpha, \quad v_{0Y} = v_0\sin\alpha,$$

$$a_x = g\sin\alpha \quad \text{и} \quad a_y = -g\cos\alpha.$$

Поэтому

$$x = v_0\cos\alpha t + \frac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2},$$

$$y = v_0\sin\alpha t - \frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}.$$

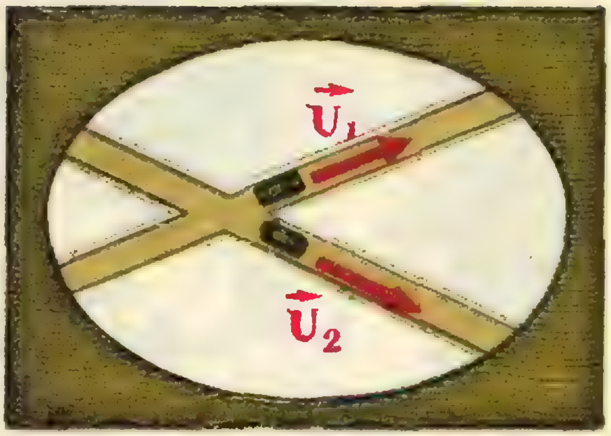


Рис. 6.

Подставляя в эти уравнения значения x и y при $t=t_0$ ($x=L$, $y=0$) и решая их совместно, найдем ответ.

Упражнения

1. Камень свободно падает с высоты h. За какое время он проходит последний метр своего пути?

2. Камень, брошенный вертикально вверх, на высоте h побывал дважды с интервалом времени τ. С какой начальной скоростью он был брошен?

3. Камень бросают вертикально вверх со скоростью v_0 с высоты h от поверхности земли. В этот же момент с земли со скоростью u_0 бросают вертикально другой камень. Через какое время камни окажутся на одной высоте? Какова будет эта высота?

4. Цель, находящаяся на вершине холма, видна под углом α к горизонту с того места, где находится орудие. Как должен быть направлен ствол орудия к горизонту, чтобы попадание было точным, если начальная скорость снаряда v_0, а высота холма равна h?

5. Камень бросают в реку. Какой будет картина волн? Нарисуйте ее.

6. Два автомобиля одновременно прошли перекресток и едут по улицам, составляющим угол α друг с другом (рис. 6). Скорости автомобилей равны v_1 и v_2. Через какое время расстояние между автомобилями будет равно l?

Указание. Удобно выбрать систему координат, связанную с одним из автомобилей. В ней скорость второго автомобиля постоянна и равна

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1).$$

Е.Я.Гик

шахматно-математические заметки

Конь Аттилы

Совсем не обязательно быть шахматистом, чтобы знать, какая шахматная фигура самая удивительная. Конечно, это конь. Не случайно выражение «ход конем» стало крылатым и прочно вошло в наш быт. А гроссмейстер-остроумец С. Тартаковер прямо считал, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем». Вот почему, переходя от шахматной доски к фигурам, хочется прежде всего остановиться на задачах, в которых участвует конь.

Несомненно самой трудной и интересной среди них является знаменитая задача, которая так и называется «Ход конем».

Требуется обойти конем все поля шахматной доски, не побывав дважды ни на одном из них.

В свое время эта задача привлекла серьезное внимание таких крупных математиков, как Эйлер, Муавр, Вандермонд, Гамильтон. Первым ее подробно исследовал великий Эйлер и поэтому часто она носит его имя. Сам Эйлер сначала был уверен в том, что задача не решается, и лишь позднее разработал этот вопрос математически.

Однако до сих пор не удалось найти общего метода решения и установить их число. Доказано лишь, что оно превышает 31 миллион и не больше чем C_{168}^{63} (число сочетаний из 168 элементов по 63, состоит из ста цифр).

Еще со времен Эйлера известен так называемый «раздельный ход коня». Он заключается в нахождении маршрута по половине доски, его симметричном дублировании и соединении обоих маршрутов (рис. 1).

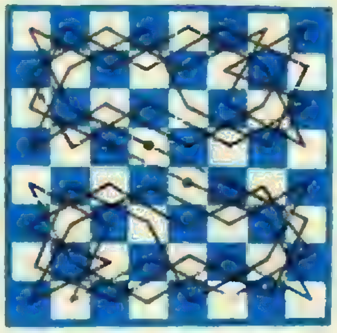


Рис. 1.

Приведенный маршрут замкнут — с конечного поля e4 конь в один ход может вернуться на начальное c5. Из этого следует существование решения для любого начального поля.

Многие составители графиков «хода коня» стремились внести в свое занятие, насколько это возможно, эстетический элемент и достигли довольно любопытных результатов. Вот четыре наиболее достопримечательных примера этого рода (рис. 2а, б, в). Первый изображает крест, второй — букву *N* (Наполеон), график третьего автора напоминает вазу, а последний пример представляет собой внутренний вид цветка, части которого расположены в высшей степени симметрично (рисунок на обложке; здесь, кстати, ход коня не замкнут).

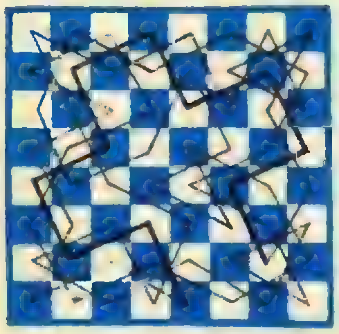


Рис. 2*а*. Крест.

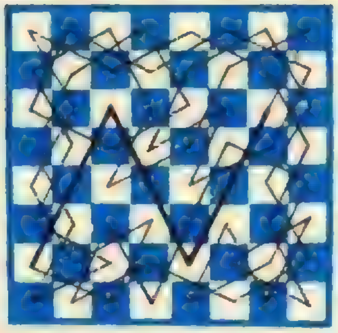


Рис. 2*б*. *N* (Наполеон).

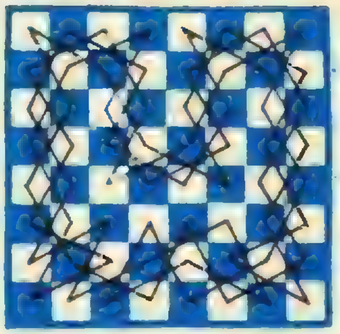


Рис. 2*в*. Ваза.

Как уже говорилось, общего алгоритма для «хода коня» пока не найдено. Однако на практике всегда оправдывается следующее правило, хотя оно и не подтверждено теоретически.

Коня следует всякий раз ставить на поле, из которого он может совершить наименьшее число прыжков на еще не пройденные поля; если таких полей несколько, то разрешается выбирать любое из них.

Применение этого правила на практике настолько эффективно, что с его помощью конем можно обойти всю доску даже в том случае, если несколько начальных ходов сделано произвольно. Например, на рисунке 3 конь уже сделал 40 ходов (числа в клетках соответствуют номерам ходов). В этой довольно трудной ситуации, пользуясь сформулированным правилом, коню удается благополучно закончить путешествие. С поля 40 он мог бы пойти (кроме поля 41) на поля 43, 45, 49 и 59 (рис. 4). Из них поле 43 «связано» с тремя свободными клетками: 42, 44 и 60. По три хода можно сделать и с каждого из полей: 45, 49 и 59. Что же касается поля 41, то с него имеется только два свободных выхода, а именно: на 42 и 48; этим и объясняется выбор поля 41.

При следующем ходе возникает вопрос относительно полей 42 и 48. Из них второе связано с четырьмя свободными клетками, а первое только с одной — 43. С поля 43 у коня выбор между полями 44 и 60, причем каждое из них связано с тремя свободными. Не нарушая правила, можно выбрать любое из них (мы предлагаем поле 44). Продвигаясь далее таким же образом, в конце концов конь попадает на поле 64 (рис. 4.)

Чтобы указать еще одно эффектное решение задачи, сделаем небольшое отступление.

Квадрат размером $n \times n$, заполненный числами от 1 до n^2, называется магическим (или волшебным), если суммы чисел, расположенных в каждом из его столбцов и строк, равны между собой.

Хотя непосредственного практического применения такие квадраты не имеют, они все же являются достаточно интересными математическими объектами, и им посвящено немало книг. Теперь взглянем на еще один «ход коня» (рис. 5), придуманный

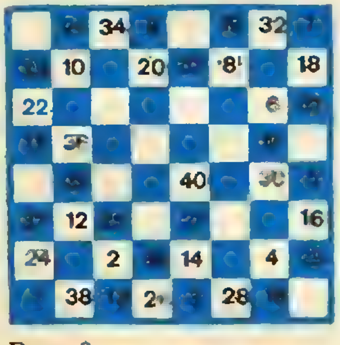


Рис. 3.

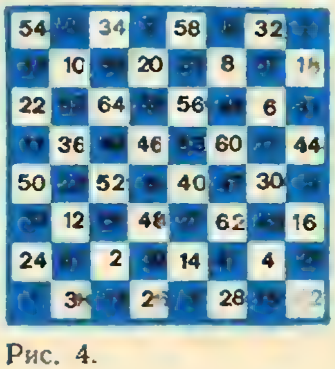


Рис. 4.

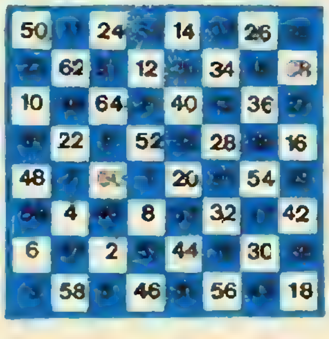


Рис. 5.

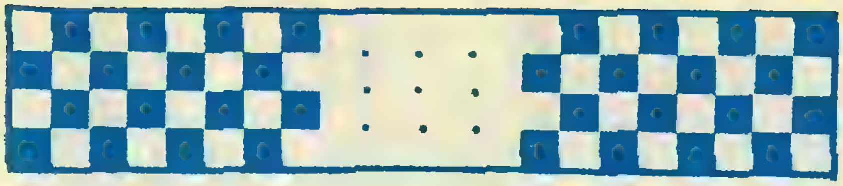


Рис. 6.

около ста лет назад известным русским шахматистом К. Янишем. Легко убедиться, что этот квадрат магический, а все упомянутые суммы равны 260. Приведенный «магический ход коня» может быть отнесен к числу особенно интересных, так как он обладает не только указанным свойством. Само построение его настолько симметрично, что при повороте доски на 180° первая ее половина (поля 1—32) превращается во вторую (поля 33—64). Любопытно, что такой «ход коня» привел Н. Рудина к гипотезе, утверждающей, что шахматы происходят из магических квадратов *).

Особый интерес представляет замкнутый «ход коня». Покажем, что на доске размером $4 \times n$, где n — любое натуральное число (рис. 6), замкнутого маршрута не существует (обычное решение имеется, например, при $n = 3$).

Предположим противное, то есть, что маршрут обхода существует. На крайние поля конь попадает только со средних (мы называем крайними те поля, которые расположены на верхней и нижней горизонталях, а средними — остальные). Если конь обошел все поля, соблюдая условия задачи, то $2n$ ходов были сделаны с крайних полей на средние. Тогда оставшиеся $2n$ ходов он совершил со средних полей на крайние. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит конь, меняется, поэтому все поля крайних горизонталей должны быть окрашены в один цвет, а средних — в другой. Противоречие.

Заканчивая обсуждение задачи о ходе коня, заметим, что она является частным случаем одной важной математической проблемы, заключающейся в нахождении так называемого гамильтонова пути в симметрическом графе **). Этим, видимо, и объясняется ее особая привлекательность для математиков.

Рассмотрим еще одну задачу о коне. *Пусть на шахматной доске находятся белый конь и черный король, причем обусловлен ряд «сгоревших» клеток* (на рисунке 7 они залиты тушью). *Требуется добраться конем до клетки с королем, а затем вернуться на исходную, причем по дороге нельзя становиться ни на «сгоревшие клетки», ни на уже пройденные клетки.*

Эта задача известна под названием «Задача о коне Аттилы». «Трава не растет там, где ступил мой конь!» — похвалялся вождь гуннов, намекая, что предводительствуемые им полчища уничтожают все живое на своем пути. Такого сорта задачи возникают при нахождении пути, ведущего из лабиринта, и подробно решаются в различных книгах по теории графов. В нашем же примере конь Аттилы должен передвигаться следующим образом:

Kg4—f6—e8—g7—e6—
f8—g6—e7—c6—
a5:b3—d2—b1—a3—
b5—d6—f7—h6—g4.

То обстоятельство, что конь на каждом ходу меняет цвет поля, играет немаловажную роль, в чем мы уже имели возможность убедиться. Вот еще один вопрос на эту тему.

Может ли конь, отправляясь с a1, *добраться до* h8, *ступив на каждое поле доски равно один раз?*

Конечно, ответ отрицательный. На каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле, так как исходное является черным. Однако число 63 (на этом ходу

---

*) Подробнее об этой гипотезе можно прочитать в книжке ее автора: Н. Рудин, От магического квадрата к шахматам, М., «Просвещение», 1969.

**) См. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

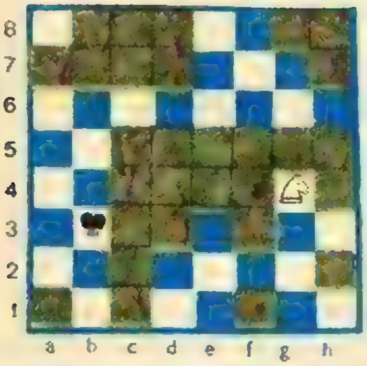


Рис. 7.

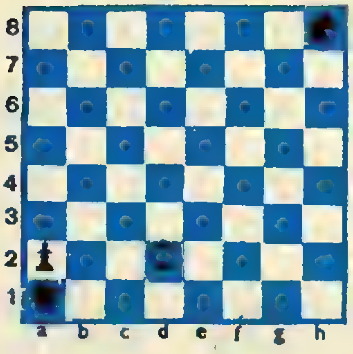


Рис. 8.

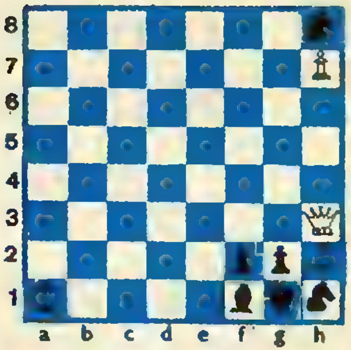


Рис. 9.

конь должен прибыть на h8) — нечетное, а поле h8 — черное. Задача очень проста, но любопытно, что за партией шахматисту иногда приходится решать подобные задачи.

Посмотрите, например, на рисунок 8. В этом окончании ничья достигается только путем **1. Крс1!** Теперь белый король будет переходить с с1 на с2 и обратно, занимая каждый раз поле того же цвета, что и конь. В противном случае (1. Крс2) король легко оттесняется. Черный конь приходит на d3 в тот момент, когда белый король стоит на с2. После этого поле с1 для него недоступно, черный король вырывается из заточения, и пешка проходит в ферзи. Аналогия между этой шахматной задачей и приведенной выше математической очевидна. В заключение рассмотрим еще один, более сложный шахматный пример. На рисунке 9 в основе остроумного этюда (В. Чеховер, 1937 г. Белые начинают и выигрывают) также лежит свойство коня на каждом ходу менять цвет поля.

Путь к выигрышу один: уничтожить королем черного коня h8 и провести пешку в ферзи, так как остальные фигуры белых скованы. Однако белые поля для короля «минированы» — с шахом отойдет слон f1 и затем последует f2—f1Ф. Ничего не дает прямолинейная попытка: 1.Крb2 Кf7 2. Крс3 Кh8 3. Крd4Кf7 (прикрывая поле е5) 4. Крс5 Кh8 5. Крd6 Кg6! (прикрывая поля е5 и е7) или 4. Кре3 Кh8 5. Крf4 Кf7! (прикрывая поля е5 и g5). Надо изменить соответствие цветности для короля и слона. Сначала по черным полям король отправляется на единственное безопасное белое поле — а8, а уже затем прорывается к полю h8.

В следующий раз мы еще встретимся с задачами о коне, а пока предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

1. Имеется шахматная доска размером 3×3. В ее верхних углах стоят два черных коня, а в нижних — два белых (рис. 10). Доказать, что нужно сделать не менее 16 ходов, чтобы поменять местами белых коней с черными.

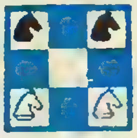


Рис. 10.

2. Доказать, что шахматную доску размером $(4k+1)\times(4k+1)$ можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белого и черного коней так, чтобы они не могли бить друг друга? Тот же вопрос для доски $m\times n$.

4. На скольких различных полях бесконечной шахматной доски может очутиться конь, совершив n ходов от данного поля?

5. Обычный ход коня 2×1. Рассмотрим теперь ход коня $m\times n$. Какими должны быть числа m и n, чтобы с данного поля конь мог попасть на любую клетку бесконечной шахматной доски?

ИСТОРИЯ ИЗОБРЕТЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А. К. Кикоин

Первая половина XVIII века была временем быстрого накопления опытных фактов об электрических явлениях. Именно в это время, например, выяснилось, что существуют два рода электричества.

Однако само явление электризации тел, природа электричества оставались совершенно загадочными. Обычно считалось, что электричество — это особая жидкость, содержащаяся в каждом заряженном теле. А наблюдавшееся уменьшение заряда на телах естественно трактовалось как «испарение» этой электрической жидкости. Столь же естественной была идея попытаться предотвратить такое «испарение», поместив заряженное тело в ... бутылку, выбрав в качестве заряженного тела воду.

Такой именно опыт поставил в 1745 году настоятель одного из соборов в Померании Юрген фон Клейст (по другим сведениям опыт был поставлен с целью получить заряженную воду, якобы полезную для здоровья). Он наполнил водой бутылку, закрыл ее пробкой, а через пробку ввел в воду металлический стержень (попросту гвоздь). Присоединив внешний конец стержня к электрической машине, которая в те времена представляла собой вращающийся стеклянный шар, о который терлась рука экспериментатора, Клейст сообщил воде значительный электрический заряд. И тут случилось непредвиденное. Взяв одной рукой бутылку, он имел неосторожность прикоснуться другой рукой к выступавшему из пробки концу гвоздя, и при этом ощутил в руках и плечах сильнейший удар, вызвавший онемение мышц. Потрясенный случившимся, он сообщил об этом в письме одному из своих друзей.

По случайному совпадению, почти такой же опыт и почти в то же время был поставлен в голландском городе Лейдене профессором университета Мушенброком. Только вместо толстостенной бутылки Мушенброк воспользовался тонкостенной стеклянной банкой. Зарядив воду и взяв банку в одну руку, он тоже прикоснулся другой рукой к металлическому стержню, служившему для подвода заряда к воде. При этом Мушенброк ощутил такой сильный удар в руки, плечи и грудь, что потерял сознание и два дня приходил в себя. Сообщая об этом «приключении» в письме своему французскому корреспонденту, Мушенброк добавляет, что не согласился бы повторить опыт, даже если бы ему было обещано французское королевство!

Сначала наблюдения Клейста и Мушенброка были понятны, как проявления так называемого «живого электричества», поскольку в этих опытах такую важную роль играли руки человека. Но довольно скоро стало ясно, что рука, держащая банку, и заряженная жидкость в ней являются, как мы теперь говорим, обкладками конденсатора и что еще более эффективный прибор получится, если внешнюю и внутреннюю поверхности стенок банки покрыть слоем металла, например, оловянной фольги.

Так появился на свет первый электрический конденсатор, который французский физик Жан Нолле назвал Лейденской банкой — название, не забытое и в наши дни.

Вероятно, отголоском тогдашних наивных представлений об электричестве и о «бутылочном» происхождении конденсатора осталось слово, обозначающее главную характеристику конденсатора — емкость.

■

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

КАК ВИДЯТ НЕВИДИМОЕ

Люди невероятно быстро привыкают к самым удивительным достижениям науки и техники. Можно ли кого-нибудь сегодня озадачить рассказом о телевизоре, реактивном самолете или искусственном спутнике Земли? Даже луноход — это поразительное творение современной науки и техники — занял в нашем воображении обычное место рядом с электронной вычислительной машиной, атомной электростанцией и механизмом передачи наследственных признаков от поколения к поколению. Мы избалованы обилием новых замечательных возможностей, которые современная научно-техническая революция непрерывно передает в распоряжение человечества. Нас уже почти ничем нельзя удивить. А ведь это, в общем-то, плохо. Ибо без удивления нет интереса, а без интереса нет желания что-то узнать по-настоящему, изучить, исследовать самому.

Но давайте на минуту отрешимся от этого «всезнайства» и задумаемся над таким вопросом. Атомы состоят из электронов и атомных ядер. Атомные ядра образованы из протонов и нейтронов. Каковы размеры этих частиц? Радиус протона или нейтрона порядка 10^{-13} *см*. Следовательно, любая из этих частиц, грубо говоря, заключена в объеме порядка 10^{-38}—10^{-39} *см*^{3}. Точка, которая стоит в конце предыдущей фразы, имеет радиус, примерно равный четверти миллиметра. Шар с таким радиусом будет иметь объем порядка 10^{-4} *см*^{3}. Следовательно, в нем можно было бы разместить 10^{35} элементарных частиц! Как же должны быть малы эти частицы, чтобы уместиться в таком гигантском количестве внутри нашей точки. Ни глаз, ни микроскоп, даже с самым сильным увеличением, не может их заметить. Но все вы видели в учебниках и популярных книжках отчетливые фотографии следов таких частиц. Они были получены при помощи знаменитой камеры Вильсона. Вглядитесь в них внимательно, и перед вами откроется новый мир. Вот, например, фотографии следов, оставленных электронами. Одни следы длинные, они проходят через всю камеру, слегка изгибаясь в пронизывающем ее магнитном поле. У этих электронов большая энергия. Другие следы — короткие, сильно искривленные — оставившие их электроны имели небольшой запас энергии. Некоторые следы как бы расщепляются у конца — произошло столкновение с атомом, закончившееся удалением одного из электронов с его оболочки.

Помните, как обнаружили человека-невидимку, героя одноименного романа Герберта Уэллса? Преследователи увидели следы босых ног, прямо на глазах появляющиеся друг за другом на свежем снегу. Человек был невидимым, но следы его оставались. Также и здесь — частицы невидимы, но след их разрушительной работы налицо.

Глядя на фотографию неизвестного нам человека, мы очень мало что можем узнать о нем по существу. Разве что сумеем установить пол и приблизительно оценить возраст. Фотография не расскажет нам, честный он или нет, любит ли он музыку, какова его профессия, есть ли у него дети и если есть, то как он к ним относится.

НЕВИДИМОЕ
ОСТАВЛЯЕТ
СЛЕД

Иное дело — фотографии следов элементарных частиц в камере Вильсона. Изучая их, мы можем точно определить природу частиц, установить их энергии, заряды, характер взаимодействия друг с другом, взаимные превращения. Эти фотографии — объективные научные документы. Недаром Эрнест Резерфорд следующим образом оценил камеру Вильсона: «*Это было* замечательное достижение, позволившее увидеть во всех деталях то, что происходит с частицами, когда они пролетают через газ. Каждый, кто обладает хоть каким-то воображением, при виде стереофотографий треков быстрых α-частиц, протонов или электронов не может не восхищаться совершенством, с которым зарегистрированы все подробности их коротких, но полных драматических событий жизней. Камера Вильсона стала бесценным помощником в самых разнообразных исследованиях. Этот прибор является в некотором роде высшим кассационным судом, которому экспериментатор может полностью довериться. Ни один человек, наделенный самым ярким талантом научного предвидения, не смог бы предсказать всех способностей этого прибора, обладающего столь исключительным могуществом и неисчерпаемыми возможностями».

В 1970 году издательство «Атомиздат» выпустило интересную научно-популярную книгу И. М. Беккермана «Невидимое оставляет след» *). В ней содержится подробный рассказ о том, как была создана камера Вильсона и какие удивительные открытия сделаны при помощи этой камеры. Несомненным достоинством книги является то, что И. М. Беккерман знакомит читателей не только с приборами и исследованиями, научными идеями и путями их реализации. Книга рассказывает и об авторе этих идей и приборов, замечательном английском физике Чарльзе Томсоне Рисе Вильсоне. Читая книгу, мы узнаем интересные подробности его жизни, видим, какого огромного труда и напряжения потребовало создание его камеры. Теперь-то все кажется нам удивительно простым. «Конденсация пересыщенного пара на заряженных частицах!» — скажет современный физик. Но в те дни, когда Вильсон начинал свои исследования, еще никто почти ничего толком не мог сказать ни о механизме конденсации паров, ни о природе заряженных частиц. В 1895 году Вильсон начал исследовать условия образования тумана и лишь в 1911 году родилась его «туманная камера».

Книга подробно прослеживает судьбу камеры Вильсона — как советские физики П. Л. Капица и Д. В. Скобельцын поместили ее в магнитное поле (что позволило легко определять знак заряда частиц по характеру искривления их путей), как японский физик Шимизу и английский физик Блэккет автоматизировали ее работу, как ее заставили работать значительно быстрее, изучать миниатюрные молнии — электрические разряды в газах и т. д.

Появление частиц высоких энергий, создаваемых современными ускорителями заряженных частиц, вызвало необходимость в коренной реконструкции камеры Вильсона. Чтобы не позволить частицам выходить из поля зрения камеры, надо было резко повысить плотность вещества на пути частиц. Ученые создают камеры Вильсона с высокими давлениями наполняющего их газа. Но даже при давлении 200 *атм* частицы проходят в камере лишь небольшую долю своего пути. Значит, многие события происходят с ними уже за пределами камеры и никаких следов не остается. Пришлось заменить пересыщенный пар, наполняющий обычные камеры Вильсона, перегретой жидкостью, в которой заряженные частицы образуют на своем пути пузырьки газа. Так же как и капельки тумана, эти пузырьки в закипающей жидкости образуются вокруг заряженных частиц. Первым такую «пузырьковую» камеру создал американский физик Дональд Глезер. Ее иногда называют «антикамерой Вильсона», так как у Вильсона в камере пересыщенный пар конденсируется в капельки жидкости, а у Глезера в перегретой жидкости возникают пузырьки пара.

И опять-таки, рассказывая о рождении пузырьковой камеры, автор подробно прослеживает ход мысли Дональда Глезера, шаг за шагом с логической неизбежностью подводит читателей к конечной цели.

В книге И. М. Беккермана речь идет о сложных современных исследованиях в области физики элементарных частиц. Но автор удачно выбирает материал и вполне доступно излагает самую суть дела, главное в рассматриваемых им исследованиях.

События, описываемые в книге, подходят вплотную к сегодняшнему дню, к проблемам, которые физики намерены решать на самом могучем ускорителе заряженных частиц неподалеку от Москвы, под городом Серпуховым в молодом научном центре Протвино. Там смонтирована огромная жидководородная пузырьковая камера «Мирабель», созданная французскими учеными специально для нашего ускорителя. Диаметр камеры 1,6 *м*, длина 4,5 *м*. Вес ее с необходимыми опорами свыше 200 тонн. Да еще магнит весом в 1150 тонн, внутри которого помещается камера. Какая огромная дистанция отделяет «Мирабель» от первой камеры Вильсона, которая без труда укладывалась внутри небольшого чемодана! А ведь этот путь пройден за срок немногим более полувека.

Вильсон умер на девяностом году от первой и единственной в его жизни тяжелой болезни. До последних дней он упорно работал, проявляя глубокий интерес к изучению новых, неизвестных науке явлений природы.

«Из всех великих ученых нашего века он был, пожалуй, самым мягким и спокойным, самым равнодушным к почестям и славе. Свою беспредельную увлеченность наукой он черпал в исключительной любви к миру природы, в преклонении перед ее красотой». Так оценил выдающийся исследователь космических лучей английский физик Блэккет выдающегося английского физика Чарльза Томсона Риса Вильсона, создателя знаменитой «туманной камеры».

В. А. Лешковцев

* * *

---

*) И. М. Беккерман, Невидимое оставляет след, изд. 2-е, переработанное и дополненное, Атомиздат, 1970.

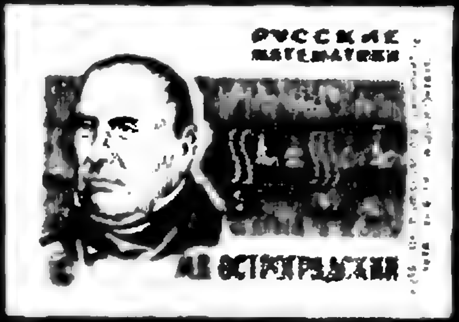
«ЧАСТИЦЫ» И «АНТИЧАСТИЦЫ» В СТАКАНЕ НАРЗАНА

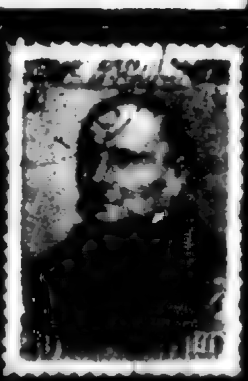
Если налить в стакан какую-нибудь газированную воду, например, нарзан, то можно увидеть, как растворенная в воде углекислота выделяется в виде маленьких пузырьков, быстро всплывающих вверх. Такие пузырьки можно противопоставить каплям жидкости. Капли представляют собой «частицы» вещества. Пузырьки газа в жидкости ведут себя как «античастицы» со свойствами, противоположными свойствам соответствующих частиц. Например, капли под действием силы тяжести падают вниз, пузырьки же поднимаются вверх. Если сосуд, в котором падают капли, вращать, то капли будут отбрасываться к периферии. Во вращающейся жидкости пузырьки стремятся к оси вращения. Если внутри жидкости имеется какое-либо тяжелое тело, то пузырьки-античастицы не притягиваются, а отталкиваются от него. Вместе с тем два пузырька будут взаимно притягиваться.

Поверхность жидкости в рассматриваемых условиях обладает любопытными свойствами. Поднимаясь снизу к этой поверхности, пузырек соприкасается с поверхностным слоем и почти мгновенно исчезает, но не бесследно: из того места, где исчез пузырек, вылетает вверх маленькая капля воды. На поверхности жидкости «античастицы» превращаются в частицы. Эти частицы, как бы продолжая движение поднимающихся пузырьков, взлетают вверх, пока сила тяжести не остановит их и не заставит упасть.

Г. И. Покровский

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА





МАРКА И ЭТИКЕТКА, ПОСВЯЩЕННЫЕ М. В. ОСТРОГРАДСКОМУ

К 150-летию со дня рождения выдающегося русского математика М. В. Остроградского в декабре 1951 года вышла почтовая марка с портретом ученого. Миниатюра выполнена по рисунку известного художника В. Завьялова коричнево-черным цветом *на розовой бумаге.*

В 1967 году в серии спичечных этикеток с изображениями выдающихся русских математиков и физиков появилась и этикетка, посвященная М. В. Остроградскому. На ней, кроме портрета математика, приведена так называемая «формула Остроградского», которая принадлежит к числу наиболее фундаментальных результатов математического анализа. Эта формула очень часто применяется в математических выкладках, широко используется в физике и механике — при исследовании тепловых, магнитных, электрических и гидромеханических явлений (например, при выводе основного закона гидростатики — закона Архимеда).

Н. Н. Колесников

ЛОГИЧЕСКИЕ КУБИКИ

Во Франции выпустили игру «логические кубики». Набор для игры состоит из 48 плашек («кубиков»). При их изготовлении используются три цвета (красный, синий и зеленый), два размера (большие и такой же формы и цвета маленькие плашки), две толщины (толстые и тонкие) и четыре формы (круг, квадрат, прямоугольник и треугольник). Комбинируя эти четыре признака, можно изготовить как раз 3×2×2×4=48 плашек.

С таким набором можно придумать много игр для любого возраста, начиная от детского сада. У всех игр одно общее: они учат умению рассуждать, то есть логике, знакомят малышей с основными понятиями теории множеств, не запутывая их мудреными объяснениями, и позволяют на практике освоить основные операции над множествами.

Игры для самых маленьких

Самая простая. Уложить кубики на столе в каком-нибудь порядке, дать малышу его запомнить и, после того как он отвернется, переставить что-нибудь. Пусть догадается, что изменилось.

Другая простая. Условие то же, только надо догадаться, какой кубик спрятан или сколько каких спрятано.

Третья. Требуется уложить кубики по придуманному порядку (например, разложить их по цветам).

Четвертая. Попросить малыша перечислить, чем отличаются два каких-либо кубика друг от друга, а чем похожи.

Обмен. Двое зажимают в обе руки по кубику и обмениваются теми, которые у них в правой руке. Выигрывает тот, у кого в кубиках оказалось больше сходства, он забирает себе все четыре кубика. Так разыгрывают все 12 четверок кубиков.

В этих играх вырабатывается понятие признака предмета: малыш усваивает, что кубики отличаются не более чем четырьмя свойствами: либо цветом, либо размерами, либо толщиной, либо формой.

Игры для средних

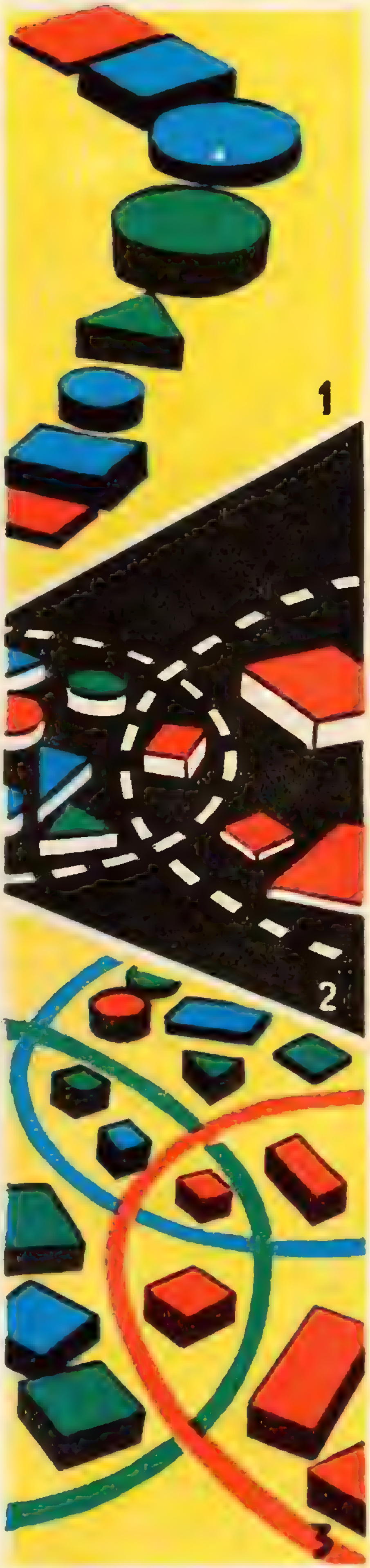
Домино «одно отличие». Как в домино, игроки выкладывают из кубиков цепь с одним условием: каждый следующий кубик отличается от предыдущего каким-нибудь одним (ровно одним) признаком.

Домино «два отличия». То же, но соседи по цепи должны отличаться двумя признаками (рис.1). Далее можно попробовать играть в «три отличия».

Кладоискатели. Два игрока задумывают по одному кубику («кладу») и пытаются найти клад, спрятанный соперником, указывая поочередно на те или иные кубики. Соперник только сообщает, сколько отличий у них от задуманного. Выигрывает тот, кто быстрее догадается.

Три деревни, два села. Игры, вырабатывающие понятие пересечения множеств. «Два села»: чертят на полу два круга — «села» — и пишут на них названия, например, «красные квадраты» на одном и «маленькие толстые» на другом. В первый круг нужно поместить все красные квадраты, во второй — все маленькие толстые кубики (рис. 2). Надо сообразить, как это сделать. Аналогичная игра «три деревни» еще интереснее.

Названия деревень. Один игрок раскладывает кубики в «три деревни», но не пишет на кругах их названия, а другой должен их отгадать (рис. 3).



Игры для старших

В эти игры можно играть вдвоем, побеждает тот, кому потребуется меньше вопросов для правильного ответа.

Правила отбора. Один из игроков задумывает какое-нибудь правило отбора кубиков, например: «отбирать только желтые», а другой берет наугад кубики и получает ответ «да», когда кубик подпадает под задуманное правило, и «нет» в противном случае. Нужно угадать правило. Правила постепенно усложняют, составляя суммы и пересечения признаков.

Заселение деревень. Один игрок задумывает названия деревень, а другой пытается заселить их кубиками, получая от первого лишь указания «да» или «нет».

Кладоискатели (усложненный вариант). Отгадчик «клада» сразу выкладывает на стол 3—4 «пробных» кубика и получает ответ, сколькими признаками каждый из пробных отличается от задуманного. «Клад» нужно после этого указать с первого раза.

Отгадывание закона. Задумывают правило, по которому можно выкладывать из кубиков цепь. Например, «каждый четный кубик — большой» или «после квадратов — тонкие кружки». Отгадчик начинает строить цепь наугад, кубик за кубиком, получая каждый раз ответ «да», когда он положит их, не нарушив правила, и «нет», когда правило будет нарушено. Надо отгадать закон.

Г. И. Копылов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Беседа о принципе неопределенности»

1. Характерная энергия фермиона есть $\varepsilon \sim \frac{h^2}{2ma^2}$. Если плотность частиц n, то $a \sim n^{-1/3}$ и $\varepsilon \sim \frac{h^2 n^{2/3}}{2m}$. Отсюда энергия единицы объема $E_1 \sim \varepsilon n \sim \frac{h^2 n^{5/3}}{2m}$. Энергия объема V есть $E = E_1 V$. При сжатии на ΔV мы совершаем работу порядка $P\Delta V$ против сил давления. Согласно закону сохранения энергии, $P \sim \Delta E/\Delta V$, где ΔE — изменение энергии при сжатии. Отсюда $P \sim \frac{E}{V} \sim \frac{h^2 n^{5/3}}{2m}$. С точностью до численного множителя (равного $\frac{1}{10}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$) это и есть уравнение состояния фермиевского газа.

Давление его при сжатии растет с ростом плотности быстрее, чем у классического газа (где $p \sim n$). Это следствие принципа Паули, приводящего к эффективному отталкиванию фермиевских частиц.

2. Основная характеристика квантовости — энергия нулевых колебаний $\varepsilon \sim \frac{h^2 n^{2/3}}{2m} = T_0$. Классическая энергия определяется температурой T. При $T \gg T_0$ квантовостью можно пренебречь; при $T \ll T_0$ частицы в основном сосредоточены в наинизших возможных энергетических состояниях — это предельно квантовый случай. Температура T_0 носит название температуры вырождения.

3. При низких температурах определенная доля частиц скапливается в состояниях с ничтожной энергией и потому на полную энергию системы практически не влияет. Количество таких частиц зависит от температуры, так что число бозонов, дающих вклад в энергию системы, не задано, а определяется температурой. Значит, единственная характерная энергия порядка kT. Из условия $\frac{p^2}{2m} \sim kT$ находим $p \sim \sqrt{2mkT}$, а из принципа неопределенности получаем характерное расстояние между «энергичными» частицами: $pa \sim h$, $a \sim \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$. Отсюда плотность частиц

$$n \sim a^{-3} \sim \frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3},$$

энергия частиц в единице объема

$$E_1 \sim \varepsilon n \sim kT\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3},$$

а энергия E объема V есть

$$E = E_1 V \sim kTV\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

Теплоемкость же c_V, то есть изменение энергии при повышении температуры на один градус при постоянном объеме,

$$c_V \sim E/T \sim kV\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

4. Характерная температура определяется тем моментом, когда начинается бозе-эйнштейновская конденсация и когда, следовательно, плотность энергичных частиц еще порядка их полной плотности. А это сразу же приводит к тому же критерию, что и в задаче 2.

5. Пусть характерный размер a. Тогда кинетическая энергия в устойчивом состоянии, соответствующем наименьшей энергии, есть $\frac{h^2}{2ma^2} \sim \frac{mv^2}{2}$, так что $v \sim \frac{h}{ma}$. Приравниваем теперь центробежную силу $\frac{mv^2}{a}$ кулоновской силе притяжения $\frac{e^2}{a^2}$. Получим

$$\frac{h^2}{ma^3} \sim \frac{e^2}{a^2}, \qquad a \sim \frac{h^2}{me^2}.$$

Это так называемый боровский радиус.

6. Рассуждение совершенно аналогично проведенному в предыдущей задаче и дает тот же результат.

К статье «Квадратный трехчлен»

1. Должны одновременно выполняться условия: $b^2 - 4ac \geq 0$, $af(\alpha) > 0$, $-\frac{b}{2a} < \alpha$.

2. $af(\alpha) < 0$.

3. Корни действительны при любом b. Остается использовать условия, при которых оба корня трехчлена $f(x) = x^2 - 2bx - 1$ лежат на отрезке $-2 \leq x \leq 2$, а именно $f(-2)f(2) \geq 0$. Ответ: $|b| \leq \frac{3}{4}$.

4. Использовать условия, при которых оба корня трехчлена

$$f(x)=x^2+x+a$$

больше числа a, а именно,

$$1-4a\geqslant 0,\quad a^2+2a\geqslant 0, -\frac{1}{2}>a.$$

Ответ: $a<-2$.

5. $a=0$ и $a=2$.

6. $\frac{H}{2}$.

7. Наименьшее значение функции x^2+1 равно 1 и достигается при $x=0$. Поэтому

$$x^2+1>\cos x$$

при всех $x\neq 0$. Значение $x=0$ — корень уравнения.

8. Использовать условия, при которых оба корня квадратного трехчлена

$$f(x)=x^2+mx+m^2+6m$$

лежат вне промежутка $1<x<2$, а именно, $f(1)<0$, $f(2)<0$.

Следовательно, нужно найти значение m, удовлетворяющее одновременно двум неравенствам

$$m^2+7m+1<0,$$

$$m^2+8m+4<0.$$

Решая эти неравенства и отбирая их общие решения, находим ответ:

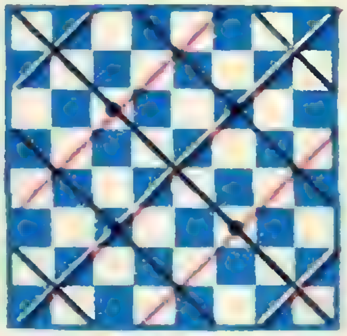
$$\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}<m<-4+2\sqrt{3}.$$

9. $\frac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g}-S$.

К статье
«Шахматно-математические заметки»
(см. «Квант» № 5)

1. Достаточно заметить, что каждая фигура содержит либо 3 белых поля, либо 3 черных, а всего таких фигур должно быть 25.

2. Легко убедиться, что при любом покрытии каждое тримино содержит ровно одно поле, через которое проходит красная линия и ровно одно, через которое проходит черная линия. Поскольку «красных» и «черных» полей по 22, а тримино — 21, то не покрыто одно «красно-черное» поле из четырёх, отмеченных на рисунке. Проверьте, что соответствующие покрытия существуют.



3. Напишем на каждом поле доски номер горизонтали, в которой это поле стоит. Проверьте, что каждое тримино покрывает поля с суммой чисел, делящейся на 3, а нам надо покрыть поля с суммой чисел 296, дающей при делении на 3 остаток 2.

4. а) Нет. «Белая» пешка (пешка, стоящая на белом поле) при вторичной расстановке должна стать «черной», а «черная» — «белой». Значит, число «белых» пешек равно числу «черных», что противоречит нечетности доски.

б) Нет. Докажите, что пешки, стоящие на крайней левой вертикали, остались на месте (из a1 в a8 можно пройти по 6 смежным полям). Дальше рассмотрите поля b1 и b8.

К заметке
«Еще несколько задач Васи Смекалкина»
(см. «Квант» № 6, 3-я страница обложки)

1. Составим таблицу разностей чисел данной последовательности (между соседними числами запишем их разность). В третьей строчке получится последовательность степеней двойки. После этого ясно, как продолжить таблицу.

4		7		12		21		38		71		126		245	...
	3		5		9		17		33		55		119	...	
		2		4		8		16		32		64	...		

2. 312—184=128.

3. Достаточно заметить, что

$$2\cdot4\cdot5\cdot10\cdot15=6000.$$

4. Получаем 2 л в 5-литровом сосуде, переливаем их в 3-литровый, дополняем 1 л из 5-литрового, в котором остается 4 л.

5. а) Аналогично задаче 1 получаем ответ: 17;

б) Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих. Ответ: тоже 17.

6. Вот один из способов: 4×17 кг+6×16 кг+21 кг=185 кг.

7. 115×98=11 270 или 120×98=11 760.

8. Все книги вместе стоят (42+40+38+36) : 3=52(коп).

10. Первый игрок должен взять 3 карандаша, а после очередного хода соперника брать 4 карандаша минус столько карандашей, сколько взял соперник.

ПОПРАВКИ

В «Кванте» № 1 на стр. 53 в решении задачи 4 уравнения движения должны быть

$$v_0^2=v_x^2+v_y^2+\frac{M}{m}u^2,$$

$$mv_x=Mu.$$

В «Кванте» № 3 на стр. 9 в правой колонке на 13 строке снизу напечатано «(TiO_2 — рубин)», должно быть «(TiO_2 — рутил)».

В «Кванте» № 4 на стр. 53 в правой колонке на 6 строке сверху напечатано «... = α...», должно быть «... = β...»; на 20 строке сверху напечатано

$$V=\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{3}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha},$$

должно быть

$$V=\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

Кроме того, формулу для OE следует выводить раньше, чем формулу для SO.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович; М. И. Башмаков; В. Г. Болтянский; И. Н. Бронштейн; Н. Б. Васильев; И. Ф. Гинзбург; В. Г. Зубов; П. Л. Капица; В. А. Кириллин; В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*); А. И. Маркушевич; М. Д. Миллионщиков; Н. А. Патрикеева; Н. Х. Розов; А. П. Савин; И. Ш. Слободецкий; М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*); Я. А. Смородинский; В. А. Фабрикант.

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

1. Неравноплечные чашечные весы уравновешивают, положив на одну из чашек небольшой грузик. Можно ли теперь взвешивать на этих весах обычным способом?

2. Почему вечером человек хуже различает очертания предметов, чем днем?

3. Как определить давление в баллоне электрической лампочки с помощью цилиндрического или прямоугольного сосуда с водой и линейки?

4. Аквалангист хочет измерить глубину озера. Как он может это сделать, имея в своем распоряжении цилиндрический сосуд и линейку?

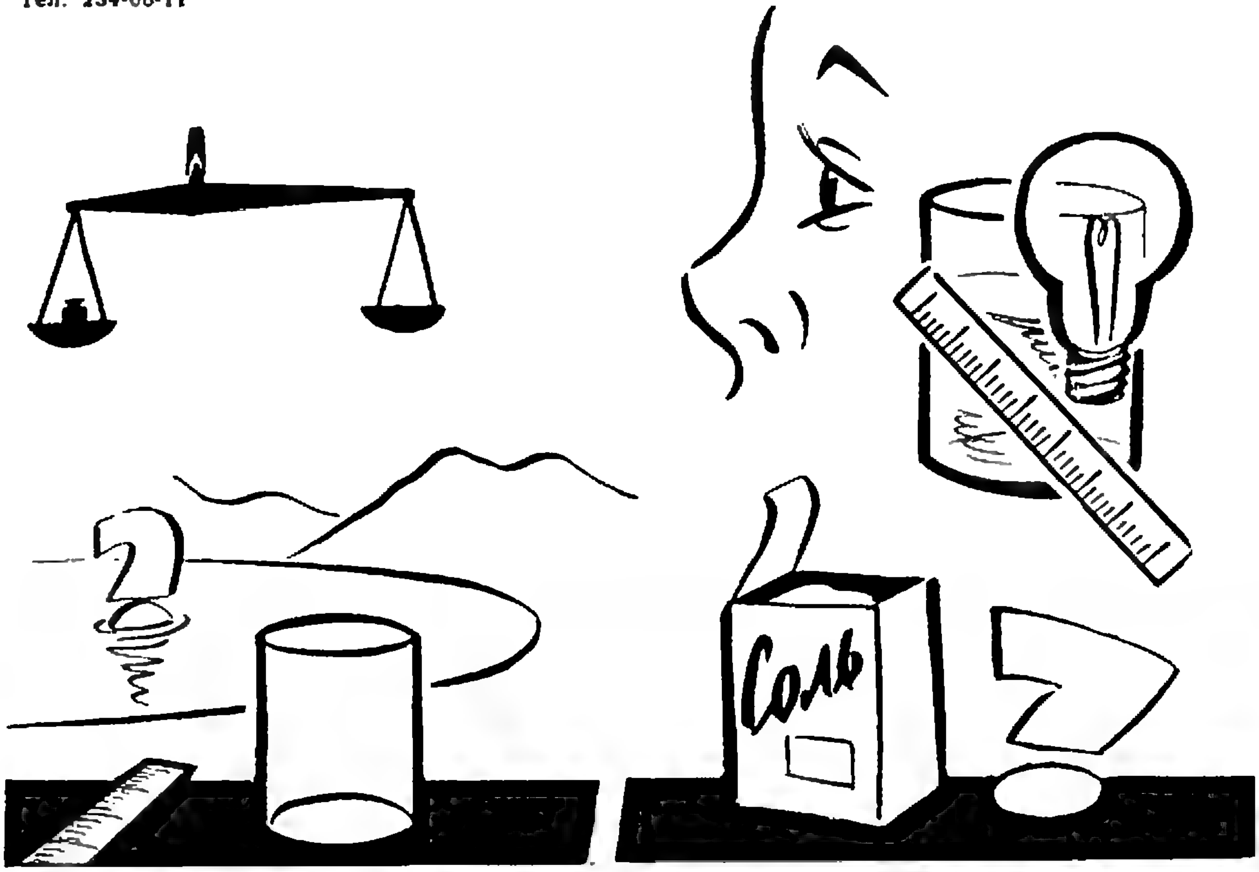
5. Почему кристаллики соли бесцветные, а в массе соль серая или белая?

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор В. П. Сорокина

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 26/V 1971 г.
Подписано в печать 29/VII 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Усл.-печ. л. 5,2.
Уч.-изд. л. 5,46. Тир. 266135 Т-12363.
Цена 30 коп. Заказ 1060.

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской обл.



ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 9

К нашим читателям!

Объявляется подписка на 1972 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука».

В журнале читатель найдет много задач: задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные задачи, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Цена номера 30 коп. Стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. Наш индекс 70465.

НОМЕР
10

В номере:

Язык человека и язык машины *Р. С. Гутер* 1

Геоакустическая разведка подводных месторождений полезных ископаемых *О. Г. Беспалов, А. И. Настюха* 6

Диффузия в металлах *Б. Куллити* 10

Об одном свойстве биномиальных коэффициентов *А. И. Ширшов* 16

Механика вращающегося волчка *С. А. Кривошлыков* 21

Межзвездные корабли на гравитационных рессорах *И. А. Воробьев* 26

Лаборатория «Кванта»

Искусственные миражи *Р. Вуд* 29

Задачник «Кванта»

Задачи 33

Решения задач М64—М69; Ф75—Ф78 *Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий* 35

Практикум абитуриента

Системы алгебраических уравнений *М. И. Шабунин* 45

Шахматно-математические заметки *Е. Я. Гик* 49

Рецензии, библиография

Сборники ошибок автора *А. Ф. Хрусталев* 53

Не учебник и не задачник *С. В. Ащеулов, В. А. Барышев* 54

Информация

Лингвистика и математика встречаются на олимпиаде *В. В. Раскин* 56

Олимпиаду проводит машина *Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина* 58

Ответы, указания, решения 62

Уголок коллекционера

На марках — атомные реакторы *А. В. Алтыкис* 63

«Квант» для младших школьников *А. П. Савин* *3-я стр. обложки*

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

ЯЗЫК ЧЕЛОВЕКА И ЯЗЫК МАШИНЫ

Р. С. Гутер

Многие читатели «Кванта», очевидно, имеют некоторое представление о том, что умеют делать электронные вычислительные машины. Тем более интересно познакомиться с тем, как они это делают.

Заметим, что для выполнения разных задач вовсе не требуются разные машины: электронные вычислительные машины универсальны, то есть для новой задачи нужна не новая машина, а новая программа для нее. О программах, способах их составления и записи как раз и будет идти речь в настоящей статье.

Любая электронная вычислительная машина включает в себя

1) устройства ввода и вывода;

2) запоминающее устройство (короче: память);

3) арифметическое устройство (или просто арифметика);

4) устройство управления (управление).

Ввод и вывод предназначены для «общения» человека с машиной. Они позволяют «сообщать» машине исходные данные и способ их обработки (то есть программу) и «узнавать» у машины полученные результаты. Память машины хранит всю нужную информацию: исходные данные, промежуточные и окончательные результаты, и, конечно, программу.

Арифметика служит для выполнения операций над числами, которые поступают туда из памяти (в основном это обычные арифметические операции, чем и объясняется термин). Наконец, управление руководит самим процессом решения задачи: вызывает из памяти сведения об очередной операции и расшифровывает их, пересылает из памяти в арифметику нужные числа и отсылает обратно в память полученный результат.

Представление о связи перечисленных устройств можно получить из рисунка 1, изображающего так называемую блок-схему вычислительной машины.

Память машины состоит из большого числа (обозначим его через N) одинаковых *ячеек*, пронумерованных подряд от 0 до $N-1$. Номер ячейки называется ее *адресом*. Каждая ячейка содержит определенное число

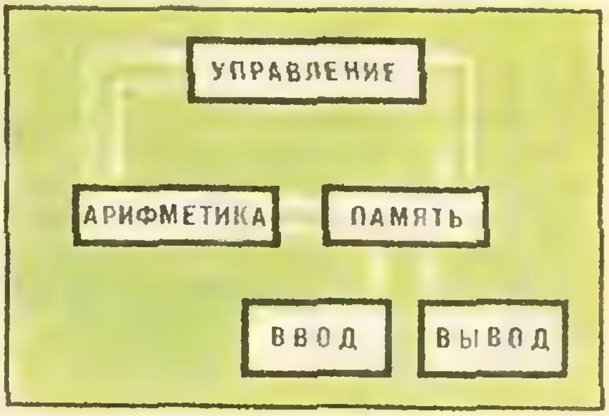


Рис. 1.

двоичных разрядов, то есть в ней может помещаться набор из нулей и единиц, так называемое *машинное слово*.

Арифметическое устройство машины может выполнять определенный набор элементарных операций. Алгоритм решения любой задачи нужно записать в виде последовательности таких элементарных операций, которую и называют программой. Программа состоит из отдельных команд, каждая из которых содержит сведения об одной элементарной операции.

Команда (изображаемая машинным словом) делится на две части: операционную и адресную. Операционная часть команды содержит сведения о характере выполняемой операции (сложить, умножить и т. д.): элементарные операции машины перенумеровываются и в разрядах ячейки памяти машины, отведенных для операционной части, записывается номер требуемой операции. Этот номер называют кодом операции (мы будем говорить просто код).

Адресная часть команды содержит адреса ячеек, содержимое которых участвует в операции. Число адресов в команде у различных машин может быть различным. Мы ограничимся рассмотрением трехадресных машин, в адресной части которых указаны адреса трех ячеек памяти: первый, второй и третий адреса команды. Для арифметической операции (например, сложения) в первом и втором адресах записываются номера ячеек, содержащих исходные числа (слагаемые). Третий же адрес указывает номер ячейки, куда следует записать результат (то есть сумму). Для других элементарных операций использование адресов может быть иным (в частности, один, два или даже все три адреса могут оказаться ненужными для какой-либо команды, тогда соответствующие адресные ячейки заполняют просто нулями).

Пусть, например, система команд (набор элементарных операций) машины содержит $64=2^6$ элементарных операций. Тогда для их нумерации достаточно шести двоичных разрядов, то есть код операции можно записать в памяти машины шестизначным двоичным числом. Программисту же обычно удобнее разбить это число на две «триады», каждая из которых затем записывается одной цифрой в восьмеричной ($2^3=8$) системе счисления, получая, таким образом, двузначное восьмеричное число. Если, например, $N=4096=2^{12}$, то в такой «двоично-восьмеричной» системе для записи любого адреса потребуется не двенадцатиразрядное, а лишь четырехразрядное, легче записываемое и читаемое число.

Если, скажем, код 01 означает операцию сложения, а 04 — деление, то машинное слово

01 1254 3172 6314

означает команду: числа, записанные в ячейках с адресами 1254 и 3172, сложить, и сумму записать в ячейку с адресом 6314. Аналогично слово

04 4365 2710 5024

предписывает разделить число из ячейки 4365 на число из ячейки 2710 и поместить частное в ячейку 5024.

Адрес ячейки, из которой устройство управления должно извлечь для выполнения очередную команду, записан в специальном счетчике команд, являющемся частью устройства управления. Если в счетчике записан некоторый адрес *Я*, то говорят, что «управление находится в ячейке *Я*». При выполнении команды, соответствующей арифметической операции, к содержимому счетчика команд автоматически прибавляется единица, так что управление передается ячейке со следующим адресом. Поэтому, если мы хотим, чтобы машина выполнила какую-либо последовательность арифметических операций, необходимо поместить соответствующие команды в ячейках памяти подряд.

Напишем, например, программу для вычисления величины

$$y=\frac{a+bx}{ax+b}.$$

Кроме операций сложения и деления, коды которых мы уже приводили, здесь употребляется еще операция умножения. Примем, что код умножения есть 05. Предположим, что числа a и b помещены в ячейки памяти с адресами 1274 и 1275, число x — в ячейку 1362, а для числа y отведем ячейку 1400. Программу будем записывать в ячейки, начиная с 4000.

Тогда программу можно записать, например, так (самое левое число означает адрес ячейки; после двоеточия идет ее содержимое):

```
4000: 05 1275 1362 1701
4001: 01 1274 1701 1702
4002: 05 1274 1362 1703
4003: 01 1703 1275 1704
4004: 04 1702 1704 1400
4005: 77
```

Кроме упомянутых выше ячеек памяти, в программе участвуют также ячейки 1701—1704, которые используются для записи и хранения промежуточных результатов. Код 77 в ячейке 4005, в которую придет управление после выполнения команды деления, означает операцию остановки машины (на месте адресов этой команды мы, согласно сказанному выше, ставим нули). На рисунке 2 показано, как выглядит первая из команд программы в ячейке памяти машины. (Сравните повнимательнее обе записи, и у вас не останется неясностей по поводу «двоично-восьмеричной» системы).

Для выполнения программы нужно ввести ее в память, ввести в отведенные для них ячейки числовые значения и внести в счетчик команд адрес 4000 ячейки, с которой начинается программа.

Наша программа, как говорят, «написана на языке машины». В конечном счете любая программа для машины должна быть написана на этом языке — ведь другого языка машина не воспринимает. Но, как мы видели, этот «язык машины» очень далек от обычного и привычного математического языка человека; на нем трудно писать и еще труднее читать.

Программа будет выглядеть гораздо проще и привычнее, если обозначить адреса ячеек памяти обычными буквами, которые употребляются в программируемой формуле, а вместо кода операции писать знак действия. Тогда та же программа будет выглядеть так:

$b \cdot x = R_1,$

$a + R_1 = R_2,$

$a \cdot x = R_3,$

$R_3 + b = R_4,$

$R_2 : R_4 = y.$

Про такую программу говорят, что она записана в «содержательных» обозначениях.

Да и смысл «содержательных» обозначений не всегда стоит воспринимать буквально. Вот простой пример. Произведение $b \cdot x$, вычисленное первой командой нашей программы и записанное в ячейке R_1 (1701), требуется только как слагаемое во второй команде и после использования может быть стерто. Поэтому числитель, вычисляемый второй командой, можно записать в ту же ячейку, не занимая новой. Такая команда

01 1274 1701 1701

(то есть «Сложить числа из ячеек 1274 и 1701 и сумму записать в ячейку 1701») на языке «содержательных» обозначений примет вид

$$a + R_1 = R_1.$$

Это есть запись в содержательных обозначениях команды: («сложить

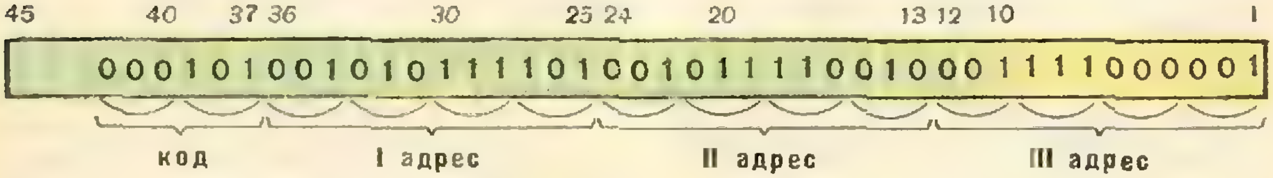


Рис. 2.

числа из ячеек a и R_1 и сумму записать в ячейку R_1»), что, конечно, отнюдь не следует понимать как «равенство» $a=0$. Кстати, часто вместо знака = поэтому и пишут что-нибудь вроде →; но мы будем использовать стрелки для других целей.

Как уже говорилось, выполнение арифметической команды автоматически передает управление следующей ячейке, прибавляя единицу в счетчик команд. Но очень часто не удается расположить все нужные команды «в один столбик». Так, при решении квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ нужно вычислять либо действительные, либо мнимые корни, что делается, как известно, по-разному.

Для изменения порядка выполнения команд в числе элементарных операций машины предусмотрены специальные команды управления (точнее — передачи управления), которые не совершают операций над содержимым ячеек памяти, а изменяют содержимое счетчика команд.

Простейшей командой такого типа является команда безусловной передачи управления, которая всегда передает управление указанной в ней ячейке памяти. При ее выполнении содержимое счетчика команд стирается и в него записывается адрес, указанный в команде, так что следующая команда будет вызываться устройством управления уже из указанной ячейки.

Поскольку для этого достаточно занять один адрес в команде, а два других адреса остаются свободными, то их можно использовать, заставив машину при выполнении этой же команды совершать еще какое-либо действие. Обычно передачу управления совмещают с пересылкой содержимого одной ячейки памяти в другую. Приняв, например, что в счетчик команд заносится третий адрес команды передачи управления, можно записать ее на языке содержательных обозначений так:

$$a \to b, \quad c$$

(«переслать содержимое ячейки a в ячейку b и передать управление ячейке c»).

Более сложно работают команды условной передачи управления, передающие управление лишь при выполнении некоторого условия. Именно такие команды требуются при программировании разветвляющихся процессов. Рассмотрим одну из таких команд:

$$a < b, \quad c.$$

При ее выполнении сравниваются числа, записанные в ячейках памяти a и b. Если написанное в команде неравенство справедливо, то управление передается ячейке c, то есть вместо содержимого счетчика команд в него заносится третий адрес написанной команды (как при безусловной передаче управления). Если же $a \geqslant b$, то к содержимому счетчика прибавляется единица, как при арифметических операциях.

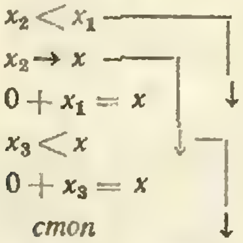
С помощью описанных команд можно уже запрограммировать решение и некоторых задач невычислительного характера. Пусть, например, в ячейках x_1 и x_2 записаны некоторые числа, из которых требуется выбрать большее и записать его в ячейку x. Это можно сделать с помощью следующей программы:

1) $x_1 < x_2$, 3,
2) $x_1 \to x$, 4,
3) $0 + x_2 = x$,
4) *стоп*

Первая ее команда — условная передача управления: если x_2 больше x_1, то управление будет передано команде 3). Это — арифметическая команда, в результате выполнения которой в ячейке x будет записано число x_2. (Часто встречающееся число 0 оказывается удобным «закрепить» за ячейкой, имеющей номер 0, что и делается почти во всех машинах.) Затем управление перейдет к следующей ячейке 4), в которой находится команда *стоп*.

Если же $x_1 \geqslant x_2$, то команда 1) передаст управление следующей ячейке 2), где находится команда безусловной передачи управления, засылающая в ячейку x большее число x_1 и передающая управление сразу на *стоп*.

Вместо указания номера или условного обозначения команды, которой передается управление, часто просто проводят стрелку до нужной команды. Вот как, например, выглядит аналогичная программа, от которой требуется выбрать наибольшее из трех чисел x_1, x_2, x_3 и записать его в ячейку x:



```
$x_2 < x_1$
$x_2 \to x$
$0 + x_1 = x$
$x_3 < x$
$0 + x_3 = x$
стоп
```

Приведенные примеры носят иллюстративный характер. Каждая команда в них выполняется лишь один раз, и время на ее написание в десятки или сотни тысяч раз превышает время выполнения. Машине же разумно поручать такие задачи, в которых требуется выполнять большое число сравнительно однообразных действий, чтобы одни и те же команды выполнялись большое число раз, а программа была по возможности короткой. Такое построение программ достигается с помощью применения циклов групп команд, выполняющихся по нескольку раз.

Рассмотрим в качестве примера вычисление суммы

$$\Sigma = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{N^2}.$$

Все слагаемые здесь получаются одинаково. Если в ячейке n лежит номер слагаемого, то для нахождения самого слагаемого достаточно выполнить команды

$$«1» : n = R,$$
$$R \cdot R = R$$

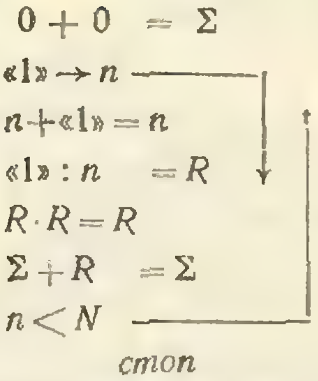
«1» — это адрес ячейки, где лежит число 1. (В силу сказанного выше вместо аналогичного обозначения «0» мы можем писать просто 0.) Если в ячейке Σ уже записана сумма всех предыдущих слагаемых, то после вычисления очередного слагаемого нужно выполнить команду

$$\Sigma + R = \Sigma,$$

а затем увеличить на единицу номер слагаемого, выполнив команду

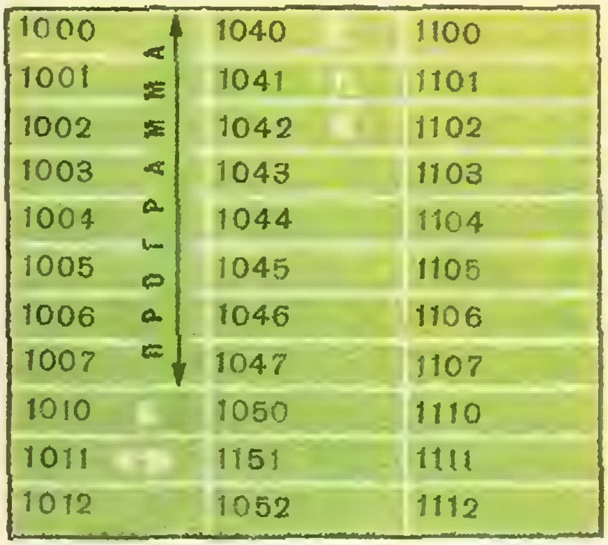
$$n + «1» = n,$$

после чего можно возвратиться к написанным выше командам вычисления слагаемых. Требуемую программу можно окончательно записать так:



```
$0 + 0 = \Sigma$
$«1» \to n$
$n + «1» = n$
$«1» : n = R$
$R \cdot R = R$
$\Sigma + R = \Sigma$
$n < N$
стоп
```

Попробуйте в качестве упражнения составить циклическую программу для вычисления произвольной степени $y = x^n$, предполагая, что не известное вам n, записанное в некоторой ячейке памяти, может быть любым целым положительным числом.



1000	ПРОГРАММА	1040	1100
1001		1041	1101
1002		1042	1102
1003		1043	1103
1004		1044	1104
1005		1045	1105
1006		1046	1106
1007		1047	1107
1010		1050	1110
1011		1151	1111
1012		1052	1112

Рис. 3.

Чтобы машина выполнила программу, последнюю необходимо перевести на язык машины, или, как говорят, закодировать.

Кодировка программы — почти механическая работа, выполняемая по формальным правилам. Коды операции можно записать в табличку и заглядывать в нее. Для облегчения распределения памяти можно воспользоваться специальными бланками, в которых отмечают, в какой ячейке хранится та или иная величина. На рисунке 3 показана часть такого бланка («памятки» или «шпаргалки») с распределением памяти для приведенной выше программы. Например, команда $n + «1» = n$ находится в ячейке 1002 и имеет вид 01 1041 1011 1041.

Если кодирование программы выполняется по простым формальным правилам, то нельзя ли поручить эти обязанности самой машине? — Оказывается, можно. Но это уже тема для специального разговора.

ГЕОАКУСТИЧЕСКАЯ РАЗВЕДКА

подводных месторождений полезных ископаемых

О. Г. БЕСПАЛОВ
А. И. НАСТЮХА

В поисках новых источников сырья люди все чаще обращаются к несметным богатствам кладовых полезных ископаемых, скрытых водной гладью морей и океанов. По оценкам ученых размеры запасов нефти, металлических руд и других минералов, находящихся на дне и под дном водных пространств, в несколько раз превосходят запасы этих ископаемых, имеющиеся на суше.

Но как узнать, где под водой скрыты эти сокровища? Для этого надо знать геологическое строение земной коры покрытых водой районов. По картам геологического строения специалисты могут судить, где и какие полезные ископаемые следует искать.

Для геологических исследований морского дна, как и на суше, применяются геофизические методы разведки — сейсморазведка и бурение скважин. Но для получения подробных сведений о геологии района нужно наугад бурить очень много скважин, каждую из которых непросто пробурить даже на суше. А бурение скважины в морском дне является еще более громоздким и чрезвычайно дорогостоящим делом.

Сейсморазведка исследует геологическое строение земной коры с помощью взрывов. В земле бурят небольшую скважину и в ней взрывают заряд. Образовавшиеся при взрыве расширяющиеся газы вызывают деформацию почвы, сжимая слой частиц, непосредственно окружающий место взрыва. Возникшие в сжатом слое силы упругости передают давление соседним слоям, и от точки взрыва по породе во все стороны распространяется упругая ударная волна (рис. 1).

Предположим, что под первым слоем породы I на глубине S залегает слой II, сложенный из породы другой плотности. Глубину залегания слоя II определить нетрудно (см. рис. 1):

$$S = \sqrt{S_1^2 - \frac{(S_2)^2}{2}},$$

где $S_1 = \frac{1}{2} ABC$— путь, пройденный прямой волной до слоя II (такой же путь проходит отраженная волна), S_2 — расстояние по поверхности между точкой взрыва и сейсмоприемником, регистрирующим момент прихода отраженной волны.

Энергия упругих волн при прохождении по земным породам частично поглощается. Доля поглощенной энергии зависит от частоты колебаний волны. При взрыве образуются волны инфразвуковых (ниже 16 герц) и звуковых (от 16 герц до 20 000 герц) частот. Волны этих частот сравнительно мало поглощаются земными породами, и этим определяется их использование в сейсморазведке.

Сейсморазведка успешно применяется для изучения строения морского дна. Но взрывы в воде опасны для жизни морских животных и причиняют непоправимый ущерб рыбным богатствам. Поэтому при морской сейсморазведке взрывы приходится производить редко и на большом удалении друг от друга, что затрудняет получение подробных данных о строении того или иного района.

Эхолокация, применяемая моряками для измерения глубины моря и регистрации рельефа дна, по принципу действия подобна сейсморазведке, но в отличие от нее использует ультразвуковые волны (частота от 20 000 герц до 60 000 герц).

Применение ультразвуковых волн в данном случае возможно потому, что путь прямой и отраженной волн лежит в воде, в которой ультразвуковые колебания поглощаются незначительно. Но о геологическом строении дна с помощью ультразвуковой эхолокации ничего узнать нельзя, так как ультразвук сильно поглощается земными породами и затухает уже в первых донных слоях.

В последние годы разработан метод исследования строения морского дна, получивший название «геоакустическая локация», который объединяет положительные стороны сейсморазведки и эхолокации. Геоакустическая локация, как и сейсморазведка, ведется с помощью волн звуковых частот. Но частота посылок упругих волн увеличена, подобно тому, как это делается при эхолокации. Это стало возможным вследствие того, что в качестве источника звуковых волн стали применять безопасный для жизни обитателей моря электрический разряд в воде.

Электрический разряд происходит, если к двум погруженным в воду электродам подключить источник высокого напряжения. Таким источником может быть заряженная до высокого напряжения конденсаторная батарея. Между электродами возбуждается электрическая дуга с током в несколько десятков тысяч ампер. Конденсаторная батарея при этом разряжается, и накопленная в ней энергия, достигающая нескольких десятков килоджоулей, выделяется в виде тепла и света за короткое время (равное примерно 0,00015 *сек*) в пространстве между электродами. Эта энергия достаточно велика и эквивалентна энергии, выделяющейся при взрыве нескольких граммов тринитротолуола *). Выделившееся тепло приводит к тому, что жидкость в междуэлектродном пространстве быстро превращается в пар, который, расширяясь, возбуждает волну в воде подобно тому, как это происходит при взрыве заряда в земле. Эта волна распространяется по воде во все стороны. Достигнув дна, волна частично отражается и устремляется к поверхности воды. Другая часть волны проникает в глубь донной породы и снова частично отражается от границ раздела слоев породы. Отраженные от дна и донных слоев волны регистрируются приемной аппаратурой.

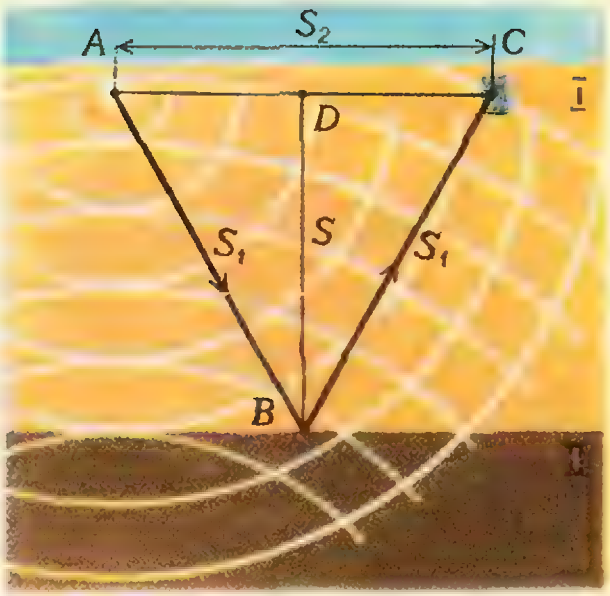
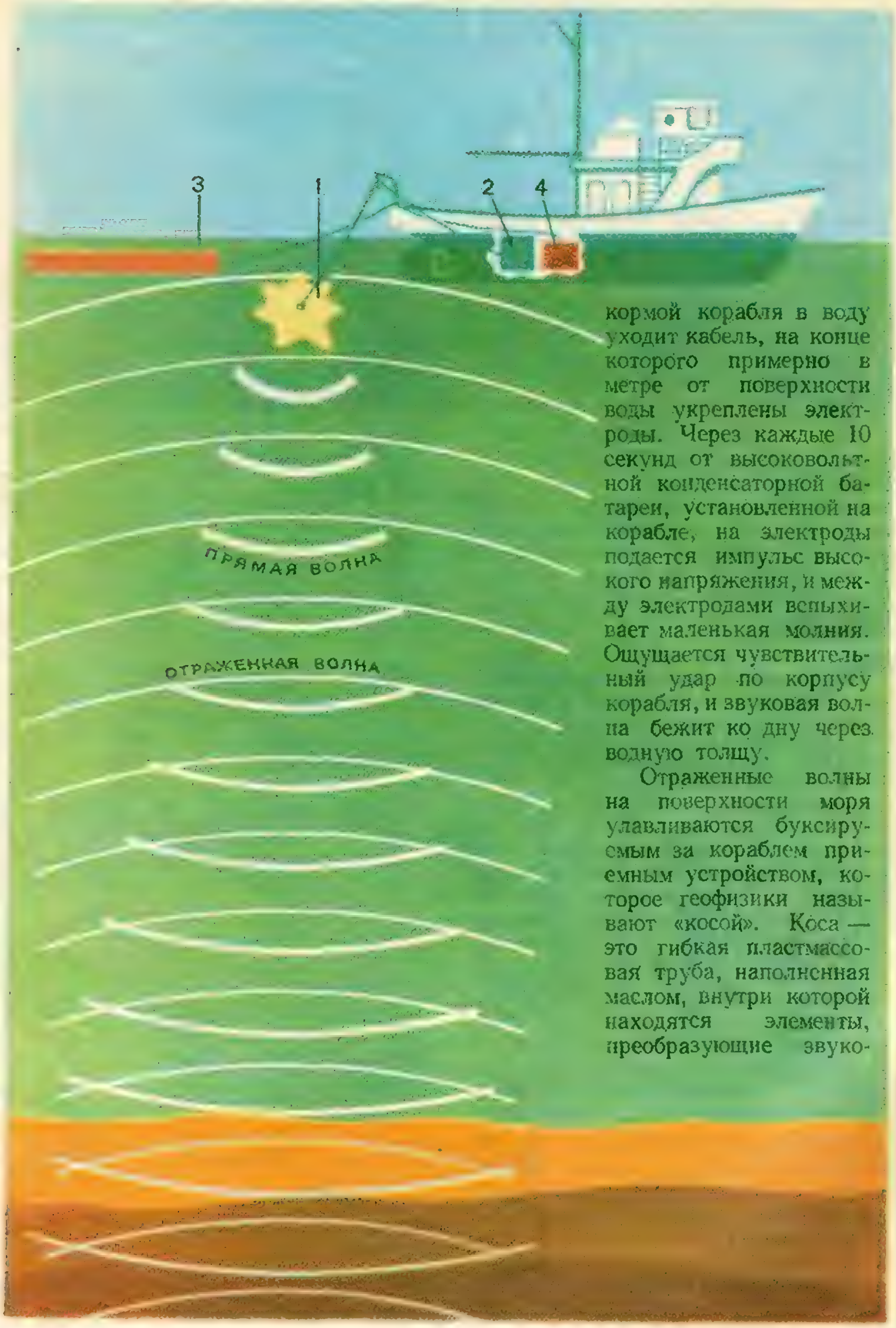


Рис. 1. Принципиальная схема сейсморазведки.

А теперь проведем несколько минут на палубе экспедиционного корабля, ведущего геоакустическую разведку. Корабль с установленной на нем разведочной аппаратурой (рис. 2) малым ходом движется вдоль исследуемого геологического разреза. За

---

*) Тринитротолуол — одно из наиболее распространенных взрывчатых веществ.



кормой корабля в воду уходит кабель, на конце которого примерно в метре от поверхности воды укреплены электроды. Через каждые 10 секунд от высоковольтной конденсаторной батареи, установленной на корабле, на электроды подается импульс высокого напряжения, и между электродами вспыхивает маленькая молния. Ощущается чувствительный удар по корпусу корабля, и звуковая волна бежит ко дну через водную толщу.

Отраженные волны на поверхности моря улавливаются буксируемым за кораблем приемным устройством, которое геофизики называют «косой». Коса — это гибкая пластмассовая труба, наполненная маслом, внутри которой находятся элементы, преобразующие звуко-

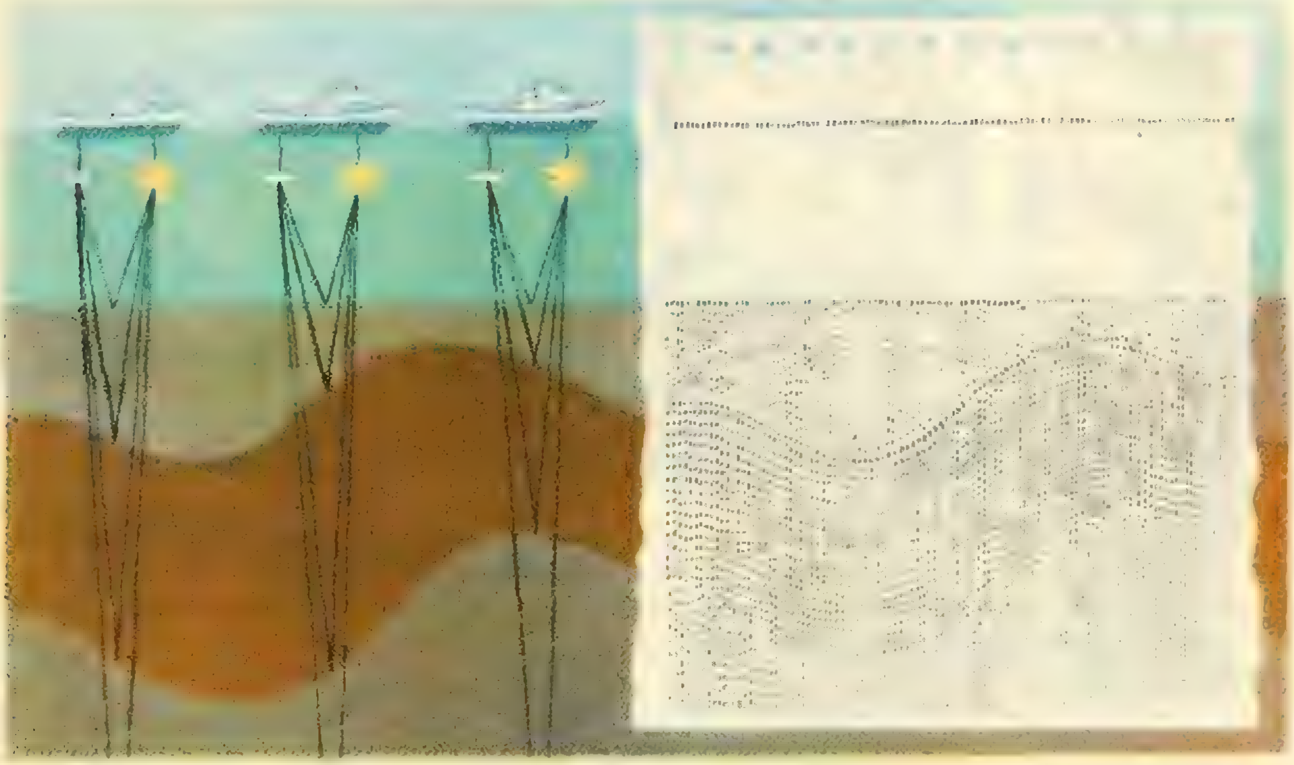


Рис. 3.

вую энергию отраженных волн в электрические импульсы (пьезоэлектрические элементы).

По кабелю, связывающему косу с кораблем, электрические импульсы идут на усилитель, а после усилителя записываются самописцем. В самописец заложена широкая лента электрочувствительной бумаги. У верхнего края ленты стоит «перо». Когда звуковая волна от электрического разряда начинает свой бег ко дну, перо начинает двигаться поперек бумажной ленты к ее нижнему краю, как бы повторяя в меньшем масштабе движение волны. А когда отраженные волны приходят на приемную косу и с нее через усилитель на перо, перо оставляет на чувствительной бумаге точки, соответствующие слоям породы, встреченным на своем пути звуковой волной.

Перед очередным разрядом перо возвращается кверху, а бумага чуть-чуть протягивается, и самописец снова готов к регистрации отраженных волн.

Через несколько минут с начала работы пунктирные строчки на бумаге образуют наглядный и легко читаемый рисунок строения исследуемого геологического разреза (рис. 3).

Метод геоакустической локации может применяться не только для поиска полезных ископаемых. С его помощью можно решать задачи инженерной геологии — выбирать места для плотин гидроэлектростанций, для фундаментов портовых сооружений, молов, туннелей, трубопроводов, и даже искать затопленные водой древние города. Стоимость разведки этим методом в 5—10 раз дешевле сейсморазведки и разведки бурением скважин.

Диффузия в металлах

Б. Куллити

Диффузия — весьма распространенное в природе явление, имеющее огромное практическое значение. Мы помещаем здесь статью Б. Куллити, подготовленную издательством «Наука» для очередного выпуска сборника «Над чем думают физики». Статья опубликована в журнале Scientific American». **Перевод выполнен В. К. Федяниным.**

Советские ученые внесли значительный вклад в изучение диффузии. Желающие более детально ознакомиться с этим явлением, могут найти много интересных сведений в научно-популярной книге Я. Е. Гегузина «Очерки о диффузии в кристаллах», выпущенной издательством «Наука» в 1970 году.

Запах духов, как известно, ощущается на довольно большом расстоянии. Объясняется это тем, что пары духов весьма легко диффундируют в воздухе. Капли жидкого красителя в воде легко диффундируют по всему сосуду. Намного труднее наблюдать диффузию в твердом теле. По этой причине изучение диффузии в твердых телах стало одним из наиболее интересных исследований в физике наших дней.

Как и во многих других областях человеческой деятельности, в данном случае умение предшествовало знанию. Столетиями рабочие сваривали металлы и получали сталь нагреванием твердого железа в атмосфере углерода, не имея ни малейшего представления о происходящих при этом диффузионных процессах. Лишь в 1896 году началось научное изучение проблемы.

Английский металлург сэр Вильям Робертс-Аустин в простом эксперименте измерил диффузию золота в свинце. Он наплавил тонкий диск золота на конец цилиндра из чистого свинца длиной в дюйм*), поместил этот цилиндр в печь, где поддерживалась температура порядка 200° С, и держал его в печи 10 дней. Затем он разрезал цилиндр на тонкие диски и измерил количество золота, которое продиффундировало в каждый срез свинца. Оказалось, что к «чистому» концу через весь цилиндр прошло вполне измеримое количество золота; в противоположном направлении в глубь золотого диска продиффундировал свинец (рис. 1). Робертс-Аустин обнаружил, что нагретый металл диффундирует в другой, когда они тесно прижаты друг к другу.

С точки зрения атомного строения вещества проницаемость твердых тел не является странной. В настоящее время мы хорошо представляем себе, что даже наиболее плотное твердое тело — всего-навсего довольно слабо связанный набор атомов. В кристаллах, образующих металл, атомы располагаются в фиксированной решетке в определенных положениях, из которых их довольно трудно сместить. Однако идеальных и полностью застроенных кристаллических решеток не существует. В них всегда имеется некоторое количество вакансий, или «дырок», в которые могут «перепрыгнуть» диффундирующие атомы. Перепрыгнув в некую вакансию, атом оставляет после себя новую вакансию. В эту вакансию может перейти соседний атом; итак, путем непрерывных перемещений атомов в решетке атом может пройти через кристалл (рис.2).

---

*) Дюйм≈2,5 см.

Что же заставляет атом покидать свое место в решетке и «перескакивать» в вакансию? Дело в том, что на самом деле атомы в решетках не находятся в строго фиксированных положениях. В результате теплового движения атомы непрерывно колеблются относительно некого среднего или, точнее, усредненного по различным возможным местам их нахождения положения. Амплитуда этих колебаний может заметно меняться от атома к атому и во времени. Время от времени атом настолько далеко отходит от своего положения равновесия, что может перескочить в соседнее вакантное место. Тенденция к этому, безусловно, резко возрастает, если мы подогреваем тело, заставляя тем самым атомы совершать более сильные колебания. Таким образом, скорость диффузии очень быстро возрастает с повышением температуры. Например, цинк диффундирует в медь при 300° С почти в 100 миллионов раз быстрее, чем при комнатной температуре.

В эксперименте Робертса-Аустина атомы золота при 200° С колебались достаточно энергично, чтобы начать перескакивать в вакансии решетки (то же имело место и для атомов свинца). В конце концов, если бы эксперимент проводился достаточно долго, атомы золота равномерно распределились бы по всему свинцовому цилиндру. Можно провести очень простую аналогию. Если в коробку с белыми шариками положить несколько черных шариков и коробку достаточно долго встряхивать, то черные шарики окажутся равномерно распределенными среди белых.

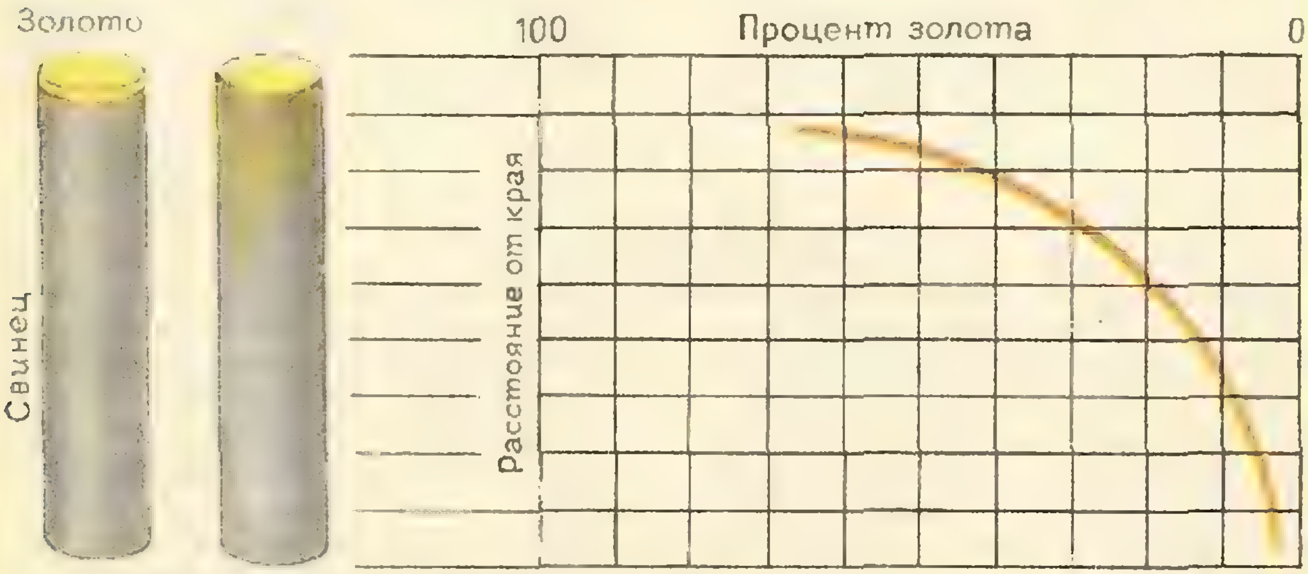


Рис. 1. Рисунок поясняет первые диффузные опыты Робертса-Аустина. Золото было наложено на чистый свинец (серый цилиндр слева) и образец подогревался. Справа изображен этот же цилиндр после того, как произошла диффузия золота в свинец и свинца в золото. Этот цилиндр был разрезан на тонкие диски для измерения количества содержащегося в них продиффундировавшего золота. Кривая, представленная на графике справа, показывает изменение концентрации золота в зависимости от расстояния от верхнего края правого цилиндра.

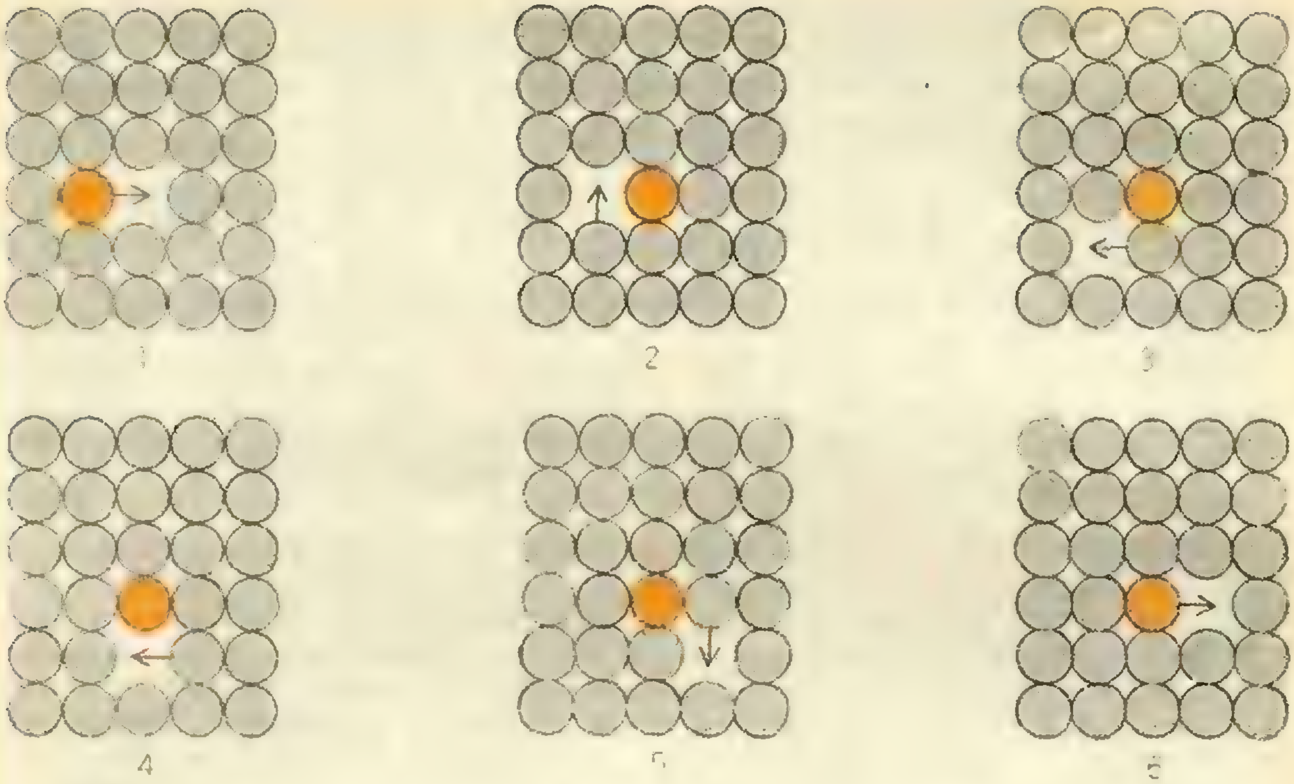


Рис. 2. В атомных плоскостях кристалла возможно наличие вакантных мест. Этот рисунок иллюстрирует, каким образом золото (желтый кружок) может диффундировать в кристалле свинца. Переход атома золота в положение, изображенное на правом нижнем рисунке, возможен при наличии всего лишь одной вакансии в решетке свинца.

Диффузия атомов в чистом металле (так называемая «самодиффузия») может быть измерена с использованием незначительной доли радиоактивных атомов этого элемента. Скажем, для того чтобы измерить скорость самодиффузии в меди, надо электроосадить небольшое количество радиоактивного изотопа меди на конец цилиндра из обычной меди и нагреть этот цилиндр до некоторой определенной температуры. После того как пройдет достаточно времени, чтобы могла произойти диффузия, образец нарезается тонкими пластинками и с помощью счетчика Гейгера измеряется радиоактивность каждого последовательного среза. Эти данные позволяют подсчитать скорость диффузии.

Металл может диффундировать в другой металл лишь при наличии вакансий в кристаллических решетках, поскольку атомы даже двух различных металлов имеют размеры примерно одного и того же порядка. Однако атомы неметаллического элемента, размеры которых много меньше, чем размеры атомов металла, могут втиснуться между атомами в металлическом кристалле. При этом диффузия не зависит от вакансий и, следовательно, происходит намного быстрее. Одним из наиболее важных примеров такого случая может служить диффузия углерода в железо.

В своей наипростейшей форме сталь является сплавом углерода и железа. Свойства стали меняются в зависимости от содержания в сплаве углерода. Сталь с небольшим содержанием углерода (скажем, порядка одной четверти процента) не очень прочна и хорошо куется. Повышение содержания углерода делает сталь более прочной, но более хрупкой. Такая деталь машины, как передаточный механизм, должна обладать твердой поверхностью, чтобы сопротивляться износу, и быть достаточно упругой в своих внутренних частях, чтобы не сломаться при внезапных ударах. Эти свойства приобретаются в процессе, называемом поверхностной закалкой. Кусок металла разогревается и выдерживается в газе, богатом углеродом, например в метане. Атомы углерода из газа медленно диффундируют в сталь (рис. 3). Через несколько часов они проникают на глубину порядка одной двенадцатой дюйма. Поверхность, или «оболочка», этого куска стали после такой обработки содержит около 1,2% углерода, тогда как внутренняя его часть содержит всего лишь четвертую часть процента (рис. 4).

Знание процессов, происходящих при диффузии атомов в металл, может помочь нам при изучении внутреннего строения металла. Вообще говоря, кусок металла состоит из маленьких кристаллов, или «зерен». Внутренняя структура отдельного зерна в высшей степени регулярна — она представляет собой почти идеальную решетку с некоторым числом вакансий или других незначительных отклонений от идеальности. Но в совокупности зерна не составляют упорядоченной структуры. Их взаимное расположение совершенно случайно. Очень редко одно зерно подгоняется своей гранью к другому так, чтобы регулярное расположение атомов в нем было как бы продолжением расположения атомов другого зерна. Обычно грани этих зерен образуют некий угол скоса, называемый «углом расхождения». Атомы, располагающиеся в пограничной области между зернами, притягиваются обоими кристаллами и в конце концов попадают внутрь одного из них. В результате в этой области создается бо́льшая разупорядоченность атомов, чем в зернах. Диффундирующие атомы намного быстрее проходят через такие пограничные области, чем через регулярную решетку самого зерна. Хорошо известно, что атомы металла диффундируют намного быстрее в мелкозернистом металле, который весь буквально изрешечен границами зерен, чем в металле, построенном из больших кристаллов.

М. Ахтер и Р. Смолуховский поставили опыт с целью выяснения влияния угла расхождения между зернами на скорость диффузии. Они приготовили цилиндр из меди, состоящий из больших нитевидных кристаллов, располагавшихся таким образом, что плоскости решеток составляли некоторые углы между собой. К концу этого медного образца был приварен сплав меди с серебром и все это было нагрето до температуры 675° С. Через 10 дней приготовили

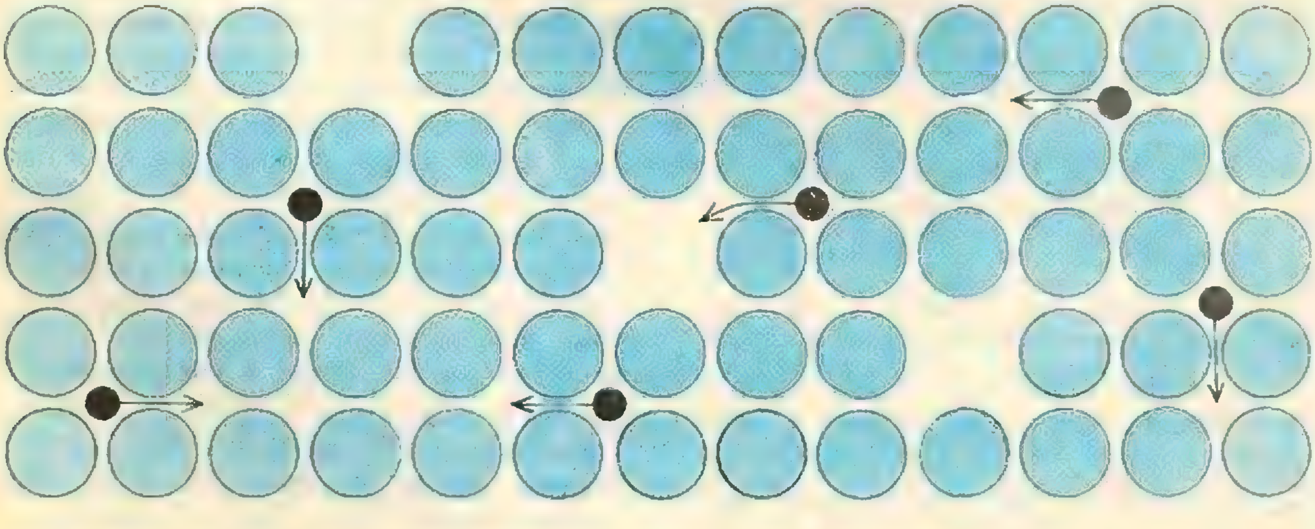


Рис. 3. Диффузия углерода в железе не зависит от наличия вакансий. Атомы углерода (черные кружки) достаточно малы, чтобы располагаться между атомами железа (голубые кружки).

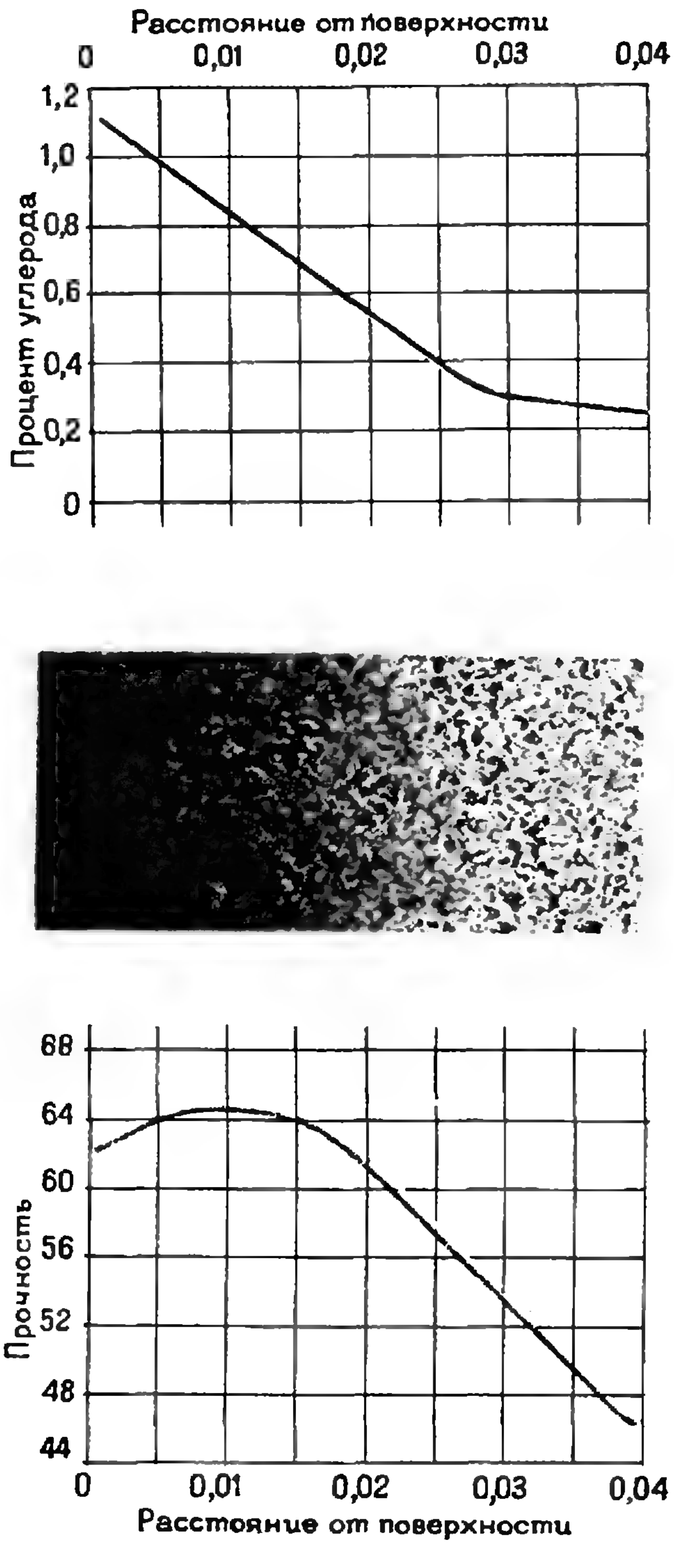


Рис. 4. Поверхностно закаленная сталь возникает в результате специфической диффузии в нее атомов углерода. В средней части рисунка приведена микрофотография, иллюстрирующая распределение углерода в куске стали, поверхность которого находилась в контакте с углеводородом. Верхняя кривая дает процентное содержание углерода в зависимости от расстояния до поверхности куска стали. Нижняя кривая характеризует прочность стали в различных частях куска.

срезы этого цилиндра и исследовали их под микроскопом, с тем чтобы оценить диффузию серебра в зависимости от расстояния до места наплава. Оказалось, что серебро быстрее диффундировало в пограничных областях между зернами, чем через внутренние области зерен. Через одни пограничные области прошло несколько больше серебра, чем через другие. Измерив углы расхождения для различных пограничных областей, Ахтер и Смолуховский обнаружили довольно закономерные связи. В случае, когда угол расхождения был меньше 20°, диффузия по границе зерна происходила не быстрее, чем через зерно. Для областей с углом расхождения свыше 20° скорость диффузии в этой области увеличивалась, достигая максимума при угле в 45°, после чего она опять уменьшалась. Угол в 45° являлся некоторым оптимальным углом расхождения. Если часть симметричной решетки поворачивается на угол в 90° по отношению ко всей решетке, то ее атомные ряды опять оказываются продолжением атомных рядов остальной решетки, и мы вновь имеем идеальную структуру.

Вакансионный механизм диффузии в металлах был твердо установлен лишь 20 лет назад экспериментами Э. Киркендайла в Уайнском университете. Киркендайл решил проверить предположение, являющееся основой всех экспериментальных и теоретических работ по диффузии в твердых телах. Полагая, что кристалл является идеальной структурой, теоретики считали, что если определенное число атомов диффундирует в одном направлении, то такое же число движется и в противоположном направлении с тем, чтобы сохранялась идеальность и непрерывность структуры кристалла.

Однако в 1942 г. Киркендайл, изучая диффузию в латуни (сплаве меди и цинка), показал, что атомы цинка диффундируют быстрее, чем атомы меди.

Отчет Киркендайла большинством читавших его был квалифицирован как экспериментальная ошибка. Для того чтобы убедить сомневающихся, Киркендайл в сотрудничестве с А. Смигелкас провели новую серию опытов. Они нанесли толстый слой меди на противоположные стороны стержня из латуни, а между медью и латунью с обеих сторон латунного стержня они поместили молибденовую проволоку, для того чтобы она фиксировала границу между медью и латунью. После этого образец был нагрет до высокой температуры. Если бы атомы меди входили в латунный стержень так же быстро, как атомы цинка выходили из него, то первоначальный размер латунного стержня не изменился бы. На это указывало бы неподвижное положение молибденовой проволоки. Но на самом деле молибденовая проволока сместилась, и смещение ее указывало на то, что латунный стержень сократился; то есть атомы цинка выходили быстрее из стержня, чем атомы меди входили в него. Под микроскопом можно было разглядеть довольно большие поры, образовавшиеся в стержне в результате появления большого числа вакансий, возникающих там, откуда из стержня быстро выходили атомы цинка.

Результаты эти были опубликованы в 1947 г., и то, что теперь носит название «эффекта Киркендайла», произвело настоящую сенсацию среди металлургов и всех исследователей, которые занимались свойствами твердых тел.

Были проверены старые опыты, поставлены новые.

Поскольку эффект Киркендайла был тут же обнаружен во многих сплавах, не осталось никаких сомнений, что он существует на самом деле.

Несомненно, исследование диффузии углубит наше понимание свойств твердого тела и всех тех инженерно-технических процессов, в которых диффузия играет основную роль.

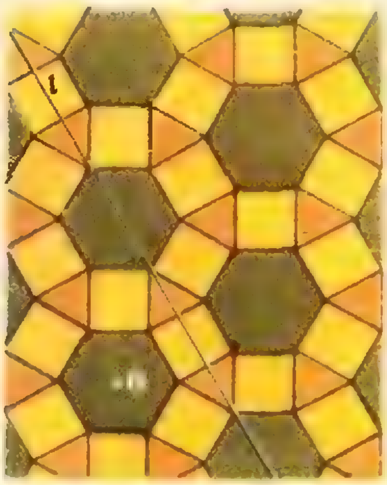
РИСУНОК ЭШЕРА

Если плоскость покрыть многоугольниками так, чтобы два многоугольника имели либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имели общих точек, то такое покрытие называется паркетом.

В нашем журнале (см. «Квант» № 3, 1970, стр. 21) мы приводили ряд задач, связанных с паркетами.

Для некоторых паркетов можно указать такие преобразования плоскости, которые переводят фигуры, составляющие паркет, друг в друга так, что сам паркет не меняется.

Для паркета, приведенного на этом рисунке, такими не меняющимися его преобразованиями будут поворот вокруг точки на 60° и симметрия относительно прямой l. Какие еще не меняющие этот паркет преобразования вы можете указать?



Паркет совершенно другого рода вы видите на рисунке голландского художника Эшера (см. обложку). Этот паркет замечателен тем, что одним из не меняющих его преобразований является увеличение вдвое всех расстояний относительно центра (преобразование подобия). Поэтому, строго говоря, на рисунке изображено бесконечное число уменьшающихся ящериц. Попытайтесь придумать другие паркеты, не меняющиеся при преобразовании подобия.

Л. Лиманов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. И. Ширшов

В «Кванте» № 6 за 1970 год была опубликована статья Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов». В этой статье авторы предложили следующую задачу: *пусть p — простое число; выяснить, на какую степень p делится число* $C_{p^{n+1}}^{p^n}-C_{p^n}^{p^{n-1}}$

Эта задача привлекла внимание многих наших читателей. Редакция получила письма от В. Г. **Гайдаловича** (Ташкент), С. П. **Крутика** (станица Старо-Щербиновская Краснодарского края), ученика 9 класса А. **Меркурьева** (Ленинград), В. В. **Приленского** (Москва) и других товарищей, которые предлагают разной степени полноты решения этой задачи.

Мы попросили видного советского алгебраиста, члена-корреспондента Академии наук СССР А. И. **Ширшова** подробно осветить решение поставленной задачи.

Школьникам хорошо знакомы многие научно-популярные книги и статьи по математике. Они пишутся по возможности просто, подробно и доступно, ярким и живым языком, с занимательными примерами и красочными картинками — так, чтобы заинтересовать читателя, дать ему возможность легко разобраться в материале.

А как пишутся серьезные математические статьи в солидных научных журналах? Предлагаемая вниманию читателей статья А. И. Ширшова дает представление о научном математическом стиле изложения. По своему содержанию она вполне доступна старшеклассникам, но написана специально так, как пишутся заметки, скажем, в журнал «Доклады Академии наук СССР».

Научно-математический стиль характеризуется сжатостью и лаконичностью. Как правило, изложение разбивается на отдельные ступеньки — леммы, поднимаясь по которым, мы и приходим к заключительному результату — теореме. Научная статья всегда содержит постановку задачи, объяснение вводимых понятий и используемых обозначений, ссылки на литературу. Доказательства подробно не воспроизводятся — намечается лишь их идея и общий ход рассуждений. Поэтому читать такую статью можно лишь с карандашом и бумагой в руках, восстанавливая промежуточные выкладки; понимание ее содержания требует определенного напряжения и самостоятельных размышлений.

Любителям математики, несомненно, будет интересно познакомиться с научным математическим стилем изложения.

В статье [1] высказано предположение, что числа вида $C_{p^k}^{p^{k-1}}-C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}}$, где p — простое, делятся на достаточно высокую степень числа p. Однако доказано это утверждение лишь в случае $p=2$ (теорема 5 из [1]).

Настоящая заметка посвящена доказательству более общей теоремы.

Все рассматриваемые в дальнейшем числа m, k, t, s и т. д. натуральные, причем p — простое число. Символ (m, n), как обычно, означает наибольший общий делитель чисел m и n. Символом $[k, s]_n$ мы будем обозначать произведение всех таких натуральных чисел t, что $k\leqslant t\leqslant s$ и $(t, n)=1$; например, $[7, 19]_3=7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 14\cdot 16\cdot 17\cdot 19$. Напомним также, что $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)n$ и

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,. \tag{1}$$

Лемма 1. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Это хорошо известная формула Архимеда, доказываемая по индукции (см. [2], стр. 16).

Лемма 2. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=C_{2n+1}^3$.

Доказательство по индукции (см. [2], стр. 17).

Лемма 3. Если числа m и s таковы, что $1\leqslant s<m$ и $(m, s)=1$, то существует единственное число s', $1\leqslant s'<m$, для которого $ss'-1$ делится на m, то есть

$$ss'-1=mr. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что среди чисел $1, 2, \ldots, m-1$ найдется такое единственное число s', что ss' при делении на m дает в остатке 1. Рассмотрим числа

$$s,\ 2s,\ 3s,\ \ldots,\ (m-1)\,s. \tag{3}$$

Как известно (см. [3]), множество целых чисел разбивается на m классов, каждый из которых состоит из всех чисел, дающих при делении на m одинаковый остаток. Ни одно из чисел (3), очевидно, не принадлежит классу чисел, делящихся на m. Кроме того, никакие два из чисел (3) не могут принадлежать одному классу, ибо если бы два из чисел (3) при делении на m давали один и тот же остаток, то, вычитая из большего числа меньшее, мы получили бы число из (3), делящееся на m.

Таким образом, $m-1$ число (3) принадлежит различным классам чисел, не делящихся на m; таких классов $m-1$. Поэтому каждому из этих классов принадлежит ровно одно из чисел (3), и, в частности, одно и только одно из чисел (3) при делении на m дает в остатке 1.

Лемма 4. Если $s_1, \ldots, s_q$ — все такие различные числа, что $1\leqslant s_i<m$ и $(m, s_i)=1$ для $i=1, \ldots, q$, то числа $s_1', \ldots, s_q'$, каждое из которых обладает указанным в лемме 3 свойством, быть может, только порядком отличаются от чисел $s_1, \ldots, s_q$.

Доказательство. На основании равенства $s_is_i'-1=mr_i$ (см. (2)) заключаем, что $(m, s_i')=1$, $i=1, \ldots, q$. Далее, числа $s_1', \ldots, s_q'$ все различны. В самом деле, пусть $s_i'=s_j'$, и пусть для определенности $s_i>s_j$; тогда разность чисел $s_is_i'-1$ и $s_js_i'-1$ должна делиться на m, а это невозможно в силу $(m, s_i')=1$ и $0<s_i-s_j<m$.

Следовательно, $s_1', \ldots, s_q'$ — все такие различные числа, что $1\leqslant s_i'<m$ и $(m, s_i')=1$ для $i=1, \ldots, q$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $(m, s)=1$ и $\frac{a}{s(m-s)}$ — целое число, то число $\frac{a}{s(m-s)}+a(s')^2$ делится на m.

Доказательство. Используя формулу (2), имеем

$$\frac{a}{s(m-s)}+a(s')^2=\frac{a}{s(m-s)}\{1+ss'(m-s)s'\}=$$

$$=\frac{a}{s(m-s)}\{1+(mr+1)(ms'-mr-1)\}=mt,$$

где число t легко сосчитать (при необходимости).

Лемма 6. Число

$$\ldots M = [1,\ p^{k-1}]_p \left\{\frac{1}{1+(p^{k-1}-1)} + \frac{1}{2(p^{k-1}-2)} + \ldots\right.$$

$$\ldots + \frac{1}{(p-1)(p^{k-1}-p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p^{k-1}-p-1)} + \ldots$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{(p^{k-1}-1)\cdot 1} + 1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 + (p+1)^2 + \ldots + (p^{k-1}-1)^2\right\}$$

(в выражении в фигурных скобках выписываются все числа, взаимно простые с p) является целым и делится на p^{k-1}.

Доказательство. Если взять $m=p^{k-1}$, то числа

$$1, 2, \ldots, p-1,\ p+1, \ldots, p^2-1,\ p^2+1, \ldots, p^{k-1}-1 \qquad (4)$$

удовлетворяют условию леммы 4. Поэтому, произведя необходимую перестановку слагаемых в фигурных скобках, число M можно представить как сумму чисел вида

$$[1,\ p^{k-1}]_p \left\{\frac{1}{s(p^{k-1}-s)} + (s')^2\right\},$$

где s принимает значения (4). Из определения символа $[1, p^{k-1}]_p$ следует, что $\frac{[1,\ p^{k-1}]_p}{s(p^{k-1}-s)}$ — целое число, а потому применение леммы 5 завершает доказательство.

Лемма 7.

$$(p^k c)! = [1,\ p^k c]_p (p^{k-1}c)!\, p^{p^{k-1}c}. \qquad (5)$$

Доказательство. Произведение сомножителей в левой части равенства (5), не делящихся на p, даст, очевидно, первый сомножитель в правой части этого равенства. Легко сообразить, что в левой части равенства (5) будет, кроме того, $p^{k-1}c$ сомножителей, делящихся на p; разделив каждый из них на p, получим два следующих сомножителя в правой части равенства (5).

Лемма 8.

$$(p^k)! = [1,\ p^k]_p [1,\ p^{k-1}]_p \ldots [1,\ p^2]_p [1,\ p]_p\, p^{\frac{p^k-1}{p-1}},$$

$$(p^k-p^{k-1})! = [1,\ p^k-p^{k-1}]_p [1,\ p^{k-1}-p^{k-2}]_p \ldots$$

$$\ldots [1,\ p^2-p]_p [1,\ p-1]_p\, p^{p^{k-1}-1}.$$

Доказательство обеих формул нетрудно провести индукцией по k с привлечением леммы 7.

Лемма 9.

$$C_{p^k}^{p^{k-1}} - C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}} = p\,\frac{[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p - [1,\ p^{k-1}]_p}{[1,\ p^{k-1}-p^{k-2}]_p [1,\ p^{k-2}-p^{k-3}]_p \ldots [1,\ p^2-p]_p [1,\ p-1]_p}$$

Доказательство. Выражение в правой части этого равенства получается несложными преобразованиями из левой его части, если использовать формулу (1) и лемму 8.

Лемма 10. Для любых целых чисел α, $x_1, \ldots, x_n$ верно равенство $(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)\ldots(\alpha+x_n) - x_1x_2\ldots x_n =$

$$= \alpha x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + \alpha^2 N,$$

где N — некоторое целое число.

Доказательство. При $n=1$ равенство тривиально. Применим метод индукции:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+x_1)\dots(\alpha+x_{n-1})(\alpha+x_n)-x_1\dots x_{n-1}x_n=\\
&\quad=\left\{x_1\dots x_{n-1}+\alpha x_1\dots x_{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\alpha^2N_1\right\}\times\\
&\quad\times(\alpha+x_n)-x_1\dots x_n=\alpha x_1\dots x_{n-1}+\alpha x_1\dots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\\
&\quad+\alpha^2x_1\dots x_{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\alpha^3N_1+\alpha^2N_1x_n=\\
&\quad=\alpha x_1\dots x_{n-1}x_n\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}\right)+\alpha^2N,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Лемма 11.

$$
\begin{aligned}
&[p^k-p^{k-1},p^k]_p-[1,\ p^{k-1}]_p=\frac{1}{2}p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\times\\
&\times\left\{\frac{1}{1\cdot(p^{k-1})}+\dots+\frac{1}{(p-1)(p^{k-1}-p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p^{k-1}-p-1)}+\dots\right.\\
&\left.\dots+\frac{1}{(p^{k-1}-1)\cdot 1}\right\}+p^{4k-2}Q,
\end{aligned}
$$

$$p>2;$$

$$
\begin{aligned}
&[2^k-2^{k-1},\ 2^k]_2-[1,\ 2^{k-1}]_2=2^{2k-2}[1,\ 2^{k-1}]_2\left\{\frac{1}{1\cdot(2^{k-1}-1)}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{3\,(2^{k-1}-3)}+\dots+\frac{1}{(2^{k-1}-1)\cdot 1}\right\}+2^{4k-2}Q
\end{aligned}
$$

(в выражениях в фигурных скобках выписываются все числа, взаимно простые с p и 2 соответственно).

Доказательство. Очевидно, что

$$(p^k-p^{k-1}+s)(p^k-s)=p^{2k-1}(p-1)+s(p^{k-1}-s).$$

Распишем теперь произведение $[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p$ и, используя это равенство, перемножим попарно сомножители, равноудаленные от концов:

$$
\begin{aligned}
&[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p=(p^k-p^{k-1}+1)(p^k-p^{k-1}+2)\dots\\
&\dots(p^k-p^{k-1}+p-1)(p^k-p^{k-1}+p+1)\dots(p^k-2)(p^k-1)=\\
&\quad=\{p^{2k-1}(p-1)+1\,(p^{k-1}-1)\}\{p^{2k-1}(p-1)+2\,(p^{k-1}-2)\}\dots\\
&\quad\dots\{p^{2k-1}(p-1)+(p-1)(p^{k-1}-p+1\}\{p^{2k-1}(p-1)+\\
&\quad+(p+1)(p^{k-1}-p-1)\}\dots\{p^{2k-1}(p-1)+\\
&\quad+\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)\}.
\end{aligned}
$$

Получившееся выражение преобразуем согласно лемме 10, взяв $\alpha=p^{2k-1}(p-1)$ и в качестве x_i выбрав числа

$$1\cdot(p^{k-1}-1),\ 2\,(p^{k-1}-2),\dots,\ \frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1).$$

Заметив, что

$$1(p^{k-1}-1)\cdot 2(p^{k-1}-2)\dots\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)=[1,\ p^{k-1}]_p,$$

можем записать:

$$[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p=[1,\ p^{k-1}]_p+p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{1(p^{k-1}-1)}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{2}{\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)}\right\}+p^{4k-2}Q=$$

$$=[1,p^{k-1}]_p+\frac{1}{2}p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1(p^{k-1}-1)}+\dots+\frac{1}{(p^{k-1}-1)1}\right\}+p^{4k-2}Q,$$

что и доказывает лемму при $p>2$.

Случай $p=2$ рассматривается по такой же схеме.

Лемма 12.

$$1^2+2^2+\dots+(p-1)^2+(p+1)^2+\dots+(p^{k-1}-1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}p^{k-1}(p^{k-1}+1)(2p^{k-1}+1)-p^kL,\qquad p>2$$

(в левой части выписываются все числа, взаимно простые с p).

Доказательство. Достаточно представить левую часть в виде

$$\sum_{i=1}^{p^{k-1}}i^2-p^2\sum_{i=1}^{p^{k-2}}i^2$$

и обе суммы вычислить согласно лемме 1.

Теорема. Справедливы следующие равенства:

$$C_{p^k}^{p^{k-1}}-C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}}=p^{3^{k-1}}R,\quad p>3;$$
$$C_{3^k}^{3^{k-1}}-C_{3^{k-1}}^{3^{k-2}}=3^{3^{k-2}}S;$$
$$C_{2^k}^{2^{k-1}}-C_{2^{k-1}}^{2^{k-2}}=2^{3^{k-3}}T,$$

где $k\geqslant3$, а R, S, T — некоторые целые числа.

Доказательство теоремы осуществляется последовательным использованием лемм 9, 11, 6, 12, 2.

Замечание. Из доказательства теоремы можно дополнительно увидеть, что указанные в теореме числа S и T не делятся на 3 и 2 соответственно. Автору неизвестно, как обстоит дело в общем случае — делится или не делится на p число R.

Цитированная литература

1. Фукс Д. Б., Фукс М. Б., Арифметика биномиальных коэффициентов. «Квант» № 6, 1970, стр. 17—25.

2. Соминский И. С., Метод математической индукции. М., Физматгиз, 1961.

3. Егоров А. А., Сравнения по модулю и арифметика остатков. «Квант» № 5, 1970, стр. 27—33.

Примечание редакции. Как сообщил нам читатель Ю. Трахтман (Днепропетровск), ему удалось получить некоторые условия, при которых числа R, S, T, фигурирующие в теореме, не делятся на p, 3, 2 соответственно. Однако этот результат формулируется в терминах, незнакомых школьникам и доказывается неэлементарными средствами.

МЕХАНИКА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОЛЧКА

С. А. Кривошлыков

В редакцию нашего журнала пришло письмо.

«Я купил волчок в магазине «Игрушка». При запуске он переворачивается и начинает вращаться на рукоятке.

Меня интересует, какие законы физики лежат в основе его движения? Как рассчитать размеры волчка?

Ученик 10 класса Титаревской средней школы В. Ткачев»

Нам кажется, что ответ на это письмо будет интересен многим нашим читателям. Ниже мы публикуем статью ученика 10 класса школы № 45 г. Киева Сергея Кривошлыкова, содержащую ответы на поставленные вопросы. Это несколько переработанный его доклад на IV научной конференции школьников Киева.

Волчок, о котором пишет Ткачев (его часто называют волчком Томсона), представляет собой шарик со срезанной верхушкой. В центре среза находится ножка — ось, за которую волчок раскручивается (рис. 1*).

Если волчок раскрутить шариком вниз, то он, вращаясь, наклоняется, ложится набок, касается своей ножкой поверхности стола, а затем вскакивает на нее и продолжает спокойно вращаться на ножке шариком кверху (рис. 2). С уменьшением скорости вращения волчок опять возвращается в первоначальное положение. Такое поведение волчка кажется на первый взгляд очень странным. Вскакивая на ножку, волчок увеличивает свою потенциальную энергию. Что заставляет его это делать? Ведь известно, что всякая система стремится к минимуму потенциальной энергии. Рассмотрим явления, связанные с вращением твердого тела вокруг своей оси.

Возьмем большой маховик (например, велосипедное колесо), который может свободно вращаться вокруг жесткой горизонтальной оси.

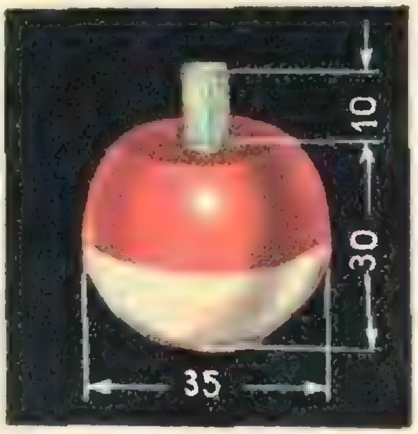


Рис. 1.

---

* Размеры приведены в *мм*.

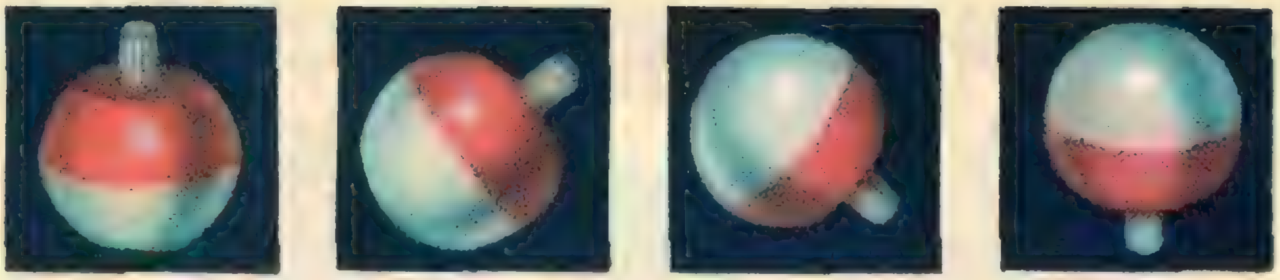


Рис. 2.

Раскрутив маховик, попробуем, взявшись руками за ось, повернуть ее в вертикальной плоскости (как показано зелеными стрелками на рисунке 3). Мы почувствуем значительное сопротивление этому повороту. Вращающийся маховик стремится сохранить свой момент количества движения (его величину и направление, а значит, угловую скорость вращения и направление оси вращения *)). Приложим большее усилие. Как ни странно, но мы не получим предполагаемого поворота. Ось повернется не в вертикальной плоскости, как мы хотели, а в горизонтальной, так, как показано красными стрелками.

Это, впрочем, неожиданно лишь на первый взгляд. Как мы знаем, при вращательном движении тел вектор момента внешних сил равен скорости изменения вектора момента количества движения: $\mathbf{M} = \frac{\Delta (I\omega)}{\Delta t}$ (аналогично тому, как при прямолинейном движении тела внешняя сила, приложенная к телу, равна скорости изменения импульса тела: $\mathbf{F} = \frac{\Delta (m\mathbf{v})}{\Delta t}$). Поэтому вектор $\Delta (I\omega)$ изменения момента импульса маховика за малое время Δt параллелен вектору **M** момента сил **F** (рис. 4), то есть лежит в горизонтальной плоскости. В этой же плоскости лежит и новый вектор момента импульса. Причем, так как вектор **M** перпендикулярен вектору $(I\omega)$, то изменение момента импульса $\Delta(I\omega)$ перпендикулярно самому вектору $I\omega$ момента импульса. (На рисунке 4 вектор $\Delta (I\omega)$ сделан непропорционально большим.) Поэтому момент импульса в нашем случае не изменяется по величине и меняет лишь направление. Это означает, что не меняется и угловая скорость вращения маховика вокруг его горизонтальной оси.

Если так же поворачивать ось в том случае, когда маховик вращается в противоположную сторону, то ось опять повернется в горизонтальной плоскости, но в противоположную сторону.

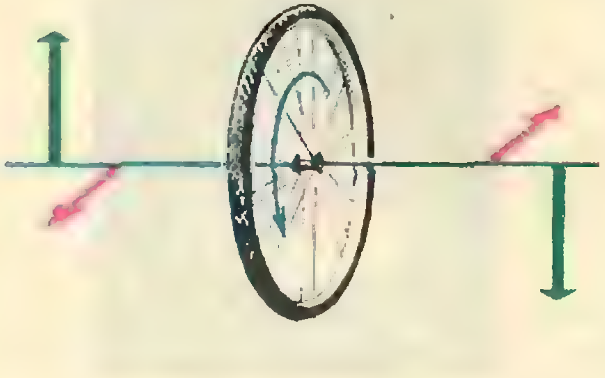


Рис. 3.

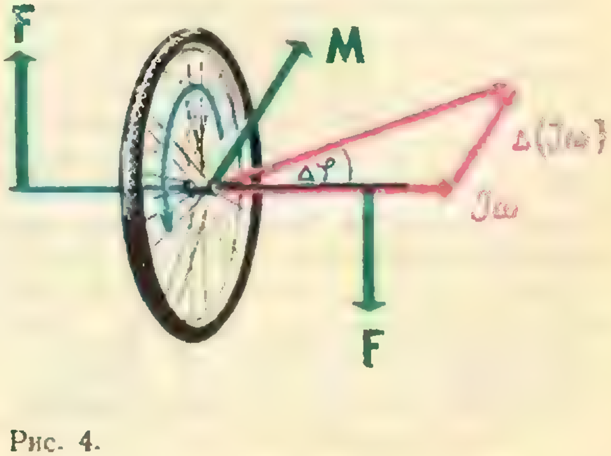


Рис. 4.

---

*) См. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел» («Квант» № 1, 1971).

Отклонение оси быстро вращающегося тела в направлении, перпендикулярном плоскости действия поворачивающих сил, называется прецессией.

Если момент внешних сил постоянен, то и скорость изменения вектора $I\omega$ постоянна $\left(\frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = \text{const}\right)$. В этом случае ось маховика вращается с некоторой угловой скоростью Ω, которую называют угловой скоростью прецессии. Чем больше момент сил, приложенных к маховику, тем больше угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{I\omega} = \frac{M}{I\omega}$$

(так как угол $\Delta\varphi_{\text{мал}}$, то $\Delta\varphi = \frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}$). Ясно также, что чем быстрее вращается маховик (чем больше ω и $I\omega$), тем меньше угловая скорость прецессии при одном и том же моменте внешних сил (так как тем меньше угол $\Delta\varphi$ за время Δt (см. рис. 4).

Рассмотрим вращающийся обыкновенный дискообразный волчок. В начале вращения, когда угловая скорость велика, его ось практически вертикальна. Затем угловая скорость вращения под действием сил трения в точке A и о воздух уменьшается, и волчок начинает прецессировать вокруг вертикальной оси, описывая коническую поверхность с вершиной A (рис. 5). Почему это происходит?

Рассмотрим силы, действующие на волчок. Сила тяжести P и сила реакции опоры N создают момент сил, стремящийся опрокинуть волчок. Это приводит к тому, что ось волчка смещается перпендикулярно плоскости действия этих сил, то есть прецессирует. Направление смещения оси показано на рисунке 5 красной стрелкой. При прецессии ось волчка описывает коническую поверхность с вершиной в точке A.

Следует заметить, что прецессия оси волчка существовала и в самом начале его вращения из-за неизбежного толчка, который мы ему сообщили при раскручивании (идеально раскрутить волчок невозможно), но эта прецессия была небольшой.

Кроме момента пары сил P и N, на волчок действует еще момент силы трения $F_{\text{тр}}$ относительно центра масс волчка. На рисунке 6 показано увеличенное острие волчка. Если точка касания острия с поверхностью не лежит на оси вращения волчка (волчок наклонился), то момент силы трения лежит в плоскости рисунка и направлен к вертикали. Изменение момента импульса волчка, обязанное моменту силы трения, тоже направ-

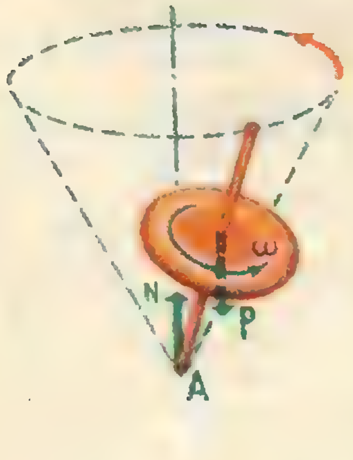


Рис. 5.

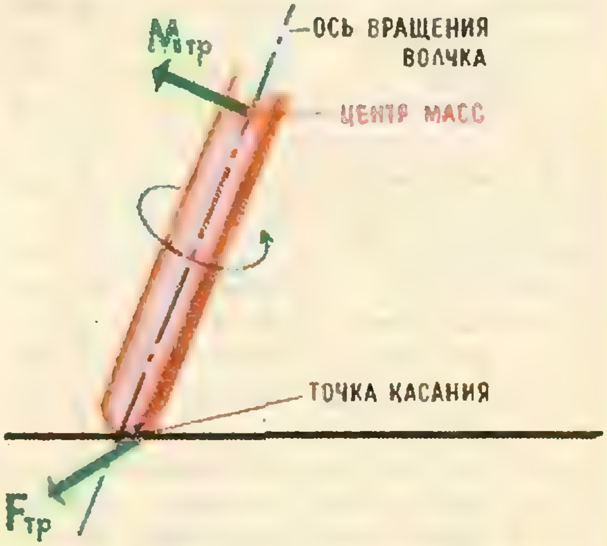


Рис. 6.

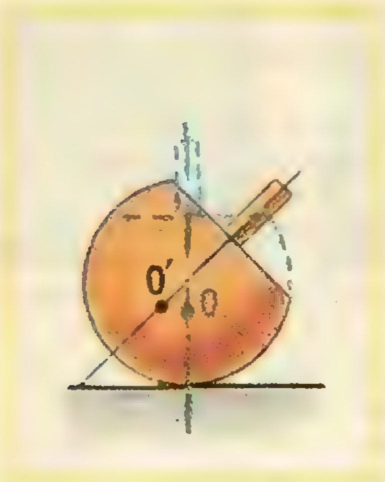


Рис. 7.

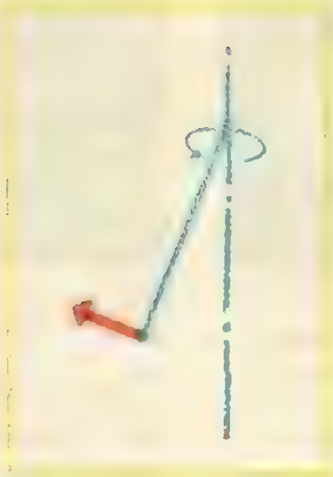


Рис 8.

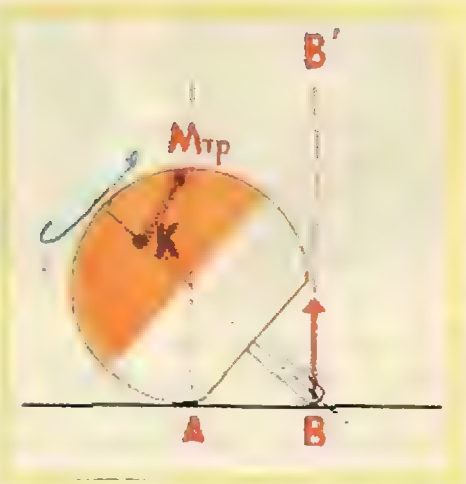


Рис. 9.

лено к оси; поэтому благодаря трению ось волчка стремится занять вертикальное положение. В этом легко убедиться, если запустить волчок наклонно. Через некоторое время его ось встанет вертикально. Момент сил трения направлен к вертикали (правило буравчика), следовательно, изменение момента количества движения волчка тоже направлено к вертикали, а ось волчка стремится стать перпендикулярно плоскости вращения.

Итак, на наклонный волчок действуют два момента сил: момент пары сил — реакции опоры и силы тяжести и момент силы трения. Движение волчка всегда происходит при наличии этих двух моментов.

Вернемся теперь к волчку Томсона и попробуем объяснить его поведение. Так как волчок Томсона состоит из сферы со срезанной верхушкой, то его центр тяжести находится ниже геометрического центра шара, из которого он изготовлен. При раскручивании волчка мы невольно отклоняем его ось от вертикального положения. Но так как волчок имеет сферическую форму, то точка его опоры в результате такого отклонения меняется. Ось же вращения волчка останется прежней — вертикальной и не будет совпадать с его геометрической осью. А так как центр тяжести волчка лежит ниже геометрического центра шарика, то в результате такого отклонения его центр тяжести уже не будет лежать на оси вращения (рис. 7). Он займет положение O' и будет вращаться вместе с волчком около вертикальной оси. При вращении с большой угловой скоростью центр тяжести волчка будет подниматься точно так же, как поднимается шарик на нити, если нить раскручивать так, как показано на рисунке 8.

Волчок не задерживается в боковом положении, а по инерции проскакивает его, касаясь своей ножкой плоскости, на которой он вращается (рис. 2). Как только это произойдет, точка опоры волчка перескочит из точки A в точку B (рис. 9), и волчок, вращаясь около своей оси, начнет прецессировать около оси BB'. Иными словами, волчок Томсона будет вести себя как «обыкновенный» волчок. Под действием момента силы трения он совместит свою ось с вертикальной осью BB' и будет продолжать вращаться шариком кверху.

Из приведенных выше рассуждений видно, что столь странным поведением волчка Томсона мы обязаны силе трения. Действительно, если бы сила трения отсутствовала, то волчок, ударившись ножкой о плоскость, вернулся бы в боковое положение и вращался бы так, пока имел достаточно большую угловую скорость. А затем под действием момента силы тяжести вернулся бы в исходное положение (рис. 2).

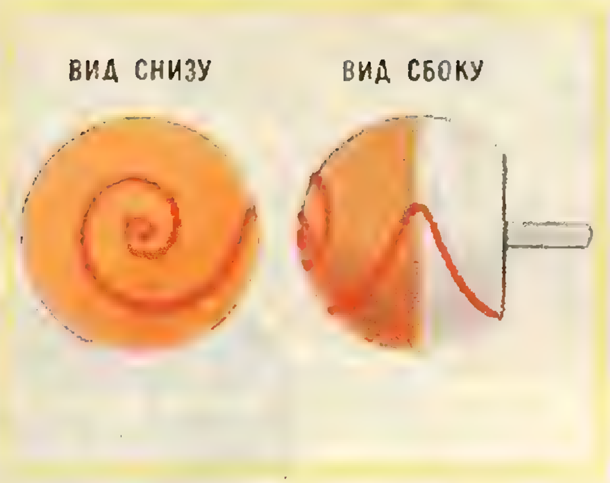


Рис. 10.

С волчком Томсона можно провести интересный опыт. Если волчок запустить по поверхности, покрытой тонким слоем пудры, то пудра оставит на поверхности волчка след — траекторию точки касания волчка с плоскостью. Этот след показан на рисунке 10. Линия на волчке закручивается спиралью, но на экваторе шарика волчка она начинает раскручиваться в обратную сторону. Почему это происходит? Закон сохранения момента количества движения требует, чтобы волчок вращался в одну и ту же сторону, как в исходном положении, так и в перевернутом. Пусть мы запустили волчок по часовой стрелке (если смотреть на него сверху). Если бы волчок перевернулся, не переставая вращаться вокруг своей оси, то в перевернутом состоянии он вращался бы уже против часовой стрелки. Поэтому, для того чтобы выполнялся закон сохранения момента количества движения, волчок в какой-то момент времени должен прекратить вращаться вокруг оси, проходящей через его ножку, а затем начать вращаться в обратную сторону. Судя по рисунку 10, это и происходит в тот момент, когда волчок лежит на боку.

Что касается расчетов размеров волчка, то он может быть любым, но таким, чтобы центр его масс не совпадал с геометрическим центром сферы, из которой он изготовлен.

ЗАДАЧИ О ШАХМАТНОМ ТУРНИРЕ

1. В турнире*) участвовало 8 шахматистов. Все они набрали разное число очков, причем второй призер набрал столько же, сколько набрали все шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

2. В турнире играли два ученика 7-го класса и несколько учеников 8-го. Семиклассники набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали поровну. Сколько восьмиклассников могло участвовать в турнире?

3. В турнире участвовало n шахматистов — гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что $\sqrt{n}$ — целое число.

4. Шахматист играет для тренировки не менее одной партии в день и, чтобы не переутомиться, не более 12 — в неделю. Доказать, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

5. Каждый шахматист в турнире половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

6. Доказать, что по окончании турнира его участников можно перенумеровать так, что окажется, что ни один участник не проиграл следующему непосредственно за ним.

---

*) Мы предполагаем, что шахматисты играют друг с другом по одной партии, то есть турнир проводится в один круг.

МЕЖЗВЕЗДНЫЕ КОРАБЛИ НА ГРАВИТАЦИОННЫХ РЕССОРАХ

(ФАНТАСТИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ)

И. А. Воробьев

Даже до самых близких звезд очень далеко. Еще дальше до других галактик. От галактики Туманность Андромеды свет добирается до нас около миллиона лет.

Мыслимо ли слетать к ней, скажем, за неделю? По земному времени так скоро до Андромеды не добраться. Свет, и тот идет годы и годы. А быстрее света корабль двигаться не может. Другое дело — по времени самого межзвездного путешественника, если его корабль летит с достаточно большой скоростью. При движении с большими скоростями происходит замедление решительно всех процессов в одинаковое число раз. Чем больше скорость, тем больше это замедление.

Как же надо лететь, если мы хотим за неделю совершить путешествие к Туманности Андромеды? Расстояние в 10^6 световых лет надо преодолеть за $\frac{1}{52}$ года. Расчеты по формуле теории относительности дают невероятный результат: необходимо лететь с постоянным ускорением $a = 700\,g$! (g — ускорение свободного падения).

Но как быть с перегрузками? При ускорении $700\,g$ наш вес увеличится в 700 раз! Все равно, что по звездолетчику проехаться асфальтовым катком. Наша кровь тоже потяжелеет в 700 раз. А она должна циркулировать по всему телу. С такой значительной нагрузкой сердце не справится. Пилоты при резких виражах иногда временно слепнут — кровь не поднимается к мозгу, хотя здесь ускорение a не превосходит $5 \div 10\,g$. Можно лечь, чтобы уменьшить нагрузку на сердце, — тогда нужно поднимать кровь на меньшую высоту. Но даже десятикратную перегрузку в таком положении можно выдержать лишь три-пять минут.

Нельзя ли придумать лучший способ, который позволит двигаться с любым ускорением без всяких перегрузок?

Нельзя ли предложить конструкцию корабля, избавляющую астронавта от каких-либо перегрузок?

Прежде чем броситься на врага, полезно его изучить.

Откуда берется вес?

Если встать на пружинные весы, стрелка отклонится от нулевого положения. Земля притягивает тело, а так как относительно весов мы неподвижны, то эта сила должна уравновеситься упругой силой пружин. Стрелка покажет нам вес $P = mg$ (m — масса). Пусть мы измеряем вес (показания пружинных весов) в лифте, поднимающемся с ускорением. Стрелка покажет $m\,(a+g)$, появляется пере-

грузка: упругая сила не только уравновешивает притяжение Земли, но и придает телу ускорение a. Если же лифт свободно падает, то вес будет нулевым — все тела падают с одинаковым ускорением, наше перемещение будет точно таким же, как перемещение пружины, и пружина не сожмется. Взяв яблоко, мы не почувствуем его веса, оно не давит на руку, а свободно падает вместе с рукой.

Итак, вес $P=m(a+g)$, если a направлено вверх. Когда a направлено в ту же сторону, что и ускорение свободного падения g и $|a|=|g|$ (свободное падение), наступает состояние невесомости. Это состояние испытывают космонавты при полете с выключенными двигателями, ибо тогда они как раз и движутся с ускорением свободного падения.

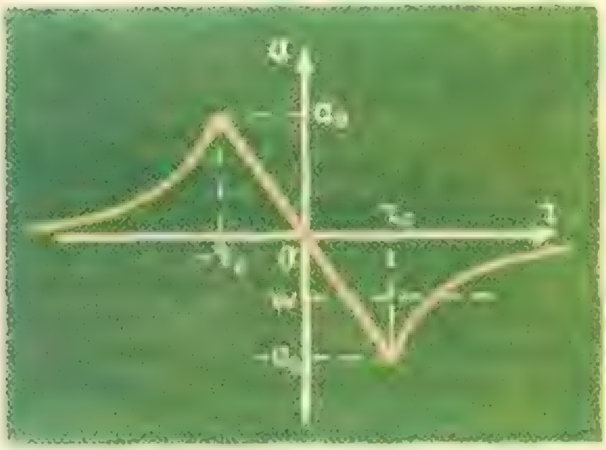
Важно, что вес обусловлен и ускорением, и гравитационным притяжением. Появилась возможность компенсировать одно другим. Создать невесомость можно потому, что ускорение свободного падения не зависит ни от массы, ни от вещества падающих тел. Это свойство открыл еще Галилей. Но и сейчас исследователи порой не удерживаются от соблазна проверить это свойство. В 1964 году Ролл, Кротков и Дикке установили равенство ускорений для золота и алюминия с точностью до 0,00000000001!

С невесомостью мы встречаемся в кабине свободно падающего лифта. Там нет никаких перегрузок. Возьмем массивное тело, создающее ускорение свободного падения a, по величине равное желаемому ускорению путешествия. Установим на нем двигатели, способные обеспечить как раз это ускорение. Путешественник со всеми удобствами размещается в отдельной кабине, свободно падающей на это тело. Кабина падает с ускорением a, но двигатели работают, и тело уходит с тем же ускорением.

При нулевой начальной скорости расстояние между кабиной и массивным телом будет неизменным. В свободно падающей кабине — невесомость, но в то же время она несется с необходимым ускорением.

Но долетев до половины пути, нужно начать тормозить. Согласование ускорения тела и ускорения свободного падения кабины нарушится, и кабина врежется в массивное тело. Кроме того, существует опасность отстать или упасть на тело при любом изменении ускорения корабля (массивного тела). Значит, надо лучше продумать конструкцию корабля.

Просверлим в направлении ускорения шахту через центр массивного тела, которому придали форму шара. Ускорение свободного падения будет меняться в зависимости от расстояния до центра шара. Обозначим ускорение на поверхности шара a_0, радиус шара r_0. Построим график для ускорения a на расстоянии r от центра шара (см. рисунок) *).



На расстояниях от $-r_0$ до r_0 (то есть внутри шара) ускорение свободного падения изменяется по закону $a=a_0\frac{r}{r_0}$, а при $r<-r_0$ и $r>r_0$

---

*) Подробно эта задача разобрана в статье Я. А. Смородинского «Похожие движения». Зависимость силы притяжения тела от расстояния до центра шара была найдена при решении задачи Ф43 («Квант» № 5, 1971).

(вне шара) ускорение $a = -a_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$. Отрицательный знак ускорения означает, что оно всегда направлено к центру шара.

Когда шар движется без ускорения, его центр является точкой устойчивого равновесия. При малых отклонениях возникает возвращающая сила. При ускорении корабля w, меньшем a_0, всегда найдется положение кабины, при котором ускорение свободного падения равно w. Чтобы найти по графику это положение, проведем прямую ниже оси r на расстоянии w. Появятся две точки пересечения, их ординаты дадут искомые расстояния. Точка внутри шахты соответствует устойчивому равновесию. При малом изменении ускорения корабля кабина будет колебаться около новой точки равновесия, сама следя за согласованностью ускорений, причем все это время в кабине будет сохраняться невесомость.

При торможении с тем же ускорением точка равновесия будет с другой стороны от центра шара.

Мы предложили радикальный способ борьбы с перегрузками. Какие «если» стоят на пути реализации этого фантастического проекта?

Законам природы он не противоречит. Основные трудности заключаются в источнике энергии: это общая трудность любого проекта межзвездного корабля. Но где взять массивное тело? Можно взять или тело очень большого объема или использовать вещество очень большой плотности. Чтобы легче было об этом размышлять, разберитесь в упражнениях, помещенных ниже.

Упражнения

1. Если реактивный самолет пикирует вниз с ускорением 1,5 g, то чему равен вес летчика и куда направлена сила веса?

2. Найдите отношения радиуса и массы шара той же плотности, что и Земля, к радиусу и массе Земли, если ускорение на поверхности шара составляет 1000 g.

А если плотность шара в 10^6 раз больше земной? (При некоторых физических условиях, например, на звездах, называемых белыми карликами, плотность вещества значительно превышает привычные нам значения.)

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ АТОМЫ

Мы все привыкли к тому, что атом построен так: в центре атома находится ядро, вокруг которого вращается Z электронов. Ядро имеет заряд Ze ($-e$ — заряд электрона), так что атом в целом нейтральный.

Лет 15 назад было открыто, что частицы μ- и π-мезоны (массы которых в 205 и 280 раз больше электронной массы соответственно) могут захватываться на орбиту и вращаться вокруг ядра, совсем как электрон, только на расстоянии в среднем в 205 или 280 раз меньшем.

Потом было обнаружено, что такой же эффект можно наблюдать и с более тяжелым K-мезоном, масса которого в 990 раз больше массы электрона. Соответственно он приближается к ядру на расстояние в 990 раз более близкое.

Летом 1970 года были открыты еще более экзотические атомы. На орбиту в атоме таллия «сел» антипротон. Правда, спустя очень короткое время (около 10^{-10} *сек*) он исчез — аннигилировал с одним из нуклонов в ядре, но все же можно было зарегистрировать рентгеновские лучи, которые он испускал, прыгая с орбиты на орбиту в таком атоме.

Кроме антипротона в роли «заменителя» электронов в атоме выступила еще одна частица — отрицательный сигма-гиперон Σ^-, масса которого больше протона и составляет 2395 масс электрона. Его (вернее, спектр рентгеновских лучей, который он испускает) обнаружили в атомах серы, хлора и цинка. Примерно через $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ *сек* Σ^--гиперон распался на нейтрон и отрицательный π-мезон. Но даже за такое малое время можно рассчитывать получить сведения о том, как эта частица взаимодействует с ядром.

Я. А. Смородинский

ЛАБОРАТОРИЯ КВАНТА

ИСКУССТВЕННЫЕ МИРАЖИ

Р. Вуд

Имя замечательного американского физика Роберта Вуда известно всем физикам и всем любителям физики. Это связано с тем, что он был не только основателем современной физической оптики, не только виртуозом и чародеем эксперимента, но и любителем эффектного опыта и блестящим демонстратором.

Ниже мы помещаем его статью с описанием эффектных демонстрационных опытов. Она была опубликована в журнале «Philosophical Magazine» в 1899 году. Публикация подготовлена Л. А. Савиной.

Профессор Эверетт, обсуждая явление миража («Nature» 19 ноября 1874 г.), показал, что для образования резко очерченных миражей необходимо наличие горизонтальной плоскости с максимальным коэффициентом преломления. При движении вверх и вниз от этой плоскости оптическая плотность уменьшается пропорционально расстоянию от нее.

Горизонтальный или почти горизонтальный луч отклоняется к плоскости с максимальной плотностью и пересекает ее *). Затем он меняет свою кривизну и снова отклоняется к плоскости, которую пересекает снова и снова, проходя по траектории, близкой к синусоиде.

Наблюдая траекторию луча света в сосуде, наполненном раствором соли (оптическая плотность раствора увеличивалась с глубиной), я подумал, что, изменяя коэффициент преломления жидкости, можно было бы заставить луч перемещаться по синусоиде.

В результате получились довольно красивые опыты, которые можно показывать в аудитории. По-видимому, стоит их опубликовать, хотя, как я узнал позже, подобные эксперименты были уже описаны Винером.

Я сделал сосуд из толстого листового стекла длиной приблизительно 50 *см*, высотой 10 *см* и шириной 2 *см*. На 3 *см* наполнил его концентрированным раствором квасцов, а сверху налил слой водного раствора спирта ($\sim 10\%$) толщиной в 3 *см*. (Добавка спирта повышает коэффициент преломления воды.) Доливать воду в сосуд нужно осторожно при помощи пипетки, форма которой показана на рисунке 1.

В качестве жидкости с высоким коэффициентом преломления, удельный вес которой больше удельного веса воды, но меньше удельного веса раствора квасцов, я использовал смесь

---

*) О природе миражей рассказывается в статье Г. Я. Мякишева «Принцип Ферма и законы геометрической оптики» («Квант» № 11, 1970).

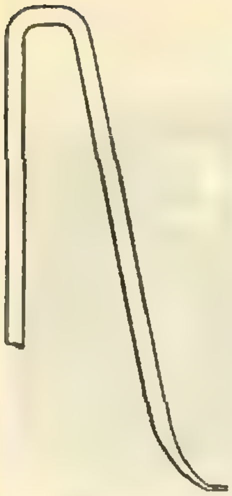


Рис. 1.

глицерина с 85%-ным спиртом. Правильная пропорция смеси легко находится экспериментально. Смесь должна плавать на растворе квасцов и тонуть в воде. Вводится она между двумя слоями жидкостей при помощи пипетки. Толщина слоя — около 3 *см*.

Все три раствора нужно подкислить несколькими каплями серной кислоты и добавлением хинина сделать флюоресцирующими. Разница в поверхностном натяжении между слоями может причинить неприятности: когда пипетка вынимается, она может потянуть за собой смесь глицерина и спирта вверх через воду. При этом произойдет полное разрушение слоев. Чтобы этого не происходило, к воде добавляют спирт; можно добавлять воду к глицериновой смеси. Пипетку нужно выводить медленно и очень наклонно, так, чтобы тяжелая жидкость могла быть смыта до того, как трубка достигнет поверхности.

Теперь можно осторожно встряхнуть сосуд, чтобы ускорить диффузию, после чего нужно оставить его в покое на несколько минут, пока не исчезнут четкие границы между слоями.

Если теперь параллельный пучок света пустить наклонно в один конец сосуда, то будет видно, как он перемещается по жидкости очень красивой голубой волной, кривизна которой меняется в зависимости от угла падения луча. Лучи света, движущиеся по синусоиде, показаны на рисунках 2 и 3.

Профессор Эверетт в своей статье показал, что параллельный или слегка расходящийся луч, входящий в среду, описанную выше, будет сжиматься в линию, а затем последовательно расходиться и сходиться (рис. 4).

Я никогда не видел описания этого эксперимента, хотя Экснер утверждал, что глаза некоторых насекомых работают аналогичным способом: зрительный орган состоит из прозрачного цилиндрического тела, ось которого имеет высокий коэффициент преломления; по мере отклонения от оси оптическая плотность непрерывно уменьшается.

Красивые миниатюрные пустынные миражи, которые я видел на городских тротуарах Сан-Франциско, навели меня на мысль воспроизвести это явление в миниатюре в аудитории. Хотя я уже кратко описал опыты такого типа, сейчас повторю описание более подробно.

Три или четыре совершенно плоских металлических пластины (каждая длиной приблизительно 1 *м* и шириной 30 *см*) монтируются конец к концу на железных треножниках и аккуратно выравниваются. Пластины должны быть достаточно толстыми (скажем, 0,5 *см*), чтобы не коро-

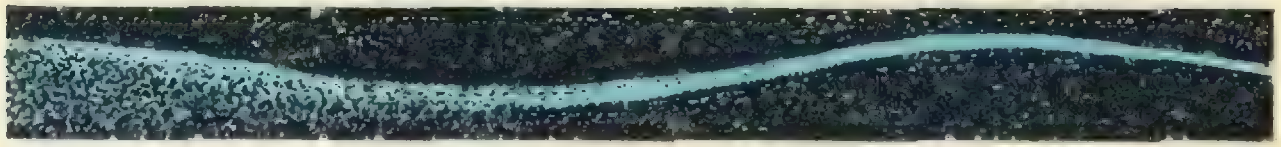


Рис. 2.

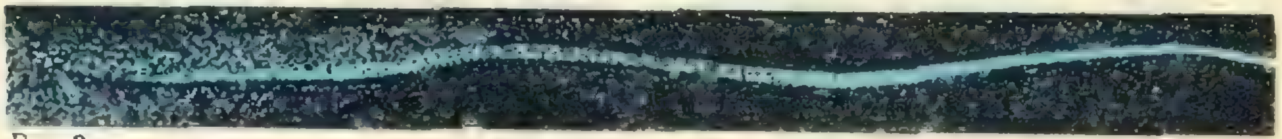


Рис. 3.

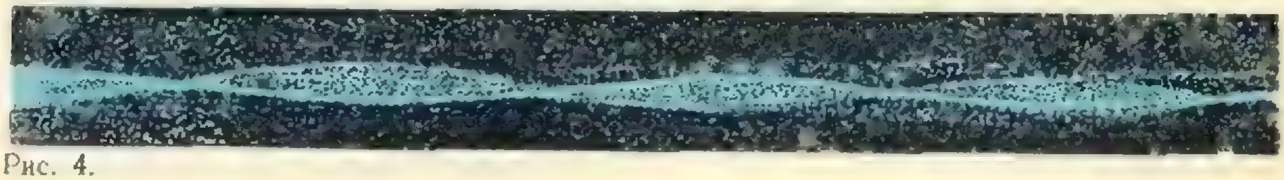


Рис. 4.

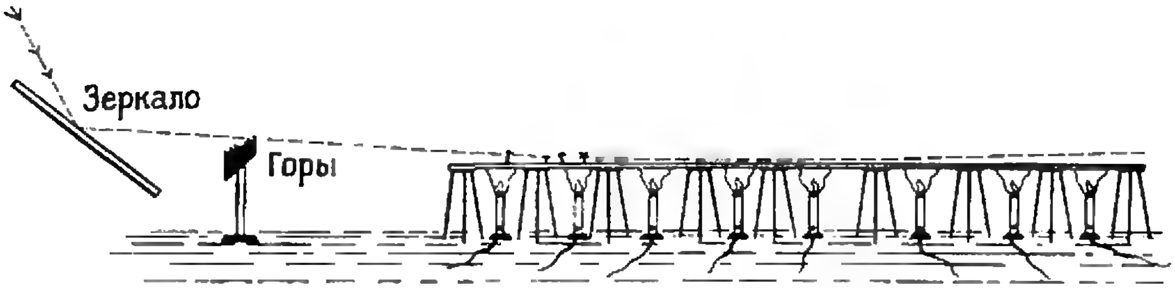


Рис. 5.

биться от нагревания. Я весьма успешно использовал гипсовые пластинки, отлитые из алебастра (обожженного гипса) на толстом листовом стекле, хотя эти пластинки хрупкие и недолговечные. Возможно, очень хороши были бы пластинки из шифера (кровельного сланца), так как они выдерживают довольно сильный нагрев и их можно сделать плоскими и гладкими.

Пластинки нужно посыпать толстым слоем песка, чтобы устранить отражение от поверхности. Поверхность песка должна казаться совершенно ровной. Для успешного проведения эксперимента нужна абсолютно ровная пустыня; поэтому не считайте, что вы уделили слишком много внимания регулированию пластинок. На одном конце пустыни нужно создать искусственное небо. Лучше всего использовать большое зеркало, установленное на окне и отражающее небо.

Между небом и пустыней нужно установить небольшую цепь гор, вырезанных из картона. Отдельные вершины должны иметь высоту от 1 до 2 *см*, а долины между ними — лишь немного возвышаться над уровнем пустыни. Общее расположение показано на рисунке 5.

Затем пластинки нагреваются с помощью газовых горелок, которые нужно время от времени передвигать, чтобы нагревание было равномерным.

Если мы теперь посмотрим вдоль пустыни немного выше уровня песка, мы увидим горы, четко выделяющиеся на фоне неба: по мере повышения температуры перед горной цепью начинает образовываться озеро, и через несколько мгновений появляется перевернутое изображение вершин, как будто бы отраженное в воде. Если смотреть немного ниже, подножья гор полностью исчезают в призрачном озере, которое теперь кажется вышедшим из берегов. Эти картины показаны на рисунке 6, причем фотографировался действительный мираж в искусственной пустыне. На первой фотографии показан вид над холодными пластинками, на второй — кажущееся озеро с отраженными в воде вершинами и на третьей— исчезновение подножий горных цепей. Для того чтобы усилить эффект, в песок были посажены две или три пальмы, вырезанные из бумаги.

В жаркой пустыне вертикальные размеры предметов могут увеличиваться. Если убрать горы и на песок

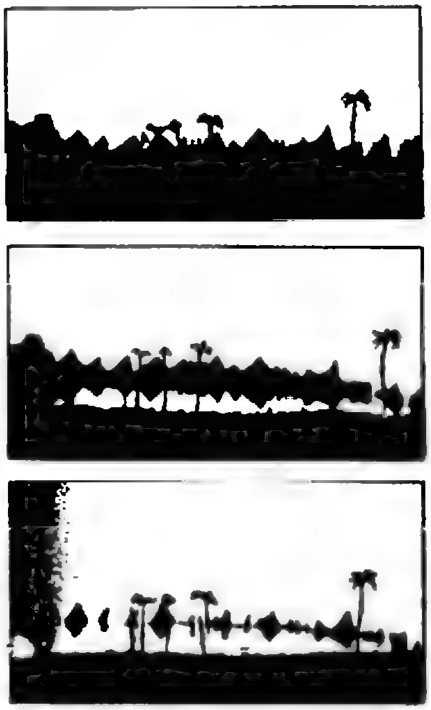


Рис. 6.

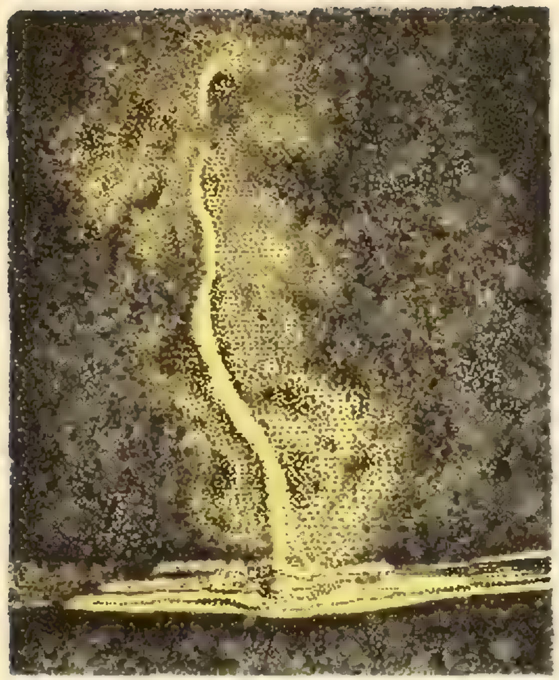


Рис. 7.

в дальнем конце пустыни положить небольшой мраморный шарик, то при определенном положении глаза круговой контур превратится в эллипс, а если глаз опускать, изображение сожмется в отрезок и в конце концов исчезнет. Увеличение размеров в этом случае вызвано тем, что прямое и отраженное изображения наблюдаются одновременно и при этом смещены друг относительно друга. Я наблюдал подобный случай на озере: когда вода теплая, а воздух холодный, пятна снега на противоположном берегу (слишком маленькие для того, чтобы различать их глазом с высоты нескольких метров над уровнем озера) становятся четко видимыми, если спуститься вниз к кромке воды.

Атмосферные условия, необходимые для возникновения миражей, могут также вызвать пылевые вихри, часто наблюдаемые в пустыне, а в большом масштабе и смерчи. Эти смерчи, так же как и миражи, можно воспроизвести в маленьком масштабе.

Одну из металлических пластин я посыпал кварцевым песком и нагревал несколькими горелками. Через несколько минут по поверхности начали двигаться очень красивые маленькие смерчи, скручивая тонкий песок в воронкообразные вихри; иногда это длилось 10—15 секунд.

Однако вихри, созданные таким способом, нельзя наблюдать в большой аудитории. Поэтому я искал способы создать их в бóльшем масштабе. Для этого после удаления песка хорошо нагревал пластинку и посыпал ее нашатырем: от горячей поверхности сразу же поднималось плотное облако белого пара и вскоре в центре появился самый настоящий миниатюрный смерч высотой около 2 *см*. Помещая пластинку в луч фонаря в темной комнате, можно демонстрировать вихри в большой аудитории. Я считаю, что лучше сначала насыпать на пластинку нашатырь, а затем нагревать ее: тогда вихри возникают почти непрерывно и часто сохраняются довольно долго.

На рисунке 7 показана мгновенная фотография одного из этих смерчей, сделанная при ярком солнечном свете.

Этот метод создания атмосферных вихрей предпочтительнее старого способа их создания с помощью быстро вращающегося барабана с поперечными перегородками *), так как здесь вихри возникают по тем же причинам и при тех же условиях, что и в природе.

---

*) См. статью Н. Е. Жуковского «Основы теории вихрей» («Квант» № 4, 1971).

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

ЗАДАЧИ

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на заключительных турах пятой Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М106. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены

$$x^2 + p_1x + q_1 \text{ и } x^2 + p_2x + q_2$$

имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

И. Ф. Шарыгин

М107. а) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ (рис. 1). На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ..., на стороне A_nA_1 точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке. Докажите, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \dots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \dots \cdot A_nD_n.$$

б) Докажите, что для треугольника верно и обратное утверждение: пусть на стороне A_1A_2 выбраны точки B_1 и D_2 на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3;$$

тогда, если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке.

В. Л. Гутенмахер

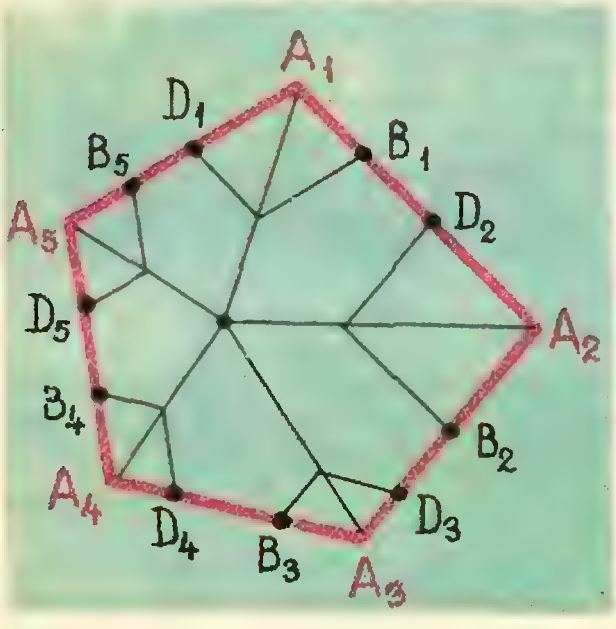


Рис. 1.

М108. а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите, аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

Ю. И. Ионин

М109. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

М110. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах;

2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $\frac{1}{5}$ и не более $\frac{4}{5}$ площади K.

Г. А. Розенблюм

Ф118. В камеру сгорания ракетного реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S. Давление в этом сечении P, абсолютная температура T. Определить силу тяги двигателя. (9—10 кл.)

Г. Л. Коткин

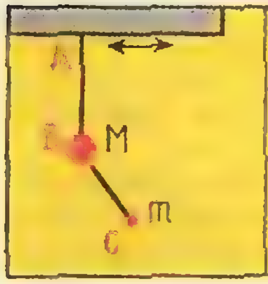


Рис. 2.

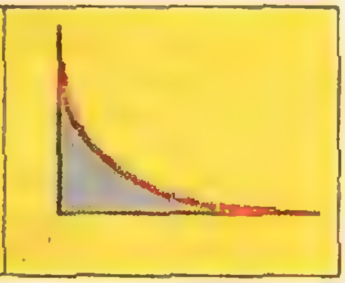


Рис. 3.

Ф119. К маятнику AB с шариком массы M подвешен маятник BC с шариком массы m (рис. 2). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T. Найти длину нити BC, если известно, что нить AB все время остается вертикальной. (10 кл.)

Г. Л. Коткин

Ф120. Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 3. (8 кл.)

М. М. Балашов

Ф121. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M, в который вмерзла свинцовая дробинка массы m. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца 11,3 *г/см*^{3}, плотность льда 0,9 *г/см*^{3}, теплота плавления льда 80 *кал/г*. Температура воды в сосуде равна 0° С. (8 кл.)

Ф122. Три тела с массами m_1, m_2 и m_3 могут скользить по горизонтальной плоскости без трения (рис. 4), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_2 \ll m_3$. Определить максимальные скорости, которые могут приобрести два крайних тела, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость v. Удары считать абсолютно упругими. (9 кл.)

Е. Кузнецов

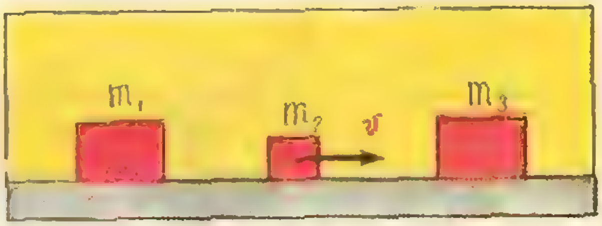
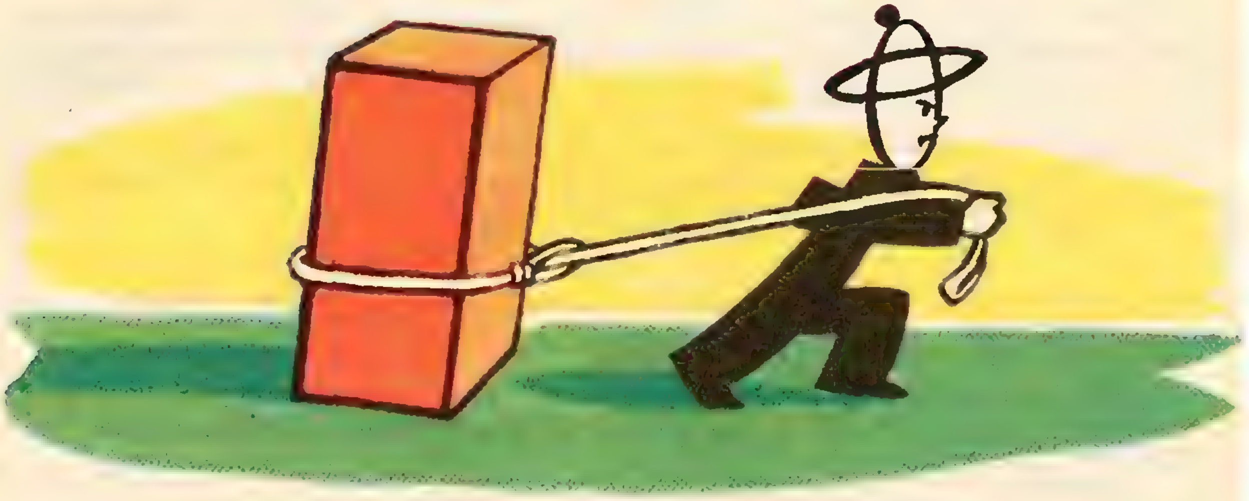


Рис. 4.

ЗАДАЧНИК КВАНТА



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М64—М69

М64

На плоскости даны прямая l и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM, наименьшее.

Заметим, что основания высот PK и QH треугольника PQM лежат на окружности c с диаметром PQ. Рассмотрим два случая.

1) Окружность c имеет одну или две общие точки с прямой l. Тогда ясно, что любая из этих точек и является искомой точкой M; треугольник PQM прямоугольный и расстояние между основаниями высот равно нулю; точки K и H совпадают с M.

2) Окружность c не имеет общих точек с прямой l. Тогда нетрудно доказать, что вписанный острый угол, опирающийся на дугу KH, равен $90-\angle PMQ$. Действительно, при любом положении точки M хотя бы одна из точек K или H лежит на стороне треугольника PQM, а не на ее продолжении; пусть, например, H. Тогда $\angle KHP=90^\circ-\angle QMP=\angle KPM=90^\circ-\angle KMP$. Таким образом, хорда KH тем меньше, чем больше угол QMP (рис. 1).

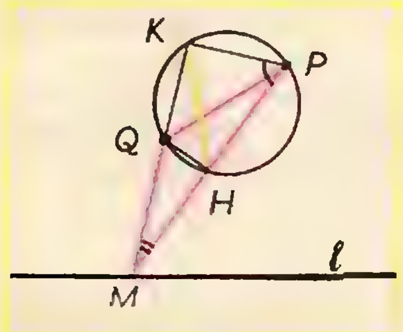


Рис. 1.

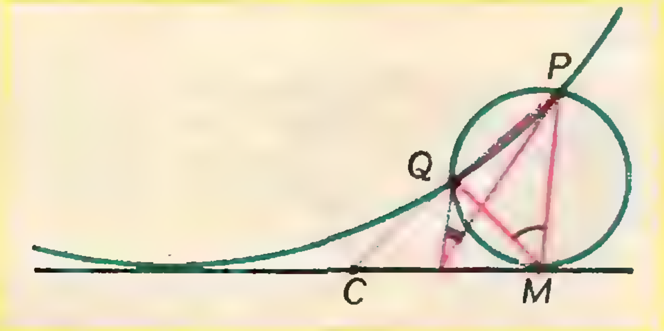


Рис. 2.

Остается решить такую задачу: найти на прямой l точку M, для которой угол PMQ наибольший. Нетрудно догадаться, что точка M должна обладать таким свойством: окружность, проходящая через точки P, Q и M, касается прямой l. Чтобы построить точку M, нужно (в случае, если отрезок PQ не параллелен прямой l) от точки C пересечения PQ и l отложить на прямой l отрезки $CM_1=CM_2=\sqrt{CP\cdot CQ}$, а затем из полученных точек M_1 и M_2 выбрать ту, для которой угол M_iCP острый (или прямой). Доказательство, что именно для этой точки угол PMQ максимален, почти очевидно и оставляется читателю *) (рис. 2).

Как это ни странно, многие читатели, приславшие нам письма, забыли про одну из возможностей 1) и 2). Наиболее полные решения прислали *О. Ким*, *Г. Левин*, *А. Пухальский*, *В. Лузгин*, *Ю. Оболонков*, *А. Костюрин*.

М65

а) Пусть E, F, G — такие точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, для которых
$$\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{CG}{GA}=k, \text{ где } 0<k<1.$$

Найти отношение площади треугольника KLM, образованного прямыми AF, BG и CE к площади треугольника ABC (рис. 3а).

б) Разрежьте треугольник шестью прямыми на такие части, из которых можно сложить семь равных треугольников.

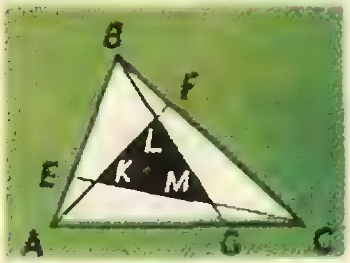


Рис. 3а.

а) Обозначим площадь треугольника с вершинами X, Y, Z, через $s(XYZ)$. Пользуясь тем, что отношение треугольников с одинаковыми высотами (или с одинаковыми основаниями) равно отношению оснований (соответственно отношению высот), нетрудно доказать, что

$$s(ACK)=\frac{1}{k}s(ABK)=\frac{k+1}{k^2}s(AEK)=$$
$$=\frac{k+1}{k^2+k+1}s(AEC)=\frac{k}{k^2+k+1}s(ABC).$$

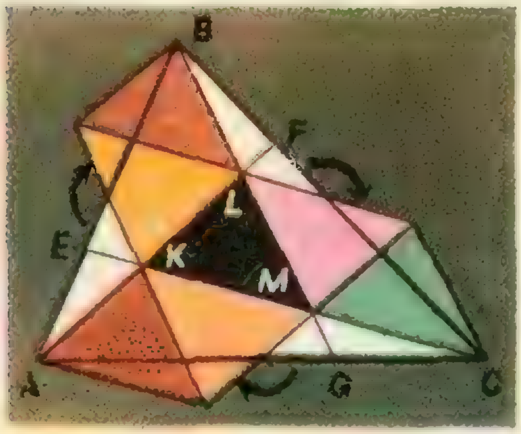


Рис. 3б.

Точно так же можно доказать, что
$$s(BLA)=s(CMB)=\frac{k}{k^2+k+1}s(ABC).$$
Поэтому
$$\frac{s(KLM)}{s(ABC)}=1-\frac{3k}{k^2+k+1}=$$
$$=\frac{(1-k)^2}{k^2+k+1}=\frac{(1-k)^3}{1-k^3}.$$

б) Заметим, что при $k=\frac{1}{2}$ это отношение равно $\frac{1}{7}$ и каждый из трех отрезков AF, BG, CE разбит двумя другими в отношении 3 : 3 : 1, так что если провести через точки M, K, L еще три прямые, соответственно параллельные этим отрезкам, то каждая из сторон треугольника ABC будет разбита в отношении 2 : 1 : 1 : 2.

---

*). Подробнее об этом см. в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», серия «Библиотечка физико-математической школы». «Наука», 1969, стр. 76—78.

Теперь уже нетрудно из 13 кусков, на которые разрезан треугольник ABC, собрать 7 равных треугольников (один из них состоит из единственного куска KLM; рис. 3б).

Аналогичное решение задачи прислали *А. Алексеев* из Ленинграда, *А. Аляев* из Пензенской области, *Э. Туркевич*, *А. Черняк*, *Ю. Оболенков*.

М66

Вот несколько примеров, когда сумма квадратов k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $(k-1)$ следующих натуральных чисел:

$$3^2+4^2=5^2,\quad 36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2.$$

Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

Докажем, что для каждого натурального k существует ровно одно натуральное n такое, что

$$(n-k+1)^2+(n-k+2)^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+$$
$$+(n+2)^2+\ldots+(n+k-1)^2. \qquad (1)$$

(Заметьте, что в правой части равенства стоит $(k-1)$ слагаемое, а в левой — k). Равенство (1) эквивалентно следующим:

$$n^2=[(n+1)^2-(n-k+1)^2]+[(n+2)^2-(n-k+2)^2]+\ldots$$
$$\ldots+[(n+k-1)^2-(n-1)^2], \qquad (2)$$

$$n^2=k(2n-k+2)+k(2n-k+4)+\ldots+k(2n+k-2), \qquad (3)$$

$$n^2=2k(k-1)n. \qquad (4)$$

Таким образом, высказанное утверждение доказано: равенство (1) для натуральных k и n выполняется тогда и только тогда, когда $n=2k^2-2k$. (При переходе от (3) к (4) мы воспользовались тем, что сумма $(k-1)$ членов арифметической прогрессии $(2n-k+2)+(2n-k+4)+\ldots+(2n+k-2)$ равна $(k-1)\dfrac{(2n-k+2)(2n+k-2)}{2}=2(k-1)n$). Тем самым мы получили искомую общую формулу. Ее можно записать, например, так:

$$(2k^2-3k+1)^2+(2k^2-3k+2)^2+\ldots+(2k^2-2k)^2=$$
$$=(2k^2-2k+1)^2+(2k^2-2k+2)^2+\ldots+(2k^2-k-1)^2,$$

где k — произвольное натуральное число. Примеры, приведенные в условии, получаются из нее при k, равном 2, 4 и 5.

Эту формулу (или другие, эквивалентные ей) нашли очень многие наши читатели — большинство из них либо приводит доказательство, близкое к нашему, либо использует в выкладках формулу для суммы квадратов натуральных чисел (см. лемму 1, на стр. 17).

М67

Ювелиру заказано золотое колечко шириной h, имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара с центром O и поверхностью цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку O (рис. 4). Мастер сделал такое колечко, но выбрал r слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если r нужно увеличить в k раз, а ширину h оставить прежней?

Нетрудно доказать, что объем *шарового кольца* — тела, получающегося при вращении сегмента AB вокруг диаметра MN, не пересекающего этот сегмент, — равен $\frac{\pi}{6}AB^2\cdot A_1B_1$, где A_1B_1 — проекция хорды AB на диаметр MN. Эта формула приводится, например, в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия», ч. II, гл. IV, 500.

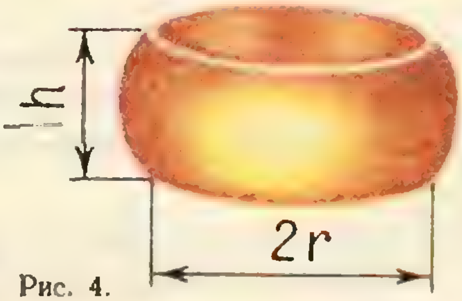


Рис. 4.

Объем колечка равен $\frac{\pi}{6}h^3$, то есть не зависит от радиуса r, так что золота мастеру добавлять не придется.

М68

Сетка линий, изображенная на рисунке 5 (см. также обложку «Кванта» № 2, 1971) состоит из концентрических окружностей радиусов 1, 2, 3, 4, ... с центром в точке O прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных прямой l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке розовых точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами темной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому весь рисунок как бы соткан из желтых и темных парабол).

Примем прямую l за ось Ox, а точку O — за начало координат прямоугольной системы, как показано на рисунке 5. Единица масштаба уже задана в условии. Сетка линий, о которой идет речь в условии, составлена из окружностей радиуса n с центром O (уравнение такой окружности $x^2+y^2=n^2$) и прямых $y=m$, где m и n — всевозможные целые числа; $n>0$. Таким образом, каждой точке пересечения (или касания) этих линий — каждому «узлу» (x, y) нашей сетки — соответствует определенная пара значений $n=\sqrt{x^2+y^2}$ и $m=y$. Заметим, что когда мы переходим от одной из розовых точек к соседней розовой точке, то и m, и n изменяются на единицу, так что их разность $n-m=\sqrt{x^2+y^2}-y$ остается постоянной; эта разность для всех розовых точек равна 6.

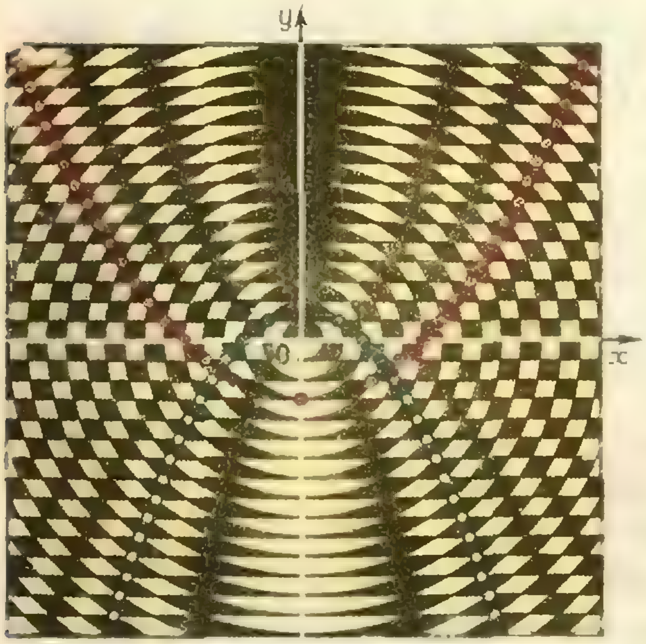


Рис. 5.

Уравнение $\sqrt{x^2+y^2}-y=6$ эквивалентно следующим: $x^2+y^2=(y+6)^2$; $y=\frac{x^2}{12}-3$. Таким образом, все розовые точки лежат на *параболе* $y=\frac{x^2}{12}-3$.

В другой подобной цепочке точек, которую мы нарисовали голубым цветом, при переходе от точки к соседней $\sqrt{x^2+y^2}$ и y меняются на единицу так, что постоянной остается их сумма: $\sqrt{x^2+y^2}+y=4$. Это уравнение после преобразований тоже превращается в уравнение параболы $y=-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}$.

Точно так же можно показать, что любая бесконечная цепочка точек, в которой соседние точки являются противоположными вершинами одной клетки (или одного сегмента), лежит на параболе $y=-\frac{x^2}{2p}+\frac{p}{2}$,

где p — некоторое целое число, отличное от нуля. Обратно, на любой из этих парабол лежит такая бесконечная цепочка точек (это точки пересечения параболы со всевозможными прямыми $y=m$).

Заметим, что если $p<0$, то есть если ветви параболы уходят вверх, то при четном p парабола идет по темным клеткам, а при нечетном p — по желтым; если же $p>0$, то наоборот. При этом через каждую точку пересечения прямых и окружностей нашей сетки (исключая точки касания, лежащие на прямой $x=0$), проходят две параболы; одна идет по желтым клеткам, другая — по темным; одна направлена ветвями вверх, другая — вниз.

Решение этой задачи прислали многие читатели. Некоторые пользуются в своем решении таким геометрическим определением параболы: *парабола — это 'множество точек, одинаково удаленных от данной точки и данной прямой.* По существу решение задачи **М68** очень близко к доказательству эквивалентности этого определения параболы и известного из школьного курса (*парабола — график квадратного трехчлена*). Если выбрать систему координат так, чтобы данная точка была началом координат, а данная прямая имела уравнение $y=c$, то условие, что точка (x, y) одинаково удалена от данной точки и данной прямой, запишется уравнением $\sqrt{x^2+y^2}=|y-c|$, которое эквивалентно уравнению $y=-\frac{x^2}{2c}+\frac{c}{2}$.

М69

Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова число 76.

а) Есть ли еще такие двузначные числа?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любого n квадрат числа «$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$» имеет вид «$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$»? (Кавычками здесь обозначена десятичная запись числа. Очевидный ответ $a_i = 0$ при всех $i>1$ мы исключаем.)

Ответ в этой задаче следующий: при любом $n>1$ существует ровно два таких n-значных числа $n>1$, квадрат которых оканчивается на A (не считая очевидных: 0 ... 0000 и 0 ... 0001),— при $n=2$ это 76 и 25, при $n=3$ — 376 и 625, при $n=4$ — 9376 и 0625, при $n=5$ — 09376 и 90625 и т. д., так что существует две бесконечные последовательности цифр, о которых идет речь в пункте в): одна начинается с цифр 6, 7, 3, 9, 0, 1,... , другая — с цифр 5, 2, 6, 0, 9, 8, ...*).

Начнем с задачи а). Самый простой способ найти нужные нам двузначные числа, который указывают многие читатели, состоит в следующем. Если A^2 оканчивается теми же двумя цифрами, что и A, то $A^2-A=A(A-1)$ делится на $100=25\cdot 4$, а поскольку числа A и $(A-1)$ взаимно просты (не имеют общих делителей, больших 1), то одно из них должно делиться на 25, а другое — на 4. Попробуем, подходит ли каждое из чисел 25, 50 и 75 на роль A или на роль $A-1$ (оба эти числа двузначны). Для этого нужно лишь проверить, какие из соседних с ними чисел делятся на 4. Это будут только 76 и 24, поэтому A может равняться только 25 и 76.

Аналогично можно решить и задачу б), но мы докажем сразу более общее утверждение: если квадрат числа $B=$«$a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1$» оканчивается цифрами «$\ldots a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1$», то можно и притом единственным образом выбрать цифру a_n так, чтобы квадрат числа $A=$«$a_n a_{n-1} \ldots a_1$» оканчивался на «$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_1$».

Пусть $B^2=$«$\ldots b_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1$». Тогда $(n \geqslant 2 \Rightarrow 2n > n+1)$

$$A^2=(10^n a_n + B)^2 = 10^{2n} a_n + 2\cdot 10^n a_n B + B^2 = «\ldots c_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1»,$$

где c_n — последняя цифра числа $2a_n a_1+b_n$. Мы должны подобрать a_n так, чтобы c_n равнялось a_n, то есть чтобы $2a_n a_1+b_n-a_n=(2a_1-1)a_n+b_n$ делилось на 10. Очевидно, что это можно сделать и притом единственным образом. В интересующих нас случаях $a_1=5$ и $a_1=6$ функции $b_n \to a_n$, которые мы должны указать, особенно просты: если $a_1=5$, то $a_n=b_n$, а если $n=6$, то $a_n=10-b_n$ при $b_n>0$ и $a_n=0$ при $b_n=0$.

Подробнее этот подход к решению задачи **М68** обсуждается в книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра», стр. 81—85.

---

*) Мы не исключаем из рассмотрения числа «$a_n a_{n-1} \ldots a_1$», у которых первая цифра a_n (или несколько первых цифр) равна нулю. Читатели, которые таких чисел не рассматривали, естественно, дошли только до четырехзначного числа 9376 и трехзначного 625.

Для тех, кто разобрался в статье М. И. Башмакова «Любите ли вы возиться с целыми числами» («Квант» № 3, 1971), заметим, что доказанное только что утверждение можно сформулировать еще так: из разрешимости сравнения $x^2-x\equiv 0$ по модулю 10^n следует его разрешимость по модулю 10^{n+1}. Это утверждение мы использовали для того, чтобы построить два нетривиальных решения уравнения $x^2-x=0$ в 10-адических числах *)— числах, «бесконечных влево»: x_1 = «...890625» и x_2=«...109376» (тривиальными мы называем решения 0 = «...0000» и 1 = «...0001»). Проверьте следующие свойства двух построенных чисел: $x_1+x_2=1$; $x_1x_2=0$. Подумайте, при каких еще m уравнение $x^2-x=0$ имеет решения в m-адических числах, отличные от 0 и 1 (другими словами, попробуйте решить задачу, аналогичную **М68**, в m-ичной системе счисления).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф75-Ф78

Ф75

Поршень с площадью S шарнирно связан с шайбой C, скользящей без трения по рычагу AB (рис. 6). Длина рычага L. Какую наименьшую силу нужно приложить к рычагу для того чтобы увеличить давление в жидкости на Δp?

Для того чтобы давление в жидкости увеличилось на Δp, сила, действующая на шток, должна возрасти на величину $\Delta p\cdot S$. Это означает, что сила, действующая на шайбу C со стороны рычага, должна возрасти на $N=\frac{\Delta pS}{\cos\alpha}$; эта сила перпендикулярна рычагу вследствие отсутствия трения между рычагом и шайбой. Сам рычаг находится в равновесии. Это означает, что сумма моментов, приложенных к нему относительно оси, проходящей через точку A, должна быть равна нулю, то есть момент силы N, действующей на рычаг со стороны шайбы, должен быть равен моменту силы F, приложенной к рычагу.

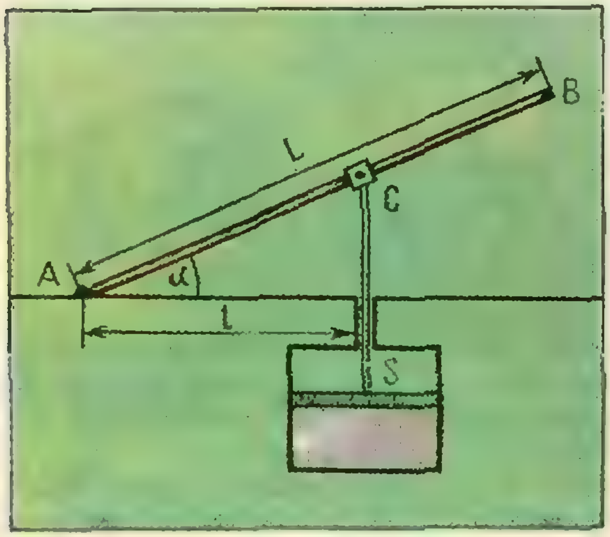


Рис. 6.

Очевидно, что сила F минимальна, если она приложена в точке B и направлена перпендикулярно рычагу. Именно в этом случае плечо силы F максимально и равно L. Записав условие равновесия рычага

$$FL=N\frac{l}{\cos\alpha},$$

получим

$$F=\frac{\Delta pSl}{L\cos^2\alpha}.$$

Большинство ошибок при решении было связано с вычислением силы, действующей на рычаг в точке C.

Правильное решение задачи прислали *И. Алтунин* (Могилев), *Е. Кулешов* (Речица Гомельской обл.), *С. Черников* (Семипалатинск), *С. Иванов* (Москва), *А. Костюрин* (пос. Красково Московской обл.), *М. Козловский* (Москва), *А. Старченко* (пос. Петропавловка Петропавловского р-на Днепропетровской обл.).

---

*) В статье М. И. Башмакова речь идет только о p-адических числах при простом p. Аналогично можно построить m-адические числа и при составном m, но они уже не будут обладать многими хорошими свойствами, которыми обладают p-адические и обычные вещественные числа. Например, произведение двух отличных от нуля m-адических чисел может равняться нулю, квадратное уравнение, как мы сейчас увидим, может иметь больше двух корней и т. п.

Ф76

Тяжелый обруч с невесомыми спицами расположен в вертикальной плоскости и может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр. В толще его обода закреплен маленький шарик, имеющий такую же массу, как и сам обруч. Каким будет период колебаний обруча вокруг оси? Как он изменится, если: а) этот обруч перенести на Луну? б) поместить в жидкость, в которой он будет двигаться без трения?

Займемся аналогиями. С ними читатели могут познакомиться, прочитав статью Я. А. Смородинского «Похожие движения» в восьмом номере журнала за этот год. Воспользуемся аналогией с математическим маятником длины R.

Если максимальный угол отклонения маятника и прикрепленного к обручу шарика равен α_0 (рис. 7), то при этом они находятся на высоте $h = R\,(1 - \cos\alpha_0)$ от положения равновесия. При угле отклонения α кинетическая энергия маятника (и обруча с шариком) равна разности потенциальных энергий при угле α_0 и угле α. Для математического маятника получаем

$$\frac{mv^2}{2} = mgR\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Поэтому скорость маятника

$$v = \sqrt{2gR\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}.$$

Так же, как и у маятника, меняется потенциальная энергия обруча с шариком. Потенциальная энергия самого обруча не меняется, но кинетическая энергия в этом случае равна сумме кинетических энергий шарика $E_ш = \frac{mv^2}{2}$ и обруча $E_0 = \frac{mv^2}{2}$ (по поводу кинетической энергии обруча см. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел», «Квант» № 1, 1971). Поэтому в случае обруча с шариком из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgR\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0),$$

и скорость шарика

$$v = \sqrt{gR\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}.$$

При любом угле отклонения от положения равновесия скорость шарика в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости математического маятника. Следовательно,

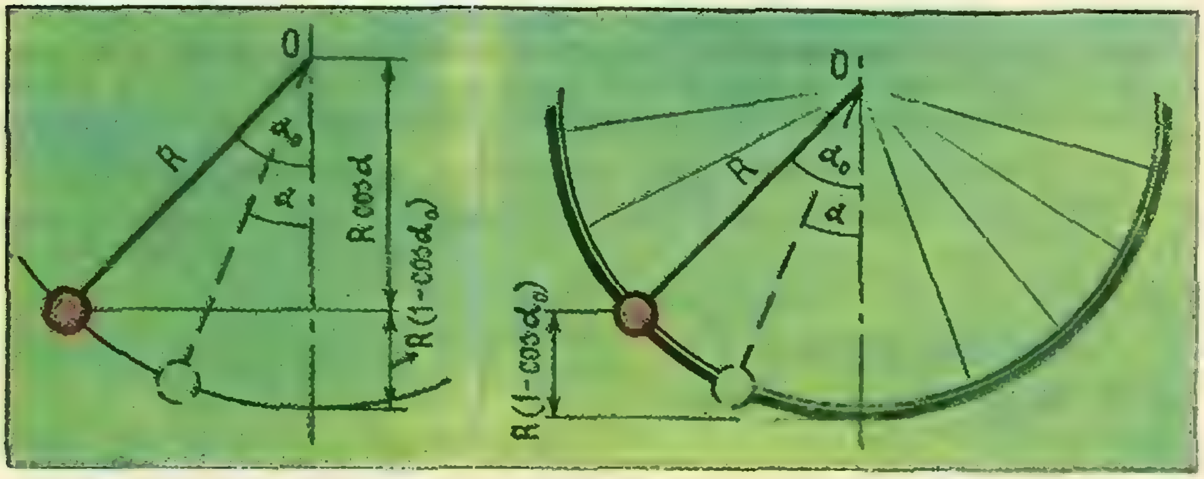


Рис. 7.

и период колебаний обруча с шариком в $\sqrt{2}$ раз больше периода колебаний маятника и равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Можно подойти к решению этой задачи и иначе. Если математический маятник отклонен от положения равновесия на угол α, то его возвращает к положению равновесия составляющая силы тяжести, касательная к траектории движения маятника (рис. 8):

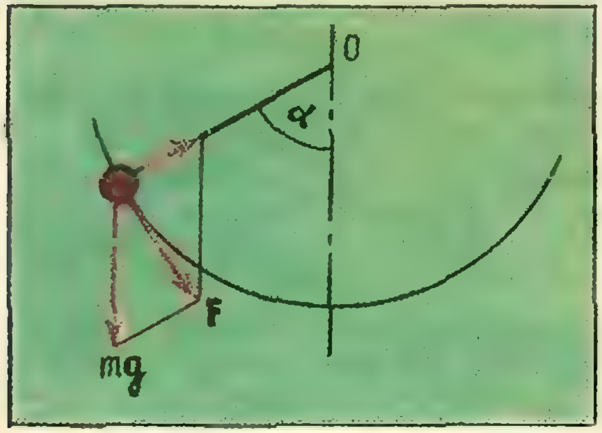


Рис. 8.

$$F=mg\sin\alpha.$$

Так как угол α мал, то $\sin\alpha\approx\alpha\approx\approx\frac{x}{R}$, где x—смещение маятника от положения равновесия. Отсюда

$$F\approx mg\frac{x}{R}.$$

Поэтому для касательной составляющей ускорения маятника мы можем записать уравнение

$$mg\frac{x}{R}=ma \text{ или } a=\frac{g}{R}x=cx,$$

где $c=\frac{g}{R}$—некоторый постоянный для данного маятника коэффициент. Период колебаний маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, то есть $2\pi/\sqrt{c}$.

Аналогичный результат мы получим и для грузика, прикрепленного к пружинке и колеблющегося вдоль горизонтальной плоскости. Уравнение движения такого грузика $kx=ma$, а период колебаний $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

В нашем случае сила, возвращающая шарик к положению равновесия, равна, как и в случае математического маятника, $mg\frac{x}{R}$, а ускорение a сообщается и шарику, и обручу, то есть массе $2m$. Поэтому $mg\frac{x}{R}=2ma$; значит, $c=\frac{g}{2R}$ и период колебаний системы $T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$.

Если обруч с шариком перенести на Луну или поместить в сосуд с жидкостью, то его период колебаний изменится точно так же, как период колебаний математического маятника: в первом случае увеличится в $\sqrt{6}$ раз $\left(g_л=\frac{1}{6}g_з\right)$ из-за изменения ускорения свободного падения, а во втором — уменьшится в $\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_т}}$ раз (ρ — плотность воды и $\rho_т$ — плотность материала шарика) из-за влияния архимедовой выталкивающей силы.

Правильное решение прислали *С. Иванов* (Москва), *Г. Зайцев* (Гагра), *А. Проскуряков* (Москва).

Ф77

Прямоугольный брусок, высота которого значительно превышает длину и ширину, стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, имея лишь один измерительный прибор — линейку?

Сделав из нитки петлю, накинем ее на брусок и потянем в горизонтальном направлении (рис. 9). Если нитка накинута на брусок близко от поверх-

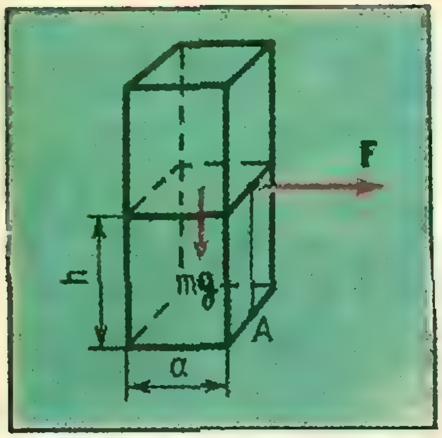


Рис. 9.

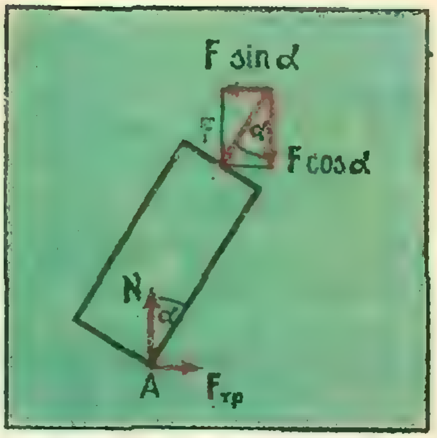


Рис. 10.

ности, брусок будет скользить. Если мы будем поднимать нить по бруску, то, когда она будет на некоторой высоте h_0 от поверхности, брусок уже не будет скользить, а начнет переворачиваться. При этом сила F, с которой мы тянем брусок, равна силе трения:

$$F = kmg,$$

а момент силы F относительно оси, проходящей через точку A, равен моменту силы тяжести:

$$Fh_0 = mg\,\frac{a}{2},$$

где a — сторона квадрата в основании бруска.

Решая совместно эти два уравнения, найдем

$$k = \frac{a}{2h_0}.$$

Измерив a и h_0 с помощью линейки, найдем коэффициент трения бруска о поверхность.

Такое решение прислали *И. Сидоров* (Москва), *А. Петров* (Асбест Свердловской обл.), *М. Розов* (Минск), *С. Юдин* (Волгоград), *Д. Шапиро* (Челябинск), *А. Александров* (Глазов Удм. АССР), *Г. Симоненков* (Каунас).

Интересное решение прислали А. Калика из Баку и С. Соболев из Москвы. Вот оно.

Наклонив брусок и удерживая его под некоторым углом к вертикали, приложим к бруску некоторую силу F, направленную вдоль бруска (рис. 10). При этом на брусок будут действовать еще сила реакции $N = mg + F\cos\alpha$ и сила трения $F_{тр}$. Если сила трения не достигает максимального значения, равного $kN = k\,(mg + F\cos\alpha)$, то конец бруска не будет скользить. При этом сила трения равна $F\sin\alpha$. Таким образом, конец бруска не проскальзывает при

$$F\sin\alpha < kmg + kF\cos\alpha,$$

то есть при

$$F < \frac{kmg}{\sin\alpha - k\cos\alpha}.$$

Нетрудно увидеть, что при $k > \operatorname{tg}\alpha$ брусок нельзя заставить двигаться, какой бы большой ни была сила F. Найдем угол α_0, при котором брусок начнет смещаться. Измерив с помощью линейки высоту от горизонтальной плоскости до края наклонившегося бруска и ширину бруска и вычислив $\operatorname{tg}\alpha_0$, найдем коэффициент трения k.

Ф78

20 *г* гелия, заключенного в цилиндре под поршнем, очень медленно переводят из состояния I ($P_1 = 4{,}1$ *атм*, $V_1 = 32$ *л*) в состояние II ($P_2 = 15{,}5$ *атм*, $V_2 = 9$ *л*). Какой наибольшей температуры достигает газ при этом процессе, если график зависимости давления от объема — прямая линия (рис. 11)?

Нанесем на график сетку изотерм — гипербол $PV = \mathrm{const}\,\frac{m}{\mu}RT$. Чем выше температура газа, тем дальше находится вершина гиперболы от начала координат. Поэтому ясно, что во время процесса I—II газ достигает такой наибольшей температуры, при которой соответствующая гипербола не пересекает прямую I—II, а только касается ее.

Так как точка с координатами P и V, соответствующая максимальной температуре, лежит как на гиперболе, так и на прямой, то ее координаты должны удовлетворять двум уравнениям: уравнению гиперболы

$$PV = \frac{m}{\mu}RT$$

и уравнению прямой

$$P = \alpha V + \beta$$

(α и β — постоянные. Их мы определим немного позже). Подставляя P из второго уравнения в первое, получим квадратное уравнение для V:

$$\alpha V^2 + \beta V - \frac{m}{\mu}RT = 0.$$

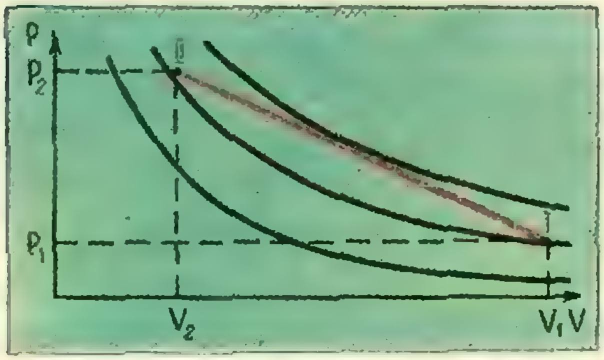


Рис. 11.

Так как гипербола и прямая должны иметь лишь одну общую точку, то это уравнение может иметь только один корень, то есть его детерминант должен быть равен нулю:

$$\beta^2 + 4\alpha\frac{m}{\mu}RT = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно T, найдем

$$T = -\frac{\beta^2\mu}{4\alpha mR}.$$

В это выражение нужно подставить значения коэффициентов α и β. Так как точки I и II принадлежат одной и той же прямой $P=\alpha V+\beta$, то $P_1 = \alpha V_1 + \beta$ и $P_2 = \alpha V_2 + \beta$. Решая эту систему уравнений, найдем

$$\alpha = -\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}, \qquad \beta = \frac{P_2V_1 - P_1V_2}{V_1 - V_2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{(P_2V_1 - P_1V_2)^2\,\mu}{4\,(P_2 - P_1)\,(V_1 - V_2)\,mR}.$$

Подставив численные значения входящих в это выражение величин, получим

$$T \approx 490^\circ\ \mathrm{K}.$$

Правильное решение прислали *М. Прегер* (Томск), *В. Рудько* (Киев), *Н. Федин* (Омск), *Г. Зайцев* (Гагра), *Л. Книжнерман* (Москва), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл.), *В. Трунков* (Гомель), *Е. Розов* (Минск), *А. Петров* (Асбест Свердловской обл.), *Л. Циферблат* (Львов), *И. Вигдорович* (Симферополь), *В. Тырышкин* (Куйбышев), *В. Мартынов* (Йошкар-Ола), *В. Климов* (Солнечногорск Московской обл.), *А. Товбш* (Одесса), *Г. Фаст* (Караганда), *М. Гликман* (Кишинев), *А. Зисман* (Псков), *А. Есин* (Лигиюль Ташкентской обл.), *А. Тарнопольский* (Николаев), *М. Саркисян* (пос. Агаран Мегринского р-на Арм. ССР).

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Системы алгебраических уравнений

М. И. Шабунин

На вступительных экзаменах в вузы нередко предлагаются системы алгебраических уравнений; в частности, такие системы возникают в задачах на составление уравнений. Опыт экзаменов показывает, что многие поступающие с решением систем уравнений справляются неудовлетворительно.

Дело в том, что обычно учащиеся вопрос о нахождении решений системы понимают просто как формальное выполнение ряда «привычных» алгебраических преобразований. При этом упускается из виду, что некоторые из применяемых преобразований могут привести к появлению посторонних решений или к потере решений исходной системы.

Без соответствующего обоснования решение системы уравнений логически неполноценно. В частности, мы можем не заметить потери некоторых решений. К сожалению, обоснованные, грамотно изложенные решения систем в работах поступающих встречаются крайне редко.

Подробное изложение всех важных вопросов, относящихся к системам уравнений, потребовало бы слишком много места *). Поэтому мы ограничимся тем, что приведем основные теоретические положения, касающиеся решения трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными, а затем рассмотрим несколько примеров.

Сначала напомним некоторые определения.

Систему трех уравнений с тремя неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x,\ y,\ z)=0, \\ f_2(x,\ y,\ z)=0, \\ f_3(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

или, опуская для краткости неизвестные, в виде

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0. \end{cases}$$

Мы будем рассматривать только алгебраические системы, то есть такие системы, у которых левая часть каждого уравнения системы является многочленом относительно неизвестных.

Решением системы (1) называется тройка чисел $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, при подстановке которых соответственно вместо x, y, z каждое уравнение системы (1) становится верным числовым равенством. *Решить систему* означает найти все ее решения.

Две системы уравнений

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0. \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases} g_1=0, \\ g_2=0, \\ g_3=0. \end{cases} \qquad (3)$$

---

*) Читателю можно рекомендовать обратиться, например, к книге В. Г. Болтянского, Ю. В. Сидорова и М. И. Шабунина «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1971.

называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одни и те же решения, то есть если всякое решение системы (2) является решением системы (3) и, наоборот, всякое решение системы (3) является решением системы (2). Для обозначения равносильности систем (2) и (3) используется запись «(2) $\Longleftrightarrow$ (3)».

Заметим, что если мы нашли все решения системы (3), равносильной системе (2), то тем самым найдены и все решения системы (2). В этом случае проверку проводить не нужно, то есть не нужно подставлять найденные при решении системы (3) значения неизвестных в исходную систему (2).

Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

назовем *следствием* системы (1), если каждое решение системы (1) удовлетворяет уравнению (4). Запись «(1) $\Longrightarrow$ (4)» будет означать, что уравнение (4) есть следствие системы (1).

Будем говорить, что система (1) равносильна *совокупности систем*

$$\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \\ F_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

и

$$\begin{cases} G_1 = 0, \\ G_2 = 0, \\ G_3 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

если выполнены следующие условия:

а) каждое решение системы (1) является решением по крайней мере одной из систем (5), (6);

б) каждое решение любой из систем (5), (6) является решением системы (1).

Запись «(1) $\Longleftrightarrow$ [(5) $\vee$ (6)]» будет означать, что система (1) равносильна совокупности систем (5) и (6).

Если система (1) равносильна совокупности систем (5) и (6), то можно решить системы (5), (6) и объединить множества решений этих систем; это объединение и даст все решения системы (1) (совокупность систем появляется при рассмотрении разных случаев типа $x>0$, $x<0$, $x=0$).

Сформулируем теперь несколько свойств, наиболее часто используемых при решении систем уравнений. Мы не будем доказывать эти свойства; используя приведенные определения, читатель легко сможет самостоятельно провести необходимые обоснования.

I. Пусть одно из уравнений системы (1), для определенности первое, «распадается» на два уравнения, например представляется в виде

$$g_1(x, y, z)\, g_2(x, y, z) = 0,$$

где g_1 и g_2 — многочлены от x, y, z. Тогда система (1) равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} g_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Это утверждение легко обобщается на случай, когда два или три уравнения системы (1) «распадаются» на несколько уравнений.

II. Если уравнение (4) является следствием системы (1), то, присоединив к системе (1) уравнение (4), мы получим систему $\{(1), (4)\}$ четырех уравнений, равносильную исходной.

III. Пусть уравнение (4), являющееся следствием системы (1), «распадается» на два уравнения:

$$F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z) = 0,$$

где F_1, F_2 — многочлены от x, y, z. Тогда система (1) равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

IV. Система уравнений (1) равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 - f_3 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_1 + f_3 = 0, \\ f_2 + f_3 = 0 \end{cases}$$

(возможность прибавлять к одному уравнению системы другое, умноженное на произвольное число).

V. Пусть одно из уравнений системы (1), например первое ее уравнение $f_1(x, y, z) = 0$, равносильно уравнению $x = \varphi(y, z)$ — многочлену от y и z. Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x = \varphi(y, z), \\ f_2[\varphi(y, z), y, z] = 0, \\ f_3[\varphi(y, z), y, z] = 0. \end{cases}$$

Это утверждение лежит в основе *метода исключения неизвестных*: система (1) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} f_2[\varphi(y, z), y, z] = 0, \\ f_3[\varphi(y, z), y, z] = 0 \end{cases}$$

с двумя неизвестными y, z.

Прежде чем переходить к разбору примеров, сделаем одно замечание. При рассмотрении конкретной системы далеко не всегда удается сразу заметить ту комбинацию данных уравнений, которая служит «ключом» к решению, найти такой способ преобразований, который позволяет добиться достаточного упрощения. Никаких общих рецептов для нахождения решения систем дать, разумеется, нельзя. Только достаточно богатый опыт может помочь «увидеть» те особенности предлагаемой системы, которые позволят свести ее к другой, решаемой просто.

Пример 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} xy + z^2 = 2, \\ yz + x^2 = 2, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решение. Вычитая из второго уравнения этой системы первое уравнение и разлагая разность левых частей на множители, получим

$$(x - z)(x - y + z) = 0.$$

Аналогично, вычитая из третьего уравнения системы (7) второе уравнение, найдем

$$(y - x)(x + y - z) = 0.$$

В силу свойства IV система (7) равносильна системе

$$\begin{cases} (x - z)(x - y + z) = 0, \\ (y - x)(x + y - z) = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (8)$$

Так как левые части первых двух уравнений системы (8) представляют собой произведения двух многочленов, то система (8) равносильна (свойство I) совокупности следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 0; \end{cases} \qquad (8_1)$$

и

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad (8_2)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad (8_3)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (8_4)$$

Ясно, что каждая из полученных четырех систем проще исходной системы (7).

Решив системы (8_1), (8_2), (8_3), (8_4) методом исключения неизвестных (свойство V) и объединив решения этих систем, мы получим следующие восемь троек чисел:

$$(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ -1),$$
$$(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),$$
$$(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0),$$
$$(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 0),$$
$$(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}),$$
$$(0,\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{2}).$$

Эти восемь наборов чисел и образуют все множество решений исходной системы (7), поскольку

$$(7) \Leftrightarrow (8) \Leftrightarrow [(8_1) \vee (8_2) \vee (8_3) \vee (8_4)].$$

В данном случае проверка является излишней.

Пример 2 (МФТИ, 1969). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2y = x + y - z, \\ z^2x = x - y + z, \\ y^2x = y - x + z. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Сложив попарно уравнения этой системы, получим систему

$$\begin{cases} x^2y + z^2x = 2x, \\ x^2y + y^2z = 2y, \\ z^2x + y^2z = 2z, \end{cases} \qquad (10)$$

которая (в силу свойства IV) равносильна системе (9). Система (10) проще системы (9), так как каждое уравнение системы (10) «распадается» на два уравнения.

Систему (10) можно переписать так:

$$\begin{cases} x(z^2+xy-2)=0, \\ y(x^2+yz-2)=0, \\ z(y^2+xz-2)=0; \end{cases}$$

согласно утверждению I, она равносильна совокупности следующих восьми систем:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \quad (10_1) \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \quad (10_2)$$

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_3)$$

$$\begin{cases} z^2-xy-2=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_4)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_5)$$

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \qquad (10_6)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ y=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \qquad (10_7)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ y^2+xz-2=0. \end{cases} \qquad (10_8)$$

Система (10_1) имеет решение $(0, 0, 0)$; системы (10_2), (10_3), (10_4) не имеют решений; система (10_5) имеет решения $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$; система (10_6) имеет решения $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; система (10_7) имеет решения $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$; система (10_8) совпадает с системой (7), рассмотренной в примере 1. Так как

$$(9) \Leftrightarrow (10) \Leftrightarrow [(10_1) \vee (10_2) \vee \ldots \\ \ldots \vee (10_7) \vee (7)],$$

то совокупность всех решений системы (9) — это объединение множества решений систем (10_1), (10_5), (10_6), (10_7), (7). В результате получается указанное выше решение системы (7) и еще одно решение $(0, 0, 0)$.

Упражнения

Найти все решения систем уравнений:

1. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5. \end{cases}$$

2. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 3xy-\dfrac{16}{xz}=-5, \\ xz+\dfrac{8}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1. \end{cases}$$

3. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 4xy+x^2+y^2=1, \\ 8xz+x^2+4z^2=-2, \\ 8yz+y^2+4z^2=1. \end{cases}$$

4. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=xyz, \\ 10(y^2+z^2)=29xyz, \\ 5(z^2+x^2)=13xyz. \end{cases}$$

Найти действительные решения систем уравнений:

5. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} xyz^2=-y-2x, \\ 2x^2yz=-y-z, \\ 3xy^2z=2x-z. \end{cases}$$

6. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} x^3+y^3=19xy+7xz+11yz, \\ x^3+z^3=26(xy+xz+yz), \\ y^3+z^3=47xy+35xz+39yz. \end{cases}$$

7. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 3x-6y-8z=xyz^2, \\ 2x-5y-7z=-x^2yz, \\ 3x-9y-13z=-xy^2z. \end{cases}$$

ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Е. Я. Гик

Ферзь—часовой

В предыдущем разделе наших заметок *) мы установили, что конь может обойти все поля шахматной доски размером 8×8, побывав на каждом из них лишь по разу.

Вопрос об обходе обыкновенной шахматной доски другими фигурами решается значительно проще. Например, для ладьи такой маршрут изображен на рисунке 1. Здесь ладья добивается своей цели, делая по дороге 14 поворотов. Докажите, что это число нельзя уменьшить.

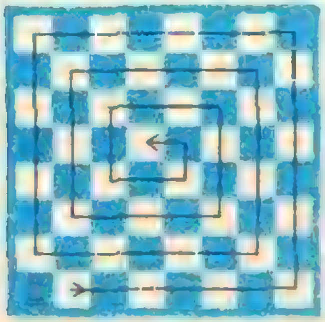


Рис. 1.

Указанный путь (он, кстати, подходит также для ферзя и короля) не замкнут. Однако можно предложить и замкнутый маршрут (рис. 2). Здесь ладья при желании с конечного поля своего путешествия — a2 может вернуться на исходное — a1. Убедитесь сами, что на нечетной доске (например, размером 7×7 или 9×9) замкнутого пути для ладьи уже не существует.

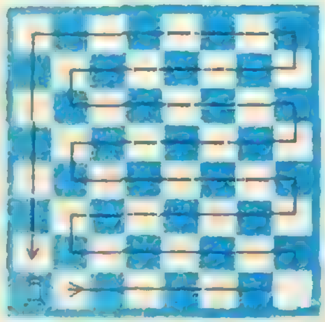


Рис. 2.

Понятно, что для слона задача в общем случае поставлена некорректно (слон может ходить лишь по полям одного цвета), но если ограничиться только белыми или черными полями, то она также легко решается.

Теперь мы переходим к одним из наиболее распространенных математических задач на шахматной доске. Эти задачи связаны с различными расстановками фигур, поэтому их обычно называют комбинаторными. Пожалуй, самой известной из них является следующая «задача о восьми ферзях», поставленная в 1850 году великим немецким математиком Ф. Гауссом.

Расставить на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу *).

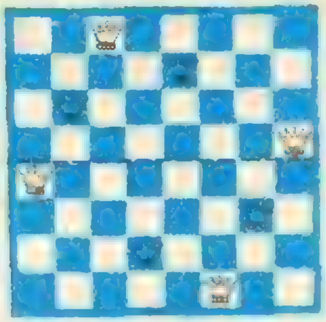


Рис. 3.

На рисунке 3 изображено одно из возможных решений задачи, всего же их существует 92. Доказано также, что все они получаются из 12 основных позиций применением зеркального отражения и поворотами доски на 90°, 180° и 270°. Например, отражая зеркально (относительно пунктирной линии) приведенную позицию, получаем другую позицию, устраивающую нас (рис. 4) *).

---

*) См. «Квант», № 8, 9.

*) Конечно, с шахматной точки зрения две фигуры одного цвета не могут угрожать друг другу, но мы пользуемся традиционной терминологией.

Любопытно, что сам Гаусс первоначально предполагал, что задача допускает лишь 72 решения, и сомневался в правильности числа 92. В наши дни эта задача и подобные ей решаются за несколько минут. Достаточно составить несложную программу и ввести ее в вычислительную машину, вскоре все 92 позиции будут выданы на печать.

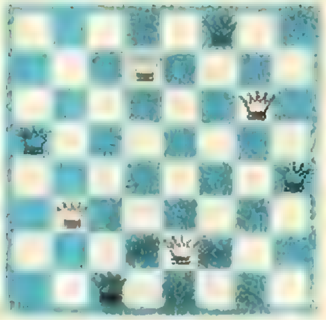


Рис. 4.

Сформулируем два вопроса, которые приводят нас соответственно к двум классам разнообразных комбинаторных задач.

1. *Какое наибольшее число одноименных фигур (ферзей, ладей, коней, слонов и королей) можно расставить на доске так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу?*

2. *Какое наименьшее число одноименных фигур можно расставить на доске так, чтобы они держали под угрозой все свободные от фигур поля доски?*

Первое из этих чисел в теории графов называется числом внутренней устойчивости, а второе — числом внешней устойчивости. Понятия эти далеко не абстрактны, и играют важную роль во многих математических задачах. Примером может служить следующая известная

Задача о часовых. *В тюрьме города N около каждой камеры можно поставить часового. Находясь у одной из камер, часовой видит также, что происходит в некоторых других, из которых к этой камере ведут коридоры. Каково наименьшее число часовых, необходимое для наблюдения за всеми камерами?*

Если шахматную доску рассматривать как тюрьму (да простят нам шахматисты такую аналогию), причем ее поля считать камерами, а вертикали, горизонтали и диагонали — коридорами, то «часовыми» естественнее всего назначить ферзей, которые могут вести наблюдение в произвольном направлении.

Оказывается, 5 ферзей вполне способны справиться со всей шахматной «тюрьмой» (рис. 5). По существу мы определили число внешней устойчивости для ферзей, равное 5 (нетрудно показать, что четырех часовых уже недостаточно). Доказано, что существуют 4860 способов, которыми можно расставить 5 ферзей-часовых. Кстати, в нашем примере ферзи обладают еще одним интересным свойством: сами они друг другу не угрожают.

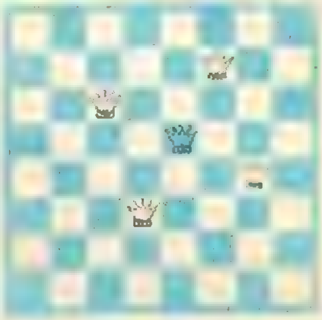


Рис. 5.

Из сказанного следует, что для того, чтобы поймать одинокого ферзя противника (короли на доске отсутствуют), достаточно иметь 5 ферзей. Однако известно, что в шашках 3 дамки справляются с одной (если та не стоит на «большой дороге»), хотя они не в состоянии держать одновременно все черные поля доски. Любопытно выяснить, нельзя ли поймать вражеского ферзя при помощи менее чем пяти ферзей.

---

*) Подробно эта задача решается в книге Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске» (ОНТИ НКТП СССР, 1936)

Фигура	Король	Ферзь	Ладья	Слон	Конь	Пешка
Число внешней устойчивости	9	5	8	8	12	32
Число внутренней устойчивости	16	8	8	14	32	32

Если поставить на доску 9 ферзей, то хотя бы два из них окажутся на одной вертикали или горизонтали, то есть будут угрожать друг другу. Таким образом, число внутренней устойчивости для ферзей равно 8 (рис. 3, 4), а всего подходящих позиций — 92.

Особенно легко наши задачи решаются для ладьи — наверное, проявляется ее прямолинейность. Ладей-часовых надо иметь 8, их достаточно расположить вдоль любой горизонтали или вертикали. Нетрудно также показать, что и число внутренней устойчивости для ладьи равно 8, а соответствующих расположений имеется 8! — число перестановок из 8 элементов *) ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$). Позиция на рисунке 6 удовлетворяет обоим требованиям.

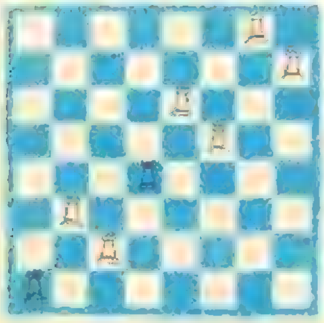


Рис. 6.

Докажите, что если ладьи перенумерованы, то есть отличаются друг от друга, то необходимых расположений имеется уже $(8!)^2$. На доске размером $n \times n$ эти числа соответственно равны $n!$ и $(n!)^2$.

Слонов, чтобы справиться со всей доской, достаточно иметь столько же, сколько и ладей — 8 (рис. 7). Однако разместить слонов на доске так, чтобы они не угрожали друг другу, можно почти вдвое больше, чем ладей — 14 (рис. 8). Для доказательства рассмотрим диагонали, идущие вверх слева направо (на рисунке 8 они пунктирные), всего таких диагоналей 15. На каждой из них может стоять не более одного слона, так как слоны не должны угрожать друг другу. Следовательно, общее число слонов не превышает 15. Но ровно 15 слонов также нельзя расставить: крайние из наших диагоналей состоят из одного-единственного поля. Таким образом, искомое число не более 14. Одно из решений приведено на рисунке 8. Аналогичные рассуждения показывают, что на доске размером $n \times n$ можно расставить не больше $2n - 2$ слонов.

Докажите, что число допустимых расстановок слонов на произвольной доске равно квадрату некоторого числа.

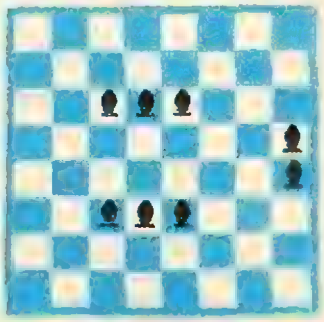


Рис. 7

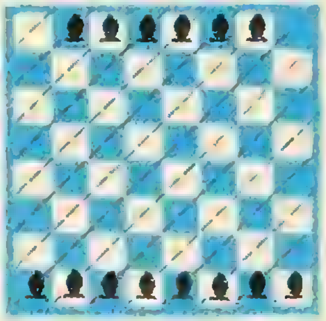


Рис. 8.

Теперь перейдем к коням. Поставив 32 коня на одни белые или одни черные поля, мы найдем расположение, при котором они не угрожают друг другу. Покажем, что 32 — число внутренней устойчивости для коней. Для этого разобьем доску на 8 равных прямоугольников (рис. 9). Легко заметить, что конь, помещенный в

---

*) См., например, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» («Квант» № 1, 1971).

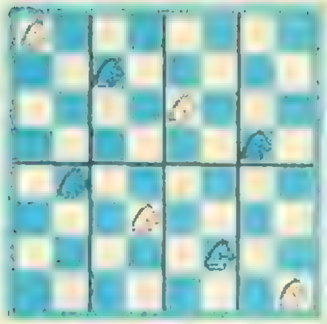


Рис. 9.

прямоугольник, нападает ровно на одно поле этого же прямоугольника, причем для любых двух таких коней поля, на которые они нападают, различны. Поскольку в каждом прямоугольнике 8 полей, то внутри него можно разместить самое большее 4 коня, не угрожающих друг другу, а общее число не превосходит $4 \times 8 = 32$. Докажите, что имеется лишь два упомянутых расположения — кони стоят только на белых или только на черных полях.

Число внешней устойчивости для коней равно 12 (рис. 10). Теперь разберемся с королями. Нетрудно проверить, что больше 16 королей, не стоящих рядом (то есть не угрожающих друг другу), расставить нельзя (рис. 11).

Число внешней устойчивости для королей равно 9 (рис. 12). В каждом из 9 выделенных прямоугольников рисунка 12 имеется поле, которому может угрожать лишь король, стоящий на поле этого же прямоугольника. Следовательно, для того, чтобы все поля находились под угрозой, в каждой из 9 частей должен стоять хотя бы один король, искомое число равно 9.

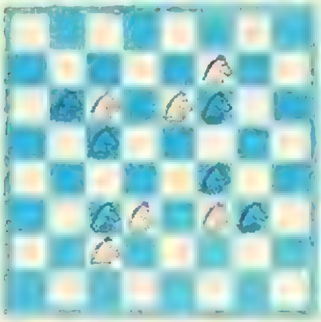


Рис. 10.

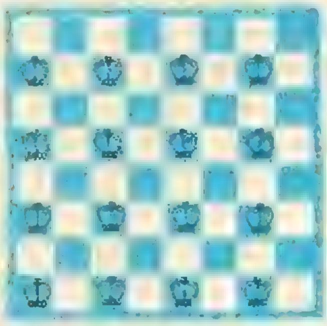


Рис. 11.

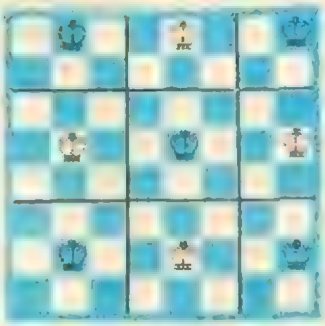


Рис. 12.

Очевидно, две пешки не могут одновременно угрожать друг другу. Однако если в вопросе 1 (стр. 50) слова «друг другу» заменить словами «хотя бы одна другой» и разрешить пешкам становиться на первую горизонталь, то вопросы 1 и 2 станут корректными и для пешек. Ответом является число 32, причем расположение пешек на рисунке 13 удовлетворяет обоим требованиям.

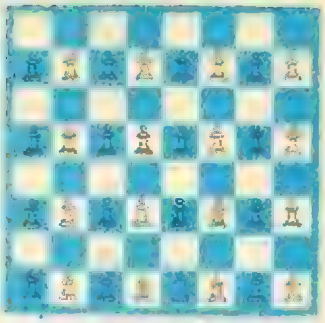


Рис. 13.

В результате наших исследований можно подвести итоги, заполнив таблицу (см. стр. 51).

Воспроизвести недостающие доказательства, найти число соответствующих расположений и сделать выводы из таблицы представляется вам самим. В качестве весьма серьезных задач можно рекомендовать все рассмотренные нами, но на доске размером $n \times n$ *). Заметим, что некоторые из них весьма сложны, а для других решения еще не найдены. Например, число внешней устойчивости для ферзей до сих пор неизвестно. Другими словами, не решена следующая

Проблема. *Каково наименьшее число ферзей, которых можно расставить на шахматной доске размером $n \times n$ так, чтобы все ее свободные поля находились под угрозой?*

---

*) Ряд таких задач рассмотрен в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Физматгиз, 1954.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Все возрастающая тяга молодежи к знаниям, широкие перспективы дальнейшего развития высшего образования в стране, намеченные XXIV съездом КПСС, предъявляют особые требования к качеству книг, выпускаемых для учащейся молодежи, и, в частности, к качеству пособий для поступающих в вузы. Редакция уже обращала внимание на то, что среди таких пособий встречаются книги, содержащие существенные недостатки и даже грубые ошибки (см. «Квант» № 11, 1970). К сожалению, мы вынуждены еще раз вернуться к этому же вопросу.

В этом номере мы публикуем рецензии на два пособия, изданные в Киеве и Ленинграде.

Выпущенные большими тиражами, эти книги разошлись по всей стране. Мы хотели бы предостеречь наших читателей от излишне доверчивого отношения к подобным книгам.

Редакция журнала «Квант» обратилась с письмом в Министерство высшего и среднего специального образования СССР о необходимости установить надежный контроль за изданием пособий для поступающих в вузы.

Сборники ошибок автора

Недавно издательство Киевского университета выпустило два пособия по математике *), которые, как сказано в аннотации, рассчитаны на поступающих в вузы и могут быть полезны слушателям и преподавателям подготовительных курсов, учащимся старших классов средней школы. Ознакомление с этими пособиями показывает, что они написаны на чрезвычайно низком научно-педагогическом уровне, а потому могут принести лишь вред математической подготовке учащихся.

Многие узловые теоретические вопросы школьного курса математики автор излагает неудачно, неточно или даже с грубыми ошибками, а значительное число разбираемых задач решено неверно. Подробный список замечаний и объяснений недостатков этих книг мог бы занять целый журнал, и потому мы приведем здесь лишь отдельные примеры.

Приводимые в книгах определения основных понятий элементарной математики не всегда точны, а даваемые при этом пояснения неясны и подчас неверны. Так, совершенно запутан вопрос об арифметическом корне.

Можно ли понять точный смысл, скажем, следующего: «... $\sqrt{a^2}$ принимает два значения: a и $-a$. Но положительное из этих двух чисел только одно, оно и равно $\sqrt{a^2}$» (I, стр.45)? Неудивительно, что при таком понимании знака квадратного радикала автор допускает многочисленные ошибки при решении задач: доказывает, что $\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{6}-1$ (I, стр. 170), а затем сообщает, что

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \pm(2-\sqrt{3})$$

(I, стр. 347); $y=1$ объявляет корнем уравнения $\sqrt{y}=-1$ (I, стр. 311); при вычислении значений одних тригонометрических функций через другие употребляет формулы типа $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (II, стр. 149, 152, 164) и т. д.

В пособиях уделяется внимание только чисто формальным выкладкам, без какого-либо анализа проводимых операций. Именно из-за этого при решении уравнений и систем уравнений часто получаются неверные результаты: решения теряются, посторонние решения не отбрасываются и т. д. (I, стр. 134—135, 202—203; II, стр. 214, 222—227, 312 и др.). Приводимые автором рецепты решения некоторых типов уравнений из-за отсутствия необходимого анализа лишены смысла.

В качестве иллюстрации воспроизведем «решение» уравнения $|ax+b|=c$: «Согласно определению модуля

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b, & \text{если } ax+b>0, \\ -(ax+b), & \text{если } ax+b<0. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение... сводится к двум уравнениям, не содержащим знака модуля,

$$ax+b=c; \qquad -(ax+b)=c.$$

---

*) В. Ф. Ковалев, Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Арифметика и алгебра. Киев, изд-во Киевского университета, 1970, 388 стр., тир. 75 000 экз., цена 88 коп.

В. Ф. Ковалев, Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Геометрия и тригонометрия. Киев, изд-во Киевского университета, 1971, 316 стр., тир. 100 000 экз., цена 74 коп.

Для краткости в дальнейшем эти книги при ссылках обозначаются соответственно I и II.

Первое уравнение дает $x = \frac{c-b}{a}$, а второе $x = \frac{-c-b}{a}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению» (I, стр. 85—86).

Столь же формально излагается и решение неравенств. В тех же случаях, когда автор пытается дать какие-то советы, путаница только увеличивается.

Вот, например, как выглядят рекомендации по поводу решения неравенства

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x+3} > 0.$$

«При решении подобных неравенств очень часто допускают ошибку, сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, в данном случае на $x+3$. Такое сокращение незаконное, поскольку множитель может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Данное неравенство равносильно двум системам неравенств

$$\begin{cases} (x+3)(x-2) \geqslant 0, \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (x+3)(x-2) \leqslant 0, \\ x+3 < 0, \end{cases}$$

решая которые, находим $x \geqslant 2$, $-3 < x \leqslant 2$» (I, стр. 245—246). Заметим, кстати, что второй ответ неверен.

Никакой критики не выдерживает раздел о тригонометрических неравенствах (II, стр. 228—244), где во многих задачах получены бессмысленные ответы.

Изложение теоретического материала по геометрии представляет собой простое собрание формулировок определений и теорем, взятых из школьного учебника. Целесообразность такого «конспекта учебника» не ясна, тем более, что в ряде мест изложение автора оставляет желать лучшего.

Некоторые задачи по геометрии решены неверно или неполно (II, стр. 27, 53, 83, 93 и др.).

Пособия содержат целый ряд вопросов, давно уже исключенных из школьной программы и не требуемых на вступительных экзаменах (схема Горнера, теорема Безу, извлечение корней из комплексных чисел, формула сложного радикала, подробная теория обратных тригонометрических функций). Жаль, что автор не проявил желания особенно тщательно отобрать материал для книг, тем более, что и эти вопросы не всегда изложены наилучшим образом.

Например, уже давно справедливо отказались от рассмотрения «функций» $y = \mathrm{Arc\,sin}\,x$ и др., однако автор зачем-то возрождает этот изжитый подход; приводимые им выводы формул между обратными тригонометрическими функциями и решения простейших уравнений, содержащих эти функции, часто неверны из-за отсутствия необходимых ограничений (II, стр. 244—257).

Книги изобилуют неграмотными оборотами речи, а также фразами, смысл которых совершенно непонятен: «...графиком есть гипербола с вершиной в точке...» (I, стр. 208); «...функция... в этих точках не существует, а если говорить точнее, принимает бесконечно большие значения» (I, стр. 227); «если модуль выражения $2x+8$ больше 7, то само это выражение должно быть больше 7 и меньше -7» (I, стр. 242); «выразим $\cos 2x$ через половинный аргумент» (II, стр. 215) и т. п.

Сказанное со всей очевидностью свидетельствует, что рассматриваемые книги представляют собой не руководства для желающих повторить школьный курс математики, а скорее сборники ошибок, иногда столь грубых, что их сейчас редко встретишь даже в работах абитуриентов.

А. Ф. Хрусталев

Не учебник и не задачник

В 1970 г. издательство Ленинградского отделения общества «Знание» выпустило книгу Я. И. Марьяновского «Знания — молодежи. В помощь поступающим в вузы. «Физика» тиражом 215 500 экземпляров. За основу книги взят «несколько сокращенный вариант лекций автора, которые он читает ряд лет в Центральном лектории в помощь поступающим в высшие учебные заведения» *).

«Изложение рассчитано на читателя, имеющего среднее образование».

Однако, читатель, не торопись приступить к внимательному изучению пособия. Тебя ожидают немалые трудности! Испытай предварительно свои силы.

«Вес — это сила, с которой тело притягивается Землей. Не следует думать, что вес тела равен лишь силе тяготения этого тела к Земле» (стр. 36). Контрольный вопрос к читателю: что следует и что не следует думать про вес?... Если ты, читатель, разобрался в этом, в наших дальнейших комментариях ты не нуждаешься. Смело и самостоятельно двигайся дальше. Наоборот, не отчаивайся, если первое испытание оказалось тебе не под силу. И на экзаменах, бывает, приходится тащить второй билет. Рискнем.

«Изотермический процесс — процесс, происходящий при постоянной температуре». Запомнили? Пошли дальше: «При изотермическом расширении газ охладится... В этом отношении изотермические процессы сильно отличаются от адиабатических... Так, при адиабатическом расширении газ охлаждается...» (стр. 124—125).

---

*) Здесь и далее кавычками выделяются цитаты из рецензируемой книги.

Итак, газ в изотермическом процессе охлаждается. Спрашиваем: в чем изотермичность такого процесса и в чем его «сильное отличие» от адиабатического? Повидимому, для многих ответ не очевиден.

Если, читатель, ты не разобрался в предложенных головоломках, значит, книгу тебе читать рано. Надо что-нибудь попроще. В этом случае автор снисходительно «отсылает читателя к элементарному учебнику физики под редакцией академика Г. С. Ландсберга в трех томах» (стр. 2).

Не будем, однако, обольщаться тем, что все, не выдержавшие предложенного испытания, послушаются нас. Что можно посоветовать таким упрямцам?

Для начала им надлежит отбросить укоренившиеся в них застарелые и превратные представления о физических явлениях, определениях и законах. Судите сами.

Считалось раньше, что с ростом высоты растет потенциальная энергия тел. А по Марьяновскому это справедливо лишь «на первый взгляд» и лишь для «высот, много меньших радиуса Земли» (стр. 77—78).

Что следует ожидать от тела, испытывающего в горизонтальном направлении действие двух не равных друг другу сил? Ускоренного движения? Ошиблись. «Например, ящик находится на полу. Мы приложили к нему силу, но ящик неподвижен. Наша сила меньше силы трения покоя». (стр. 23). (Поясним, что в виду имеется не максимальное значение силы трения покоя.)

Как принято поступать, если при вычислении сопротивления участка цепи «ответ получен отрицательным»?

«В этом случае нужно изменить направление тока на противоположное и снова решить задачу» (стр. 175).

Скептики скажут, что направление тока не влияет на знак сопротивления, что ток уже мог быть найден или задан и менять его направление можно лишь изменением полярности всех батарей, включенных в цепь. Ах, уж эти скептики. Держитесь от них подальше, читатель! Скептицизм их — от незнания и стремления скрыть это. Спроси у такого: чему равно минимальное значение вектора (не модуля, а самого вектора)? Держим пари: скептик скажет, что не знает, что такого значения не существует. А наш читатель знает (если уже добрался до стр. 17). Но хватит о скептиках. Пускай учатся. И поймут (со временем) даже такие «наиболее важные» понятия, как «энергия поля в точке» (стр. 148), или «вес выталкивающей силы электростатического поля» (зад. 82), введением которых мы всецело обязаны данной книге.

Уж если мы заговорили о задачах, рассмотрим еще некоторые. Например, задачу № 48. Тело вращается на нити (не стержне!) в вертикальной плоскости с постоянной линейной скоростью. И так как постоянство скорости противоречит закону сохранения энергии (уж этот закон! Все время путается под ногами!), автор поступает так: молчаливо отменяет закон, формулируя условие задачи, и воскрешает его к жизни в решении.

Столь же фантастические события сопутствуют мотоциклисту, выполняющему классический аттракцион «мертвая петля». «Важно понимать»,— пишет автор,— что если «тело съехало с высоты», равной высоте петли, «то в верхней точке петли... оно упало бы». Но, видимо, «важно понимать» также, что верхней точки петли такое тело не достигает.

Но — довольно о физике. У читателя может составиться неверное представление о пособии как книге сугубо специальной и односторонней. Смеем разубедить его. Пища для ума предлагается и математикам (стр. 7, 25, 127, 129, 139, и т. д.), логикам. Следует отметить, что и с точки зрения русского языка в книге не все благополучно. «...Относительный покой относительно системы» (стр. 3). «Твердое тело (если оно не сыпучее)» (стр. 121). «Работа силы — это мера накопленной в ее процессе энергии» (стр. 77).

А один стилистический прием автора будет интересен и лирикам, и физикам одновременно. Речь идет об использовании скобок.

«Силы тяготения (гравитационные)» (стр. 55). «Гравитационные силы (силы тяготения)» (стр. 61).

В заключение проверьте сами прочность ваших новых физических воззрений. Даны два равных одноименных заряда. Где надо разместить третий заряд того же знака, чтобы он пребывал в равновесии? Очевидно, в середине отрезка, соединяющего данные заряды. Так вот, если использованная в этой ситуации (задача № 81) аргументация автора: «Найденное нами положение — единственное, в котором заряд в равновесии. Поэтому равновесие заряда устойчиво» — покажется Вам убедительной, а сам факт устойчивости равновесия — не подлежащим сомнению, автор достиг своей цели. А нам — нам останется лишь пожелать тем из великой армии в 215 500 счастливых обладателей этой книги, кто склонен к некритическому усвоению материала и лишен к тому же чувства юмора: не дай вам бог встретиться с экзаменатором, не успевшим изучить «Пособие» и оставшимся при традиционных взглядах (да, встречаются еще и такие!). Беседа с ним может привести к плачевному результату. Не забывайте, что «эта книга — не учебник и не задачник» (стр. 2). И это — единственная цитата из всех приведенных, которая в комментариях не нуждается.

С. В. Ащеулов,
В. А. Барышев

Лингвистика и математика встречаются на олимпиаде

В. В. Раскин

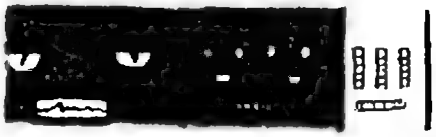
В воскресенье 13 декабря 1970 года разбором задач II тура, вручением грамот и раздачей увесистых книжных премий закончилась VII традиционная олимпиада по языковедению и математике. Олимпиады по языковедению и математике ежегодно с 1965 года проводит Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ. Это олимпиады не по двум разным «предметам», поименованным в названии, а по единому, очень новому и интересному «предмету» — структурной и прикладной лингвистике.

Структурная и прикладная лингвистика — это такое направление в весьма древней и почтенной науке лингвистике, которое сложилось в последние годы и стремится к внедрению в эту науку точных формулировок, точных описаний и точных методов исследования языка и, в тесной связи с этим, занимается приложением лингвистических знаний на практике: в машинном переводе, информационном поиске и других важнейших современных проблемах, связанных с автоматической переработкой информации и «общением» человека с электронной вычислительной машиной. Структурная и прикладная лингвистика оказывается, таким образом, наукой, соседствующей с математикой, кибернетикой, информатикой (слышали о такой новой науке?), психологией и другими науками.

Больших успехов в этих олимпиадах неизменно добиваются учащиеся математических спецшкол и другие школьники, явно наделенные математическими способностями. При этом отнюдь не всегда, к сожалению, они могут похвастаться хорошей подготовкой по иностранному языку (хотя им и случалось писать в решении единственной задачи олимпиады, проверяющей знания «школьного» иностранного языка: «i knows Inglish veri vel») или большой общей эрудицией. Тем не менее эти успехи не случайны.

Дело в том, что в школе не изучают специального предмета — лингвистики (или языкознания, или языковедения — это все синонимы). Поэтому задачи олимпиад по языковедению и математике носят совершенно особый характер: они не могут опираться на какую-либо определенную сумму знаний, не могут проверять, что школьник знает, что он выучил, а что «знал, да забыл». В отличие от задач на математических, физических, химических, даже литературных олимпиадах и вообще олимпиадах по «школьным предметам», задачи лингвистические сами содержат все необходимое для своего решения, и решаются внимательным анализом и систематизацией данных, четким логическим рассуждением, часто с использованием определенных математических приемов, с привлечением, конечно, языкового чутья и языковой интуиции решающего. Никаких предварительных знаний не требуется!

И вот оказывается, что такое суровое ограничение на форму лингвистических задач, диктуемое особенностями школьной программы, оборачивается весьма выгодной стороной: организуя и систематизируя данные задачи, рассуждая логически, обнаруживая и фиксируя определенные закономерности, самостоятельно «изобретая» метод решения задачи, школьник, сам того не ведая, имитирует, хотя, конечно, весьма приблизительно и условно, на специально подобранном материале, но все-таки реальную работу лингвиста-структуралиста.



Ведь одна из главных проблем, стоящих перед современной наукой,— это научить электронную вычислительную машину перерабатывать информацию, записанную на человеческом языке, потому что только тогда машина сможет справиться с насущными задачами автоматического перевода с одного языка на другой, хранения в памяти огромных массивов информации и быстрого обнаружения в этих массивах нужных сведений (информационный поиск) и другими задачами, без решения которых немыслим дальнейший прогресс. А научить машину понимать человеческий язык очень нелегко. Машина понимает только свой совершенно точный, абсолютно формализованный язык программирования. Поэтому лингвист должен совершенно точно выявить и записать в понятном для машины формализованном виде все свойства и закономерности человеческого языка, необходимые для понимания его машиной. Решая эту проблему, лингвист имеет дело со своего рода лингвистической задачей, только огромного масштаба и несравненно более трудной, и никто не организует ему специально подобранных данных и не наводит прямо или косвенно на правильный метод решения, как это делается в олимпиадной задаче.

Практически все задачи олимпиад по языковедению и математике в той или иной степени «математичны». Взять хотя бы такие, казалось бы, чисто лингвистические задачи, как перевод с одного языка на другой (см., например, задачу I). Правда, на этих олимпиадах Вас просят переводить только с незнакомого языка, или на незнакомый язык, или, еще пуще, с незнакомого да на незнакомый (!). Однако это оказывается вполне посильным делом: задачи составлены таким образом, что полный логический анализ данных обеспечивает возможность такого необычного перевода. Недаром «табличные люди», как их называют организаторы олимпиады, то есть такие участники, которые любят и умеют организовывать данные в таблицы, неизменно добиваются успеха при решении задач этого и других типов.

Другие типы задач еще более «математичны» (см., например, задачи II, III). В них используются те или иные математические приемы: комбинаторные, логические и другие,— но общий принцип остается неизменным: задача не должна требовать предварительных знаний — все должно следовать из условия, решающий должен быть в состоянии все сообразить «на месте».

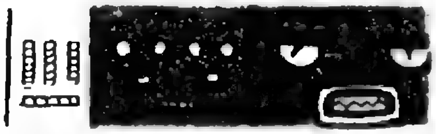
Вот такие необычные олимпиады стали обычным делом в Московском университете. В них уже приняло участие около 2000 старшеклассников. Многие из призеров учатся сейчас на Отделении структурной и прикладной лингвистики и сами сочиняют задачи для олимпиад. Приглашаем и Вас попробовать применить свои способности, в частности математические, на новом интересном поприще. 21 ноября 1971 года состоится I тур очередной VIII традиционной олимпиады по языковедению и математике. Оргкомитет приглашает всех желающих принять в ней участие пожаловать к 10 часам утра в новый корпус гуманитарных факультетов МГУ (Ленинские горы).

А сейчас предлагаем решить несколько лингвистико-математических задач, с которыми успешно справились участники олимпиад.

Задачи олимпиад по языковедению и математике

I. Даны фразы на датском языке с их переводами

1. Vores hus har et stort loft.
   У нашего дома большой чердак.



2. Vores stad har tre store biografer.
В нашем городе три больших кинотеатра.
3. Loftferne, der er i vores hus, er store.
Чердаки, которые есть в нашем доме, большие.
4. Vores stad har en stor biograf.
В нашем городе большой кинотеатр.
5. Loftet af vores hus er stort.
Чердак нашего дома большой.

Задание 1. Переведите следующие фразы на датский язык:

1. Кинотеатры, которые есть в нашем городе, большие.
2. В нашем доме три больших чердака.
3. Кинотеатр нашего города большой.

Задание 2. Разберите по составу слово loftferne и напишите, что означает каждая его часть.

II. О записи:

внучк... занимал... эт... час...

известно, что она получена из грамматически правильной русской фразы, состоящей из четырех слов, отсечением некоторых конечных букв (не более 3 букв у каждого слова). Причем, отсекались только окончания и, кроме того, у некоторых слов буквы могли и не отсекаться.

Задание. Определить, из скольких предложений могла получиться такая запись.

III. Дается фрагмент из японской таблицы умножения:

футацу × ёцу = яцу
ицуцу × ицуцу = нидзюго
яцу × коконоцу = ситидзю̄ни
ицуцу × яцу = ёндзю̄
мицу × мицу = дзю̄хати
коконоцу × мицу = нидзю̄сити
коконоцу × муцу = ?
коконоцу × ? = хатидзю̄ити
ёцу × ? = сандзю̄ни
футацу × нанацу = ?

Задание. Заполните места, где стоят «?».

ОЛИМПИАДУ ПРОВОДИТ ЭЛЕКТРОННАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА

Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина

В январе — апреле этого года впервые Московским экономико-статистическим институтом была проведена математическая олимпиада для школьников выпускных классов с участием электронно-вычислительной машины. Олимпиада проходила в два тура. Второй тур проводился с помощью машины «Минск-22», к участию в нем были допущены лишь школьники, успешно прошедшие первый тур.

Первый тур проходил заочно. В нем приняли участие все желающие школьники Москвы и близлежащих районов Московской области. На решение пяти задач первого тура давался срок месяц (то есть до 15 февраля).

Задачи первого тура

1. Куб с ребром a срезан плоскостями по углам так, что от каждой грани остался правильный многоугольник. Найти объем полученного тела.

2. Имеет ли уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$, где a, b и c — длины сторон некоторого треугольника, действительное решение?

3. Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 1000. Найти все такие последовательности.

4. Доказать, что для тупоугольного треугольника имеет место неравенство $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

5. Определить угол треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

Разбор задач первого тура

1. Ясно, что каждое из восьми срезаемых у куба по углам тел является правильной треугольной пирамидой с прямыми углами между боковыми ребрами (рис. 1). Если обозначить сторону основания пирамиды через b, то $AD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $OD = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $CD = \frac{b}{2}$, и тогда по теореме Пифагора высота пирамиды $EO = \frac{b\sqrt{6}}{6}$. Площадь основания равна $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Поэтому объем такой пирамиды равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$, а объем тела, получающегося из куба срезом восьми таких пирамид, равен

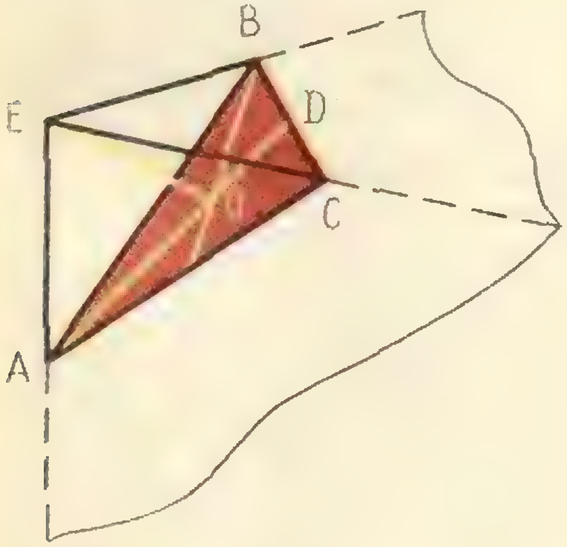


Рис. 1.

$$a^3 - \frac{b^3\sqrt{2}}{3}. \qquad (1)$$

Так как по условию задачи от граней куба должны остаться правильные многоугольники, то решений два. Могут быть восьмиугольники или квадраты (рис. 2 *а*, *б*).

В первом случае $b = a(\sqrt{2} - 1)$, и тогда из (1) после преобразований получаем $V = \frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$.

Во втором случае $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и тогда из (1) находим $V = \frac{5a^3}{6}$.

Заметим, что лишь 20% школьников нашли оба решения задачи. Остальные находили только одно решение. При этом предпочтения не было для какого-либо одного из двух многогранников — каждый получил приблизительно равное число голосов.

2. Покажем что дискриминант D данного квадратного уравнения

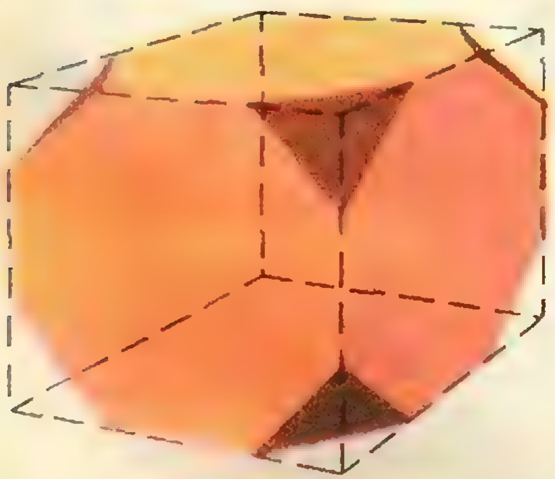


Рис. 2а.

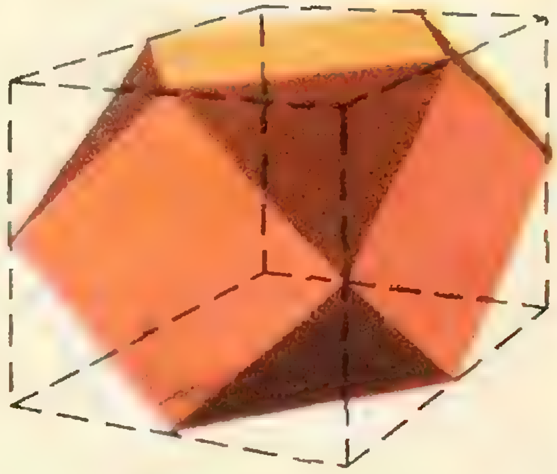


Рис. 2б.

отрицателен. Действительно,
$$D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=$$
$$=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-$$
$$-a^2+2bc)=[(b-c)^2-a^2]\times$$
$$\times[(b+c)^2-a^2],$$
но так как a, b и c — длины сторон треугольника, то $|b-c|<a$ и $b+c>a$, то есть соответственно $(b-c)^2-a^2<0$ и $(b+c)^2-a^2>0$, то есть $D<0$.

3. Пусть искомая последовательность имеет вид
$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$
Тогда ее сумму можно представить как разность сумм отрезков натурального ряда от 1 до n и от 1 до k, то есть
$$\frac{(n+1)n}{2}-\frac{(k+1)k}{2}=1000$$
или $n^2+n-k^2-k=2000$.

Левую часть этого равенства разложим на два множителя, а правую на простые множители:
$$(n+k+1)(n-k)=2^4\cdot5^3.$$
Заметим, что оба множителя $n+k+1$ и $n-k$ в левой части этого равенства четными быть не могут, так как их сумма $2n+1$ нечетна. Кроме того, первый множитель больше второго. Тем самым мы приходим к совокупности четырех систем:
$$\begin{cases}n+k+1=2000,\\ n-k=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}n+k+1=400,\\ n-k=5,\end{cases}$$
$$\begin{cases}n+k+1=80,\\ n-k=25,\end{cases}\qquad\begin{cases}n+k+1=125,\\ n-k=16.\end{cases}$$
Первая из этих систем дает тривиальную «последовательность», состоящую из единственного числа 1000. Остальные системы приводят к последовательностям:
$$198,\ 199,\ 200,\ 201,\ 202;$$
$$28,\ 29,\ \ldots,\ 51,\ 52;$$
$$54,\ 55,\ \ldots,\ 69,\ 70.$$

4. Пусть для определенности тупым будет угол C. Тогда $0<B<\frac{\pi}{2}-A$, и поэтому
$$\cos B>\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A>0,$$
а следовательно, $\cos^2B>\sin^2A$. Тогда $\cos^2A+\cos^2B>\cos^2A+\sin^2A=1$, то есть $\cos^2A+\cos^2B>1$, и тем самым подавно
$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C>1,$$
что и требовалось доказать.

5. Подавляющее число участников олимпиады решало эту задачу введением в рассмотрение вспомогательной окружности (см. «Квант» № 1, 1971). Однако эта задача допускает более короткое решение (Галина Авербух, 10^б класс школы № 200, Алексей Водовозов, 10^в класс школы № 569).

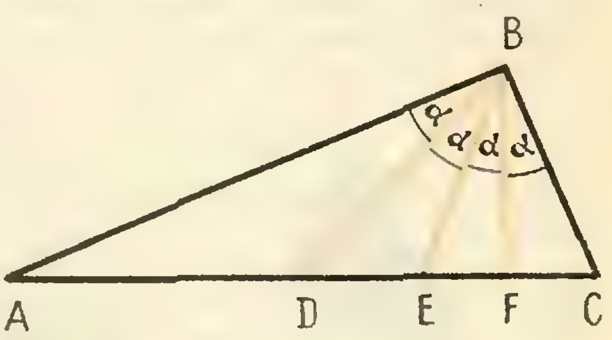


Рис. 3.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 3) медиана BD, биссектриса BE и высота BF делят угол B на четыре равные части, каждая из которых обозначена через α. Тогда
$$AF=h\operatorname{tg}3\alpha;\quad DF=h\operatorname{tg}2\alpha$$
и
$$FC=h\operatorname{tg}\alpha.$$
Далее
$$AD=AF-DF=h(\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha)$$
$$DC=DF+FC=h(\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha),$$
но по условию $AD=DC$, то есть
$$\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$$
или
$$2\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\frac{2\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{\cos3\alpha\cos\alpha}$$
Так как $\sin2\alpha\neq0$, то $2\cos3\alpha\cos\alpha=\cos2\alpha$ или
$$\cos2\alpha+\cos4\alpha=\cos2\alpha,$$
то есть $\cos4\alpha=0$.

Отсюда следует, что угол B прямой.

Второй тур

Сорок восемь ребят, успешно прошедших первый тур, собрались 25 апреля в МЭСИ, чтобы продолжить «соревнование».

Во втором туре одним из «членов» организационного комитета олимпиады была электронно-вычислительная машина «Минск-22». На долю этого «члена» выпала основная работа. В машинную память было заложено несколько тысяч задач. Каждая задача была снабжена специальным кодом, указывающим раздел математики, к которому относится эта задача, и степень трудности (все задачи были разбиты на четыре степени сложности). Программа была составлена таким образом, что машина методом случайного выбора составляла варианты (по пять задач) из различных разделов математики одинаковой суммарной трудности.

Машина для каждого участника олимпиады напечатала вариант.

По истечении срока (четыре часа по 45 минут) работы были отданы машине на проверку*). Машина сравнила полученные решения задач со своими и тех, кто решил все пять задач правильно, объявила победителями. Всю эту работу машина проделала за то время, пока участники олимпиады знакомились с институтом.

Шесть учеников десятых классов московских школ были награждены грамотами МЭСИ, памятными подарками:

Елена Савина, Виктор Зак, Сергей Мапенов, Марк Ригель, Александр Розин, Леонид Терехов.

Проведение математической олимпиады машиной явилось завершающим этапом работы по проведению вступительных экзаменов по математике и физике с помощью ЭВМ. Эта большая работа проводится под руководством ректора МЭСИ проф. М. А. Королева, проф. И. Г. Венецкого и доктора технических наук А. Г. Морозова.

Некоторые задачи второго тура

1. Вокруг куба описан цилиндр так, что диагональ куба является осью цилиндра. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь диагонального сечения куба равна $18-6\sqrt{2}$.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 3+\lg^2 2=\lg^2 3x+\lg^2 2x.$$

3. Сечение делит треугольную пирамиду на два многогранника. Как относятся объемы этих многогранников, если ребра делятся этим сечением в отношении 1 : 2; 1: 2; 1 : 3, считая от вершины?

4. Найти рациональный корень уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}=3.$$

5. Решить уравнение

$$5^{3x}+9\cdot 5^{x}+27\,(5^{-3x}+5^{-x})=64.$$

6. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC=a$; $BD=b$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно q. Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Определить площадь сечения.

7. Найти наименьший корень уравнения $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$.

8. Решить неравенство

$$x^{\log_2 x-4}<32.$$

9. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен синус угла между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как семь к четырем?

10. Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt[3]{x^2+14x+24}-\sqrt[3]{x^2-5x+14}=\sqrt[3]{x+2}.$$

---

*) Все задачи имели числовые ответы.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Системы алгебраических уравнений»

1. $(3,\ 1,\ -2)$; $(-5,\ -3,\ 0)$

2. $(2,\ -1/2,\ 4)$; $(-2,\ 1/2,\ -4)$.

$$(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2});$$

$$(-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}).$$

3. $(1,\ 0,\ -1/2)$; $(-1,\ 0,\ 1/2)$;

$$(i/\sqrt{3},\ -2i/\sqrt{3},\ i/2\sqrt{3});$$

$$(-i/\sqrt{3},\ 2i/\sqrt{3},\ -i/2\sqrt{3}).$$

4. $(0,\ 0,\ 0)$; $(1,\ 2,\ 5)$; $(-1,\ 2,\ -5)$; $(-1,-2,\ 5)$.

5. $(0,\ 0,\ 0)$; $(-{}^1/_2,\ -1,\ 2)$

6. $(0,\ 0,\ 0)$; $(-1,\ 2,\ 3)$

7. $(0,\ 0,\ 0)$; $\left(-\sqrt[3]{1/2},\ -2\sqrt[3]{1/2},\ \sqrt[3]{1/2}\right)$; $\left(\sqrt[3]{32/35},\ \frac{7}{4}\sqrt[3]{32/35},\ -\frac{5}{4}\sqrt[3]{32/35}\right)$.

К статье «Шахматно-математические заметки»

(см. «Квант» № 9)

1. Занумеруйте все поля доски (кроме центрального, на которое кони не могут попасть) в порядке их обхода конем (рис. 1 *а*) и рассмотрите вспомогательный рисунок 1 *б*.

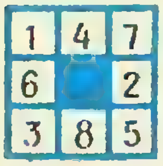


Рис. 1 *а*.

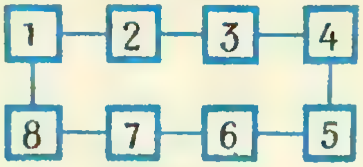


Рис. 1 *б*.

2. Возьмите полосу шириной в 2 поля, идущую по краю доски. Убедитесь, что конь может пройти по всем полям этой полосы, ступив на каждое из них по разу (начать можно с любого поля этой полосы). Разбейте всю доску на такие полосы и начните путь с центрального поля.

3. $m^2n^2-9mn+12m+12n-16$. При $m = n = 8$ получаем 3696.

4. Обозначим искомое число полей через $N(n)$. Легко проверить непосредственно, что $N(0) = 1$, $N(1) = 8$, $N(2) = 33$. При $n = 3$ конь может оказаться на всех белых полях восьмиугольника с четырьмя белыми полями на каждой стороне, изображенного на рисунке 2 (начальное поле — в центре). Докажите методом математической индукции, что

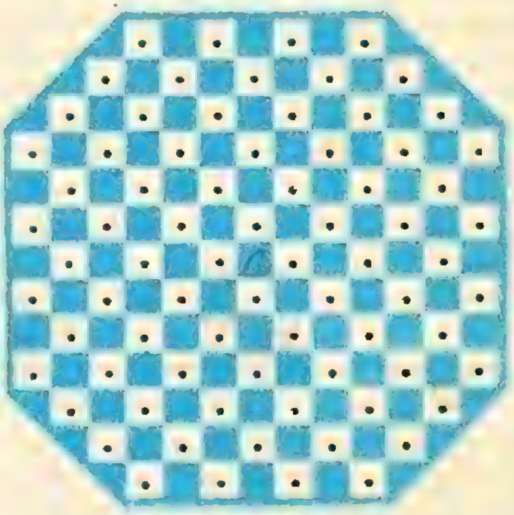


Рис. 2

при любом $n \geqslant 3$ искомые поля заполняют без просвета все одноцветные поля соответствующего восьмиугольника. Подсчитав число этих полей, получаем: $N(n) = 17n^2 + 4n + 1$ при $n \geqslant 3$.

5. Числа m и n должны быть взаимно просты, и хотя бы одно из них должно быть нечетным.

К заметке «Квант» для младших школьников

(«Квант» № 9, 1971, 3-я стр. обложки)

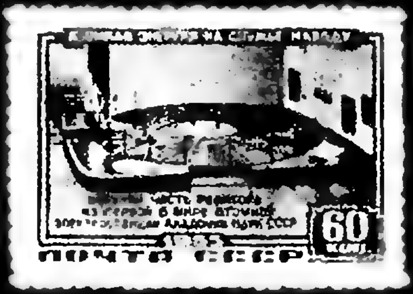
1. Нельзя. Хотя весы и уравновешены, тем не менее грузы равной массы, помещенные на чашки весов, будут создавать различные моменты относительно оси коромысла.

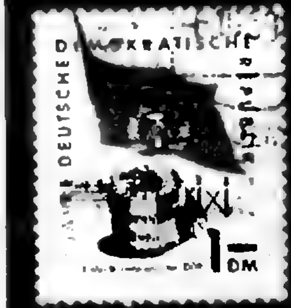
2. Вечером темно и поэтому зрачки у человека расширены. Но хрусталик глаза — не идеальная линза. Изображения, которые дают различные участки хрусталика из-за аберрации смещены относительно друг друга. Чем большая часть хрусталика «работает», тем более размытое изображение.

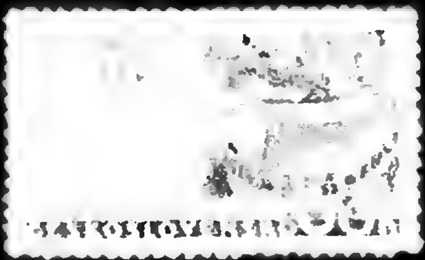
3. Погрузив кончик баллона лампочки в сосуд с водой и сломав его, измерить с помощью линейки объем воды. Затем, заполнив баллон водой полностью, измерить объем баллона. Используя, что $p_1V_1=p_2V_2$, нетрудно теперь найти давление в баллоне.

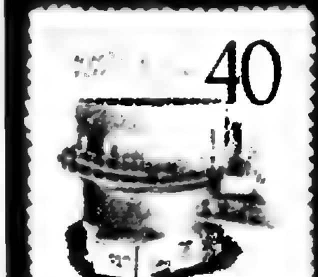
4. Погрузить баллон в озеро вверх дном, измерить линейкой оставшийся объем воздуха. Далее поступить так же, как в задаче 3.

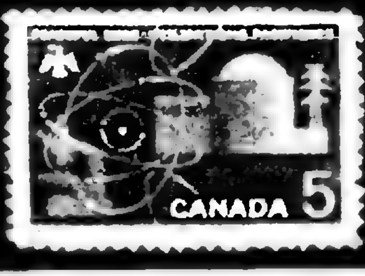
5. Из-за многократных отражений света на границах кристалликов.











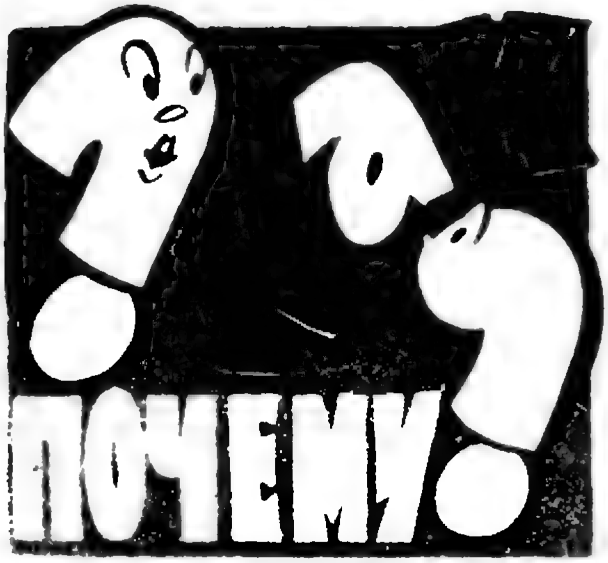
НА МАРКАХ — АТОМНЫЕ РЕАКТОРЫ

Использование атомной энергии в мирных целях неразрывно связано с созданием атомных реакторов. Реактор — это сердце любой атомной электростанции или атомного двигателя. В нем происходит управляемая цепная реакция деления атомных ядер и освобождается атомная энергия. В настоящее время построено много различных типов атомных реакторов.

Первый атомный реактор для мирных целей был построен в Советском Союзе на атомной электростанции в Обнинске, которая вошла в строй в 1954 году. Этому событию была посвящена серия из трех марок, выпущенная в январе 1956 г. На одной из них показана верхняя часть реактора (см. фото).

Атомные реакторы для мирных целей были построены во многих странах мира. На фото приведены марки с изображением первых атомных реакторов ГДР, Чехословакии и Румынии, построенных с помощью Советского Союза, и марка, на которой показан первый атомный реактор, построенный Югославией в Белграде.

Использование атомной энергии в мирных целях символизируют приведенные на фото марки Канады и Франции, на которых также изображены атомные реакторы.



1. Как с помощью длинной тонкой нити, секундомера и стограммовой гирьки определить объем комнаты?

2. Как определить объем комнаты, располагая мотком медной проволоки, весами с набором гирь, аккумулятором, вольтметром и амперметром?

3. На перекрестках улиц некоторых городов установлены электронные устройства, автоматически рассчитывающие и показывающие на световом табло скорость, которую должны поддерживать водители автомашин, чтобы подъехать к следующему светофору под зеленый свет. Обычно показания табло меняются в такой последовательности: вначале 45 *км/час*, потом 50 *км/час* и, наконец, 60 *км/час*. После этого табло обычно гаснет, так как скорость более 60 *км/час* разрешена лишь на малом числе улиц.

Как, наблюдая за показаниями табло, определить расстояние до следующего светофора с помощью одних лишь часов?

В. И. Ланге, А. П. Рымкевич

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**
Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев *(зам. главного редактора)*, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский *(зам. главного редактора)*, Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

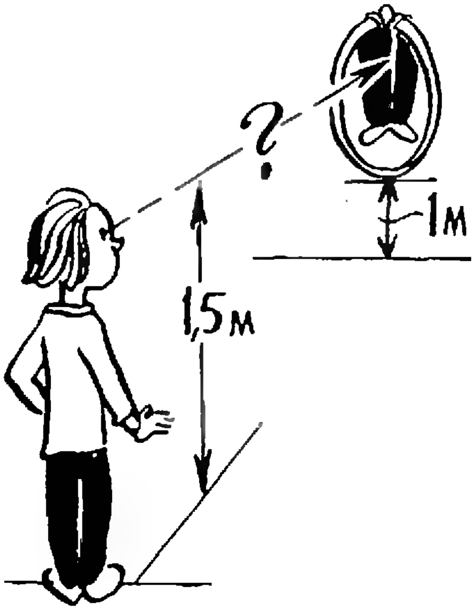
1. Дано число 123456789101112...9899100. Вычеркните из него 150 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

2. На стене вертикально висит зеркало. Нижний край его находится на высоте 1 метра от пола. На какое расстояние нужно отойти от стены, чтобы увидеть в зеркале свои ботинки? Считаем, что глаза человека находятся на высоте 1,5 метра от пола.

3. Имеется 77 телефонов. Можно ли так попарно соединить их, чтобы каждый был соединен ровно с 13?

4. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

А. П. Савин



Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/VI 1971 г.
Подписано в печать 20/VIII 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,69.
Тираж 266 690 экз. Т-14324.
Цена 30 коп. Заказ 1251
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов Московской области

НОМЕР
11

В номере:

Взаимодействие атомов и молекул *1* — *Г. Я. Мякишев*

О наилучших приближениях *8* — *Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс*

Поле тяжести сферически-однородного тела *16* — *И. И. Огиевецкий*

«Неприводимый» случай *20* — *В. Г. Янкелевич*

Лаборатория «Кванта»

Демонстрация орбит тел, движущихся под действием центрального притяжения *22* — *Р. Вуд*

Задачник «Кванта»

Задачи *24*

Решения задач М70-М73; Ф79-Ф82 *26* — *Н. Б. Васильев, А. Л. Тоом, Б. Б. Буховцев, И. Ш. Слободецкий*

V Всесоюзная математическая олимпиада *35* — *В. Л. Гутенмахер*

V Всесоюзная физическая олимпиада *42* — *И. А. Зайцев*

Практикум абитуриента

Графики в задачах на равномерные процессы *48* — *Б. А. Кордемский*

Статика *54* — *Л. Г. Асламазов*

Информация

Заочная олимпиада Азиатской части СССР *58*

Рецензии, библиография

От галактик до элементарных частиц *63* — *В. А. Лешковцев*

Ответы, указания, решения *64*

Уголок коллекционера

Значки Всесоюзных олимпиад *3-я стр. обл.* — *Г. Н. Дьяченко*

Кроссворд *4-я стр. обл.*

Г. Я. МЯКИШЕВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

Если бы между молекулами не существовало сил притяжения, то вещество при любых условиях находилось бы в газообразном состоянии. Только благодаря силам притяжения молекулы могут удерживаться друг возле друга и образовывать жидкие и твердые тела.

Но одни силы притяжения не могут обеспечить существование стабильных образований из атомов или молекул. На очень малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания.

Существование межмолекулярных сил не вызывает сомнений. Но определить величину этих сил, зависимость их от расстояния между молекулами — очень сложная задача.

Силы Ван-дер-Ваальса

Несмотря на отсутствие прямых методов измерения межмолекулярных сил на любых расстояниях*), в настоящее время мы знаем о них хотя еще и далеко не все, но очень многое.

Впервые в точную науку представления о существенной роли межмолекулярных сил для описания свойств газов ввел голландский физик Ван-дер-Ваальс. Он не пытался установить точную зависимость сил от расстояния. Он считал, что на малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания, которые с увеличением расстояния сменяются силами притяжения, сравнительно медленно убывающими с расстоянием.

На основе этих простых соображений Ван-дер-Ваальсу удалось установить уравнение состояния реальных газов. Уравнение Ван-дер-Ваальса способно приближенно описывать не только свойства газа, но и процесс превращения его в жидкость.

Молекулярные силы часто называют силами Ван-дер-Ваальса.

---

*) До расстояний 10^{-5} *см* эти силы были впервые экспериментально измерены членом-корреспондентом АН СССР Б. В. Дерягиным и И. И. Абрикосовой в начале [illegible] годов.

Электромагнитная природа межмолекулярных сил

Приступить к теоретическому исследованию межмолекулярных сил до начала 20 века было почти невозможно. Простые и хорошо изученные гравитационные силы при взаимодействии тел столь малой массы как молекулы явно не могли играть заметной роли. Оставалось предположить, что молекулярные силы имеют электромагнитную природу. О каких-либо других силах в то время ничего не знали.

Любой атом и тем более молекула — это сложная система из большого числа заряженных частиц. Как она устроена, было не известно. А ведь от строения молекул, несомненно, зависят силы их взаимодействия. Однако исследования начались и начались, естественно, с самых простых случаев.

Ориентационные силы

У многих молекул, например, у воды, распределение положительных и отрицательных зарядов таково, что в среднем центры этих зарядов не совпадают. Такую молекулу приближенно можно рассматривать как электрический диполь: совокупность двух точечных зарядов $+q$ и $-q$ на небольшом расстоянии l друг от друга (рис. 1). Электрические свойства такой молекулы характеризуются дипольным моментом

$$p = ql.$$

Рассчитывать значения дипольных моментов молекул на первых порах не умели. До появления квантовой механики это вообще было невозможно.

Но, если считать дипольные моменты p_1 и p_2 двух молекул известными, то зависимость силы взаимодействия между ними от расстояния можно вычислить с помощью обычного закона Кулона. Сила притяжения между двумя диполями максимальна, когда они располагаются так, как показано на рисунке 2, вдоль одной линии. Эта сила возникает из-за того, что расстояние между разноименными зарядами 2 и 3 чуть меньше, чем между одноименными 1, 3 и 2, 4.

Естественно, сила взаимодействия диполей зависит от их взаимной ориентации. Поэтому она называется ориентационной. Хаотическое тепловое движение непрерывно меняет ориентацию молекул-диполей. Учитывая это, силу взаимодействия между диполями нужно вычислять как среднюю по всевозможным ориентациям. Расчеты привели к следующему результату: сила притяжения пропорциональна произведению дипольных моментов p_1 и p_2 молекул и обратно пропорциональна расстоянию между ними в седьмой степени:

$$F_{\text{ор}} \sim \frac{p_1 p_2}{r^7}.$$

Это очень быстрое убывание по сравнению с кулоновской силой взаимодействия заряженных тел, которая пропорциональна $\frac{1}{r^2}$.

Индукционные (поляризационные) силы

Можно указать еще один достаточно простой тип взаимодействия молекул. Оно возникает между двумя молекулами, одна из которых обладает дипольным моментом, а вторая — нет.

Дипольная молекула создает электрическое поле, которое поляризует молекулу с электрическими зарядами, равномерно распределенными по объ-

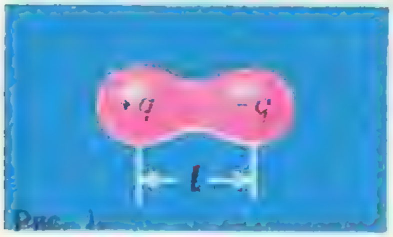


Рис. 1

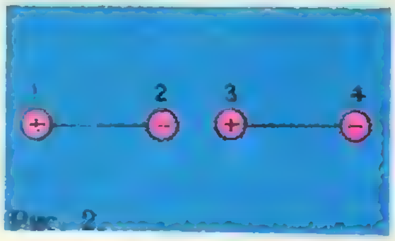


Рис. 2

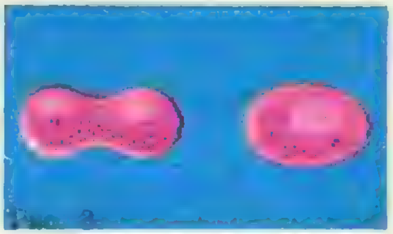


Рис. 3

ему. Положительные заряды смещаются по направлению электрического поля, а отрицательные — против. В результате неполярная молекула немного растягивается (поляризуется) и у нее возникает дипольный момент (рис. 3).

Силу взаимодействия можно рассчитать и в этом случае. Она пропорциональна дипольному моменту p полярной молекулы, коэффициенту α, характеризующему способность неполярной молекулы поляризоваться и опять-таки обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между молекулами:

$$F_{\text{и}} \sim \frac{p\alpha}{r^7}.$$

Данные силы притяжения называются индукционными или поляризационными, так как они возникают благодаря поляризации молекул, вызванной электростатической индукцией.

Дисперсионные силы

Хорошо известно, что силы притяжения существуют и между неполярными молекулами. Например, атомы инертных газов не имеют дипольного момента, но тем не менее взаимодействуют друг с другом. Природа этих сил была выяснена только после создания квантовой механики.

Качественно и грубо приближенно появление этих сил можно объяснить так. В атомах и молекулах электроны каким-то сложным образом движутся вокруг ядер. И в среднем по времени дипольные моменты молекул могут оказаться равными нулю.

Но в каждый момент времени электроны занимают какое-то определенное положение. Поэтому мгновенное значение дипольного момента отлично от нуля. Мгновенный диполь создает поле, поляризующее соседние неполярные атомы. Из-за этого появляется взаимодействие мгновенных диполей. Полная сила взаимодействия между неполярными молекулами есть средний результат взаимодействия всевозможных мгновенных диполей с дипольными моментами, которые они наводят в соседних молекулах благодаря индукции.

Квантовый расчет приводит к выводу, что сила взаимодействия в этом случае пропорциональна произведению поляризуемостей молекул α_1 и α_2 и обратно пропорциональна седьмой степени расстояния:

$$F_{\text{д}} \sim \frac{\alpha_1\alpha_2}{r^7}.$$

Данные силы называются дисперсионными по той причине, что дисперсия вещества (зависимость показателя преломления света от частоты) определяется теми же свойствами молекул, что и эти силы.

Дисперсионные силы действуют между всеми атомами и молекулами, так как механизм их появления не зависит от того, есть ли у них постоянные дипольные моменты или нет. Обычно эти силы превосходят по величине как ориентационные, так и индукционные силы. Только при взаимодействии молекул с большими дипольными моментами, например, молекул воды, ориентационная сила больше дисперсионной (для молекул воды в три раза). При взаимодействии же полярных молекул (CO, HCl и т. п.) дисперсионные силы в десятки и сотни раз превосходят все остальные.

Но главное, что все три типа сил притяжения одинаковым образом убывают с расстоянием как $\frac{1}{r^7}$. Впрочем, на больших сравнительно с размерами молекул расстояниях начинает сказываться конечность скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Из-за этого на расстояниях порядка 10^{-5} *см* силы притяжения начинают убывать уже как $\frac{1}{r^6}$. Это было обнаружено в опытах Дерягина.

Силы отталкивания

Теперь обратим внимание на силы отталкивания, действующие между молекулами на очень малых расстояниях. С одной стороны, здесь поло-

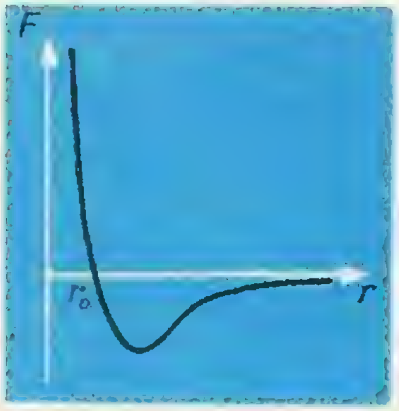


Рис. 4.

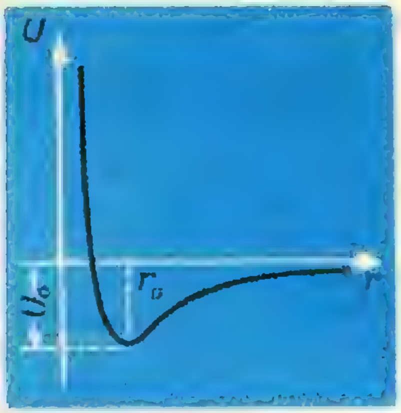


Рис. 5.

жение проще, а с другой,— сложнее. Проще в том смысле, что эти силы очень быстро нарастают при сближении молекул, и поэтому та или иная быстрота изменения силы с расстоянием не оказывает заметного влияния на течение разнообразных процессов.

Сложность состоит в том, что силы отталкивания в значительно большей мере, чем силы притяжения, зависят от индивидуальности молекул. Зная, как молекула *A* отталкивает молекулы *B* и *C*, мы еще не в состоянии судить, какие силы отталкивания будут действовать между молекулами *B* и *C*. При непосредственном сближении молекул индивидуальность их строения сказывается в большей мере, чем при больших расстояниях между ними.

К достаточно хорошим результатам приводит допущение, что силы отталкивания возрастают по закону

$$F_{\text{от}} \sim \frac{1}{r^{13}}.$$

Учитывая, что силы притяжения с уменьшением расстояния увеличиваются пропорционально $\frac{1}{r^7}$, а силы отталкивания растут как $\frac{1}{r^{13}}$, можно нарисовать примерную зависимость силы от расстояния. На рисунке 4 силы отталкивания считаются положительными, а силы притяжения отрицательными. При расстоянии r_0, равном примерно сумме радиусов молекул, сила равна нулю.

Потенциальная энергия взаимодействия молекул

При изучении поведения большой совокупности молекул удобнее пользоваться не силой взаимодействия молекул, а потенциальной энергией.

Нужно вычислять средние характеристики системы, а понятие средней силы взаимодействия молекул лишено смысла, так как сумма всех сил, действующих между молекулами, согласно третьему закону Ньютона равна нулю. Средняя же потенциальная энергия, как мы скоро увидим, в существенной мере определяет состояние и свойства вещества.

Так как изменение потенциальной энергии равно работе силы, то по известной зависимости силы от расстояния можно найти зависимость от расстояния потенциальной энергии*).

При этом надо учитывать, что если сила меняется с расстоянием как $\frac{1}{r^n}$, где n — некоторое число, то потенциальная энергия будет меняться по закону $U \sim \frac{1}{r^{n-1}}$. Это видно уже из соображений размерности. Энергия имеет размерность работы, то есть произведения силы на расстояние. Поэтому размерность энергии равна размерности силы, умноженной на размерность расстояния.

---

*) См. статью Р. Г. Минца «Графики потенциальной энергии», «Квант» № 5, 1971, стр. 8—16.

Потенциальная энергия может быть определена с точностью до произвольной постоянной. При условии, что потенциальная энергия $U\to 0$ при $r\to\infty$, график потенциальной энергии в зависимости от расстояния между молекулами будет иметь вид, изображенный на рисунке 5. U_0 — глубина потенциальной ямы.

Однако потенциальная кривая (кривая, определяющая зависимость потенциальной энергии от расстояния) будет иметь форму, изображенную на рисунке 5, если молекулы сближаются вдоль линии, соединяющей их центры (например, если молекулы движутся навстречу друг другу в плоскости *A* на рисунке 6). Если же это не так, то потенциальная кривая будет такой, как показано на рисунках 7 (молекулы сближаются в плоскости *B*) и 8 (молекулы сближаются в плоскости *C*).

Главная задача

Многое можно объяснить и понять, исходя из определенных представлений о характере взаимодействия молекул в веществе. Мы остановимся только на одном очень общем вопросе: каким образом знание зависимости потенциальной энергии от расстояния между молекулами позволяет установить количественный критерий различия между газами, жидкостями и твердыми телами с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

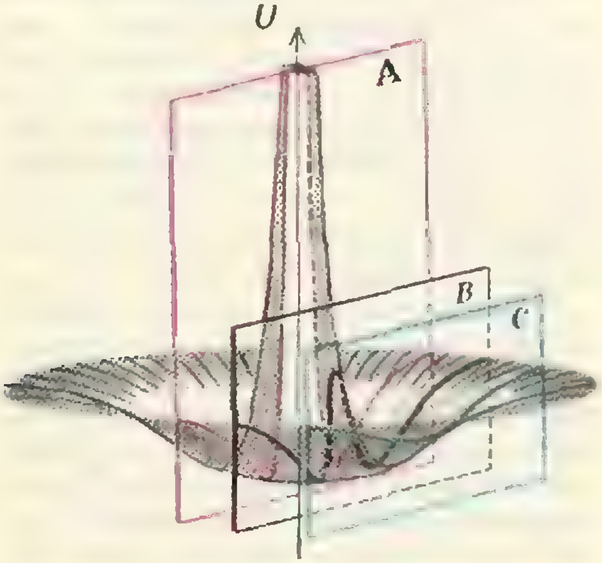


Рис. 6.

Предварительно, правда, нужно рассмотреть движение молекул с энергетической точки зрения.

Движение частицы в заданном потенциальном поле

Зная зависимость потенциальной энергии от расстояния, можно установить характер движения тела, используя лишь закон сохранения энергии.

Пусть одна из молекул неподвижна, и мы рассматриваем движение другой молекулы. Характер движения молекулы зависит от ее полной энергии. Согласно закону сохранения энергии полная энергия молекулы остается постоянной:

$$E = E_к + U = \text{const},$$

где $E_к$ — кинетическая энергия, а U — потенциальная.

Рассмотрим вначале случай, когда $E=E_1>0$ (рис. 9). Полную энергию можно изобразить прямой, параллельной оси r, так как при любых r она имеет одно и то же значение. При движении молекулы вдоль r ее кинетическая и потенциальная энергии непрерывно изменяются: чем больше потенциальная энергия, тем меньше кинетическая и наоборот. Если частица движется справа налево, то ее кинетическая энергия растет, и в точке $r=r_0$ (минимум потенциальной энергии) достигает максимума. С дальнейшим уменьшением r кинетическая энергия начинает убывать. В точке $r=r_1$ кинетическая энергия равна нулю, так как в этой точке полная энергия равна потенциальной. Попасть в область $r<r_1$ частица не может. При этом ее положительная потенциальная энергия оказалась бы больше полной энергии, и, следовательно, кинетическая энергия сделалась бы отрицательной. Но кинетическая энергия всегда положительна.

В точке $r=r_1$ частица останавливается и начинает двигаться назад, ибо на нее действует сила отталкива-

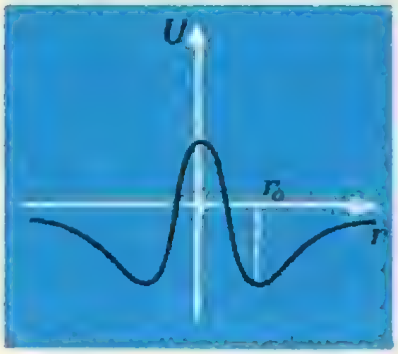


Рис. 7.

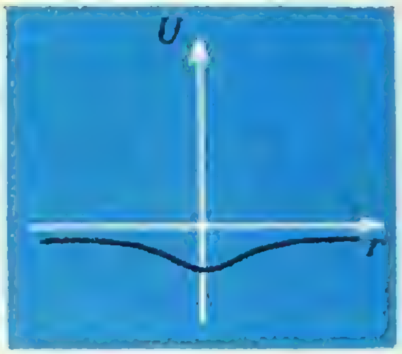


Рис. 8.

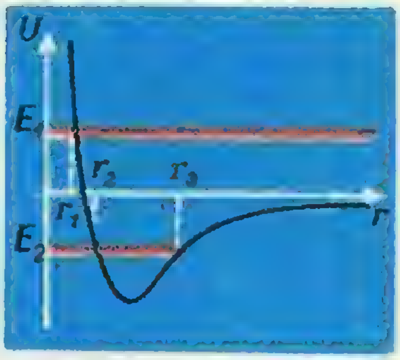


Рис. 9.

ния. Эта точка называется точкой поворота. В дальнейшем молекула движется в положительном направлении r и уходит на бесконечность.

Совершенно иная картина будет наблюдаться при $E = E_2 < 0$ (см. рис. 9). В этом случае молекула находится в потенциальной яме и не может из нее выйти. В точках поворота r_2 и r_3 кинетическая энергия равна нулю. Возникает так называемое связанное состояние. Молекулы совершают колебания друг возле друга. Разделение системы на две независимые частицы невозможно без увеличения полной энергии до $E > 0$.

Энергия взаимодействия молекул в газах, жидкостях и твердых телах

Установим теперь количественный критерий различия между газами, жидкостями и твердыми телами с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Газы

Можно получить более глубокое представление о состоянии вещества, называемом реальным газом, если нарисовать картину зависимости потенциальной энергии одной из молекул от расстояния до ее ближайших соседей (рис. 10). При перемещении молекулы ее потенциальная энергия на большей части пути почти точно равна нулю, так как расстояние между молекулами в газе в среднем гораздо больше их размеров. В точках 1 и 2 расположены ближайшие соседи рассматриваемой молекулы. Данная молекула проходит на довольно значительном расстоянии от соседа 1 и на более близком от соседа 2.

Средняя потенциальная энергия молекулы отрицательна и очень мала. Ее величина равна площади фигуры, ограниченной потенциальной кривой между точками 1 и 2 и осью r, деленной на длину отрезка 1—2 (среднее значение на отрезке 1—2). Полная средняя энергия обязательно больше нуля (прямая на рис. 10), так как при $E < 0$ мы имели бы связанное состояние молекул. Это возможно лишь при условии, что в газе средняя кинетическая энергия молекулы больше среднего значения ее потенциальной энергии:

$$\overline{E}_к > |\overline{U}|.$$

Ведь

$$\overline{E} = \overline{E}_к + \overline{U},$$

а $\overline{U}$ — отрицательна.

Жидкости

В жидкостях и твердых телах молекулы находятся на малом расстоянии друг от друга. Поэтому каждая молекула взаимодействует сразу с несколькими своими соседями. Ограничимся учетом взаимодействия данной молекулы с двумя ближайшими соседями, находящимися примерно на расстоянии $2r_0$ друг от друга.

Искомую потенциальную кривую можно получить наложением кривой, изображенной на рисунке 7 (парное взаимодействие) на такую же кривую, смещенную относительно первой на расстояние чуть больше $2r_0$. Потенциальные энергии складываются, и поэтому глубина потенциальной ямы увеличивается почти вдвое, а мак-

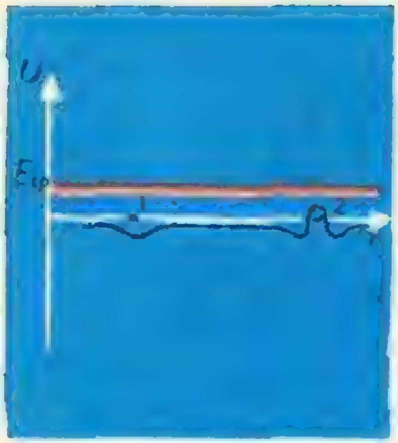


Рис. 10.

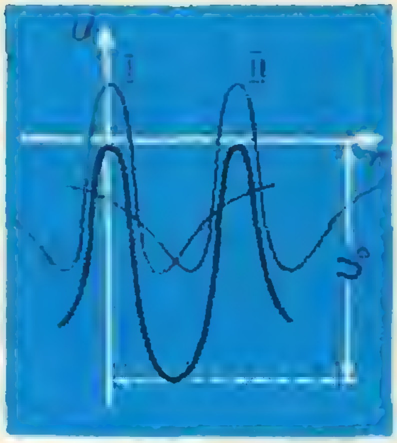


Рис. 11.

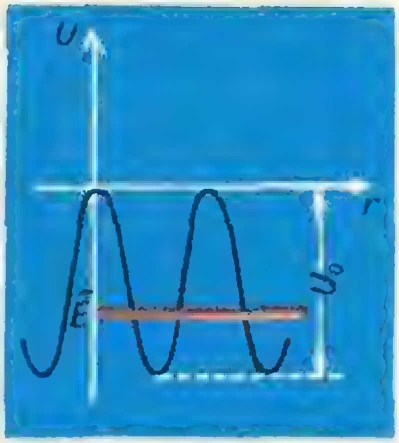


Рис. 12.

симумы энергии уменьшаются (рис. 11). Ход потенциальной кривой с учетом взаимодействия с другими молекулами показан на рисунке 12.

Для того чтобы молекула не могла покинуть жидкость, ее средняя энергия должна быть отрицательна ($\overline{E}<0$). Только в этом случае молекула останется внутри потенциальной ямы, образованной ее соседями. Если же $\overline{E}>0$, то молекула не удержится внутри жидкости и покинет ее.

Так как $\overline{E}=\overline{E}_к+\overline{U}$ и $\overline{U}<0$, то в жидкости средняя кинетическая энергия меньше абсолютного значения средней потенциальной энергии: $\overline{E}_к<|\overline{U}|$, причем лишь незначительно меньше ($\overline{E}_к \lesssim |\overline{U}|$), так что $|\overline{E}|\leqslant|U_0|$— минимального (по абсолютной величине) значения потенциальной энергии. Именно поэтому колебания молекулы в яме не продолжаются долго. Из-за хаотичности движения молекул их энергия непрерывно меняется и становится то больше, то меньше энергии $\overline{E}$.

Как только энергия молекулы превышает высоту потенциального барьера, отделяющего одну яму от другой, молекула перескакивает из одного положения равновесия в другое. Этим как раз и определяется характер теплового движения молекул в жидкости и текучесть жидкостей. Время «оседлой жизни» молекулы — это время нахождения ее внутри определенной потенциальной ямы. С повышением температуры средняя энергия увеличивается, и перескоки происходят чаще.

Твердые тела

Потенциальная энергия взаимодействия молекулы твердого тела со своими ближайшими соседями похожа на энергию взаимодействия молекул жидкости (рис. 12). Только глубина потенциальной ямы здесь несколько больше, так как молекулы расположены ближе друг к другу. Условие $\overline{E}_к<|\overline{U}|$ выполняется и для твердых тел. Но кинетическая энергия молекул твердого тела значительно меньше, чем у молекул жидкости. Ведь твердые тела образуются при охлаждении жидкостей. Соответственно, в твердых телах средняя кинетическая энергия движения молекул значительно меньше абсолютного значения средней потенциальной энергии:

$$\overline{E}_к \ll |\overline{U}|.$$

На рисунке 12 средняя энергия молекулы внутри потенциальной ямы изображена отрезком прямой. Частица совершает колебания у дна потенциальной ямы. Высота барьеров между соседними ямами велика, и молекулы почти не перемещаются из одного положения равновесия в другое. Для перемещения молекула должна получить энергию, значительно превышающую среднюю. Это событие маловероятно. Вот почему твердые тела, в отличие от жидкостей, сохраняют свою форму.

О наилучших приближениях

Д. Б. ФУКС М. Б. ФУКС

Производить вычисления с иррациональными числами неудобно. Намного удобнее работать с рациональными числами. Поэтому вопрос о приближениях иррациональных чисел рациональными, о том, насколько хорошие приближения возможны, весьма важен. В первой части нашей статьи (см. «Квант» № 6, 1971) мы сравнивали различные приближения числа α и доказали, что для всякого иррационального α и сколь угодно большого N можно подобрать бесконечно много рациональных приближений p/q таких, что $q|\alpha - p/q| < 1/N$. В этой статье рассматривается более тонкий вопрос: можно ли для любого α найти бесконечно много приближений p/q таких, что $q^2|\alpha - p/q|$ меньше наперед заданного числа. Оказывается, что это наперед заданное число не может быть любым, а именно, справедлива теорема Гурвица — Бореля:

Для любого α существует бесконечно много различных приближений p/q таких, что $|\alpha - p/q| < 1/q^2\sqrt{5}$, то есть $q^2|\alpha - p/q| < 1/\sqrt{5}$. При этом вместо числа $\sqrt{5}$ нельзя взять большее число.

Перед тем, как читать эту статью, нужно еще раз просмотреть предыдущую (мы будем называть ее «часть I») и статью Н. М. Бескина («Квант № 8, 1970).

§ 1. Геометрическая формулировка главной теоремы.

В части I была использована геометрическая конструкция, основанная на понятии решетки. Для удобства мы всю необходимую информацию об этой решетке помещаем на рисунке 1. Точки (узлы) решетки взаимно однозначно соответствуют рациональным приближениям иррационального α. Площадь заштрихованного прямоугольника равна $q^2|\alpha - p/q|$ — коэффициенту качества приближения. Задача о нахождении приближений с коэффициентом качества, меньшим данного μ, есть задача о нахождении точек нашей решетки, у которых модуль произведения координат меньше μ, то есть задача о нахождении точек решетки в области $|xy| < \mu$ (рис. 2), называемой гиперболическим крестом (нас интересует только часть креста,

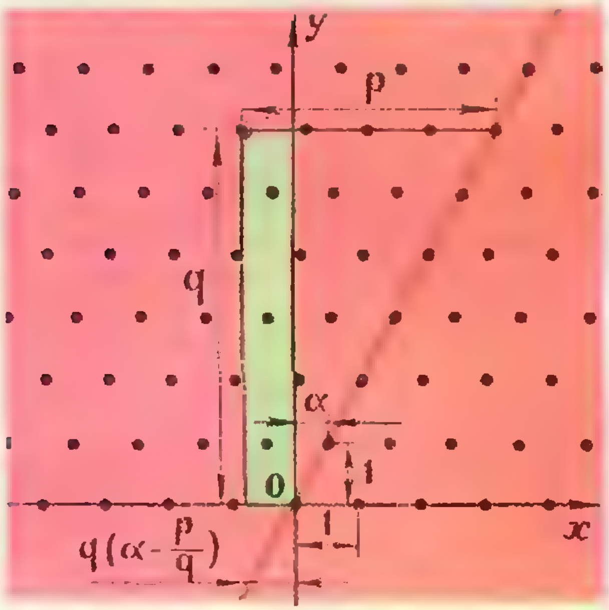


Рис. 1.

лежащая выше оси абсцисс, соответствующая приближениям с положительными знаменателями). Ясно, что эта геометрическая задача сложнее аналогичной задачи из части I: там мы искали точки решетки в полосе, заключенной между двумя параллельными прямыми, а здесь мы ищем их в бесконечно сужающемся кверху гиперболическом кресте.

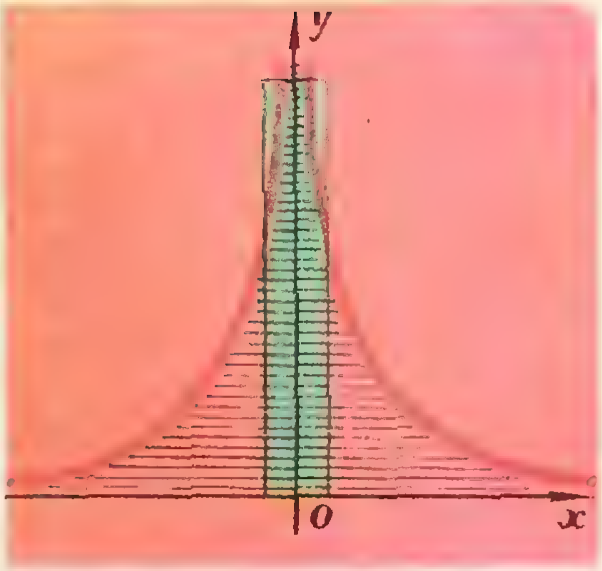


Рис. 2.

Наши дальнейшие рассуждения будут основаны на том, что, оказывается, при отыскании рациональных приближений с коэффициентом качества, меньшим заданного числа, можно ограничиться рассмотрением лишь подходящих дробей приближаемого числа. В этом мы убедимся в следующем параграфе с помощью новой геометрической реализации алгоритма Евклида — «алгоритма вытягивания носов». Это остроумное название принадлежит известному советскому математику Борису Николаевичу Делоне.

§ 2. Алгоритм вытягивания носов.

Этот алгоритм можно представлять себе, как изображение алгоритма Евклида на плоскости.

Пусть нам даны:

1) ось l на плоскости;

2) точка O на оси l;

3) исходящие из O и расположенные по разные стороны от оси l векторы $a_1=\overrightarrow{OA}_1$, $a_2=\overrightarrow{OA}_2$; мы предполагаем, что угол A_1OA_2, содержащий ось l, меньше 180°, что A_1 лежит от оси l дальше, чем A_2.

Из точки A_1 отложим вектор a_2 (то есть отложим отрезок, равный и параллельный отрезку OA_2 и направленный в ту же сторону). Из конца этого вектора отложим еще раз вектор a_2, и так далее, столько раз, сколько можно его отложить, не пересекая прямую l. Скажем, он отложился m_1 раз. Конец последнего отложенного вектора обозначим через A_3, а вектор $\overrightarrow{OA}_3$ через a_3. Из точки A_2 отложим вектор a_3 столько раз, сколько его можно отложить, не пересекая ось l (скажем, m_2 раз). По-

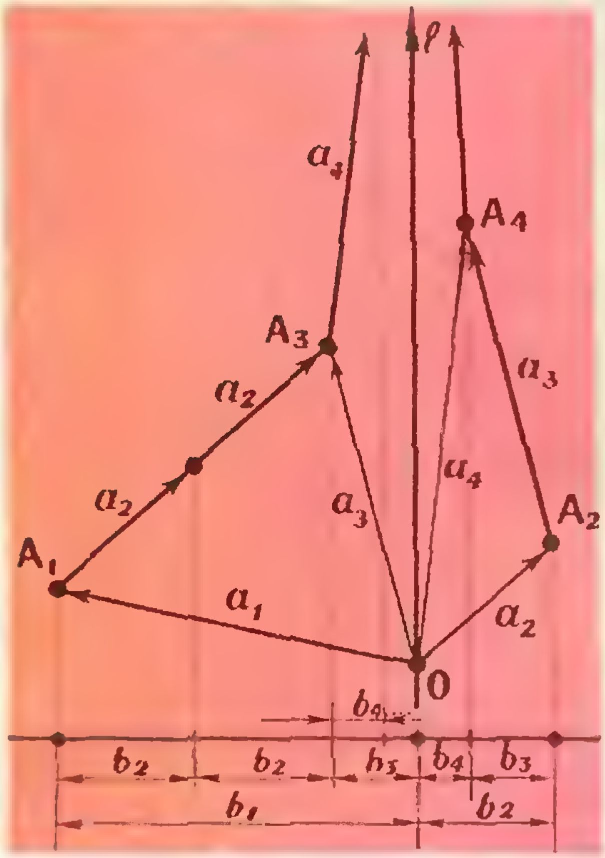


Рис. 3.

лучим точку A_4. Вектор $\overrightarrow{OA_4}$ обозначим через a_4, из точки A_3 откладываем a_4 и т. д.

Получаются две ломаные: $A_1 A_3 A_5 \ldots$ и $A_2 A_4 A_6 \ldots$, объемлющие ось l (рис. 3). Может случиться, что какая-то из точек A_k попадет прямо на l — на этом процесс прекращается. Может оказаться, что этого не произойдет — тогда процесс будет бесконечным.

Все вместе и называется алгоритмом вытягивания носов (АВН).

Спроектируем теперь все построения на прямую, перпендикулярную к оси l. Сама ось l перейдет при этом в одну точку, векторы a_k — в отрезки, которые мы обозначим через b_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Получим уже известный нам алгоритм Евклида для отрезков b_1 и b_2. В частности,

$$b_1/b_2 = [m_1;\, m_2,\, m_3,\, m_4, \ldots] \qquad (1)$$

и, значит,

$$b_2/b_1 = [0;\, m_1,\, m_2,\, m_3, \ldots]. \qquad (2)$$

Теперь покажем, как используется АВН при решении нашей геометрической задачи (см. § 1). Рассмотрим упоминавшуюся в § 1 решетку, точки которой отвечают приближениям числа α (нам удобно считать, что $0<\alpha<1$; очевидно, что при доказательстве теоремы Гурвица — Бореля можно ограничиться такими числами).

Применим АВН к векторам $a_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $a_2 = \overrightarrow{OA_2}$, на которых построена наша решетка, и к оси $l = OY$. Получатся две ломаные линии $A_1A_3A_5\ldots$, $A_2A_4A_6\ldots$, объемлющие ось OY (рис. 4).

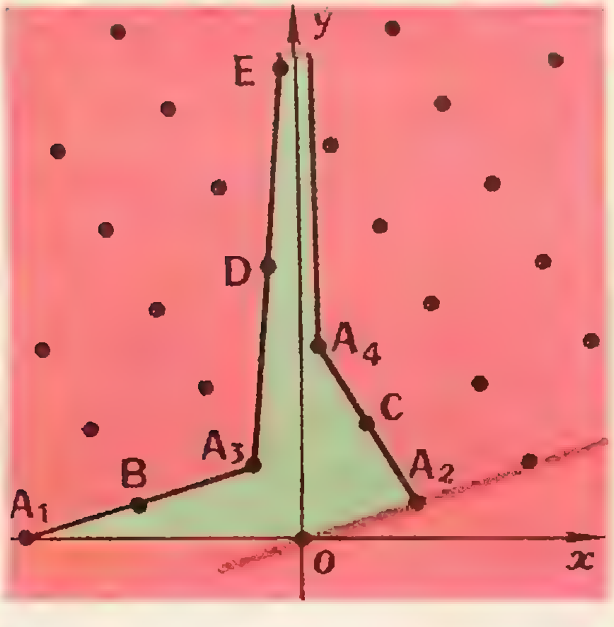


Рис. 4.

Числа $m_1, m_2, \ldots$, фигурирующие в АВН, представляют собой не что иное, как неполные частные числа α. Более точно, разложение числа α в цепную дробь выглядит так:

$$\alpha = [0;\, m_1,\, m_2, \ldots]$$

(напомним, что $0<\alpha<1$).

Докажем теперь несколько свойств наших ломаных.

Теорема 1. *Точки A_1, A_2, $A_3, \ldots$ являются точками решетки.*

Справедливость этого утверждения ясна из рисунка 4. Его полное доказательство основано на теореме 2 части I. Подробности мы оставляем читателю.

Теорема 2. *Между ломаными $A_1, A_3 A_5 \ldots$ и $A_2 A_4 A_6 \ldots$ (то есть в заштрихованной на чертеже области) точек решетки нет.*

Доказательство. АВН состоит в последовательном откладывании векторов: A_1B, BA_3; A_2C, CA_4; A_3D, DE;… Для каждого такого вектора построим параллелограмм, сторонами которого служат этот вектор и тот вектор, параллельно которому он откладывается. Получим последовательность параллелограммов

$$OA_2BA_1,\ OA_2A_3B,\ OA_2CA_3,\ OCA_4A_3,\ OA_4DA_3, \ldots$$

Эти параллелограммы покрывают всю область между нашими ломаными (это видно из рисунка 5, но нуждается, конечно, в аккуратном доказательстве; мы оставляем его читателю). Площади этих параллелограммов равны (каждые два соседних расположены как на рисунке 6). Значит, все они имеют такую же площадь как параллелограмм OA_2BA_1 (то есть площадь 1). Значит, все эти параллелограммы — основные параллелограммы нашей решетки (см. § 2 части I). А значит, ни внутри этих параллелограммов, ни на их сторонах точек решетки нет. Отсюда и получается требуемое.

(Теорема о том, что внутри основного параллелограмма и на его сторонах нет точек решетки, в части I была приведена в качестве задачи — не забудьте ее доказать!)

Следствие. *Для того чтобы гиперболический крест содержал бесконечно много точек нашей решетки, лежащих выше оси OX, необходимо и достаточно, чтобы он содержал бесконечно много точек из последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots$*

В самом деле, если крест содержит бесконечно много точек из указанной последовательности, то, значит, он содержит бесконечно много точек решетки (точки A_k — точки решетки). Если же лишь конечное число из точек A_k лежат внутри креста, то, значит, выше некоторой горизонтальной прямой обе ломаные находятся вне креста (рис. 7). Но между этими ломаными точек решетки нет, значит, выше этой горизонтальной прямой в кресте нет точек решетки.

Доказанное следствие раскрывает особую роль, которую играют точки A_k. Возникает вопрос, каким же приближениям числа α соответствуют эти точки.

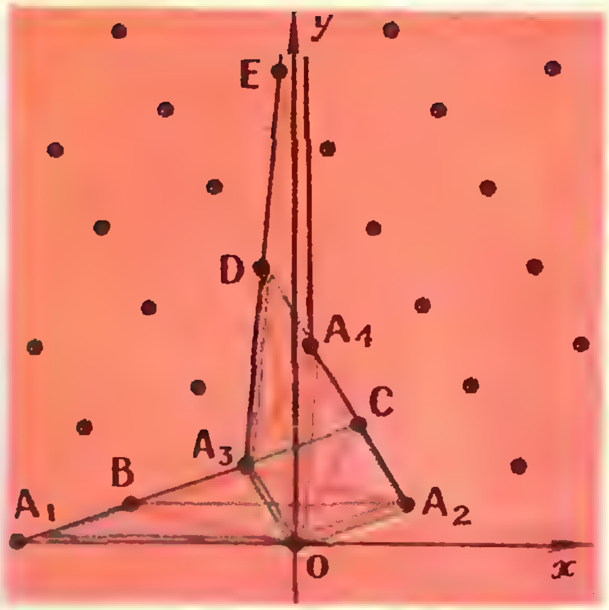


Рис. 5.

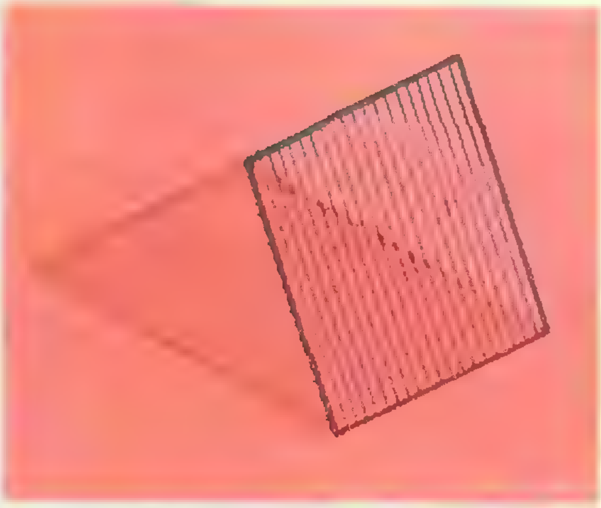


Рис. 6.

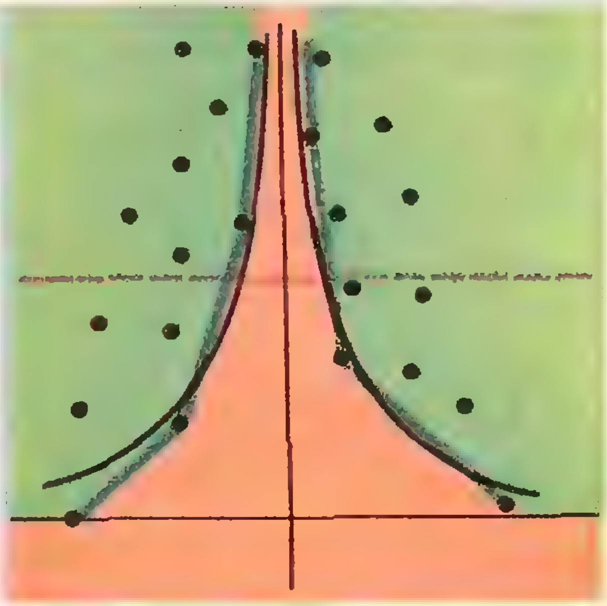


Рис. 7.

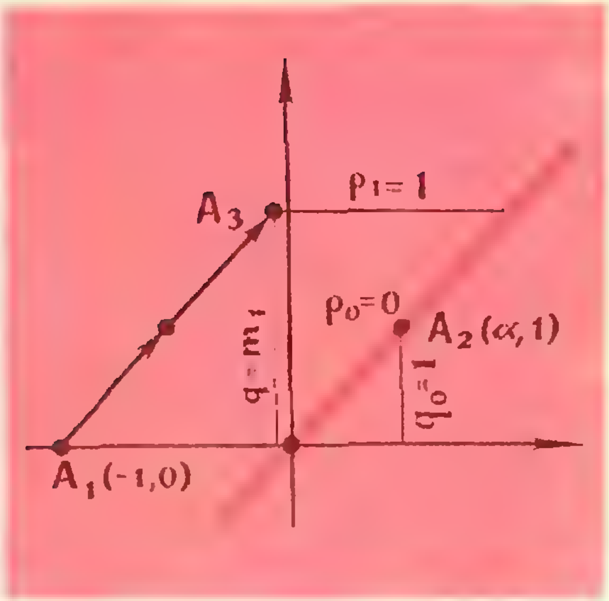


Рис. 8.

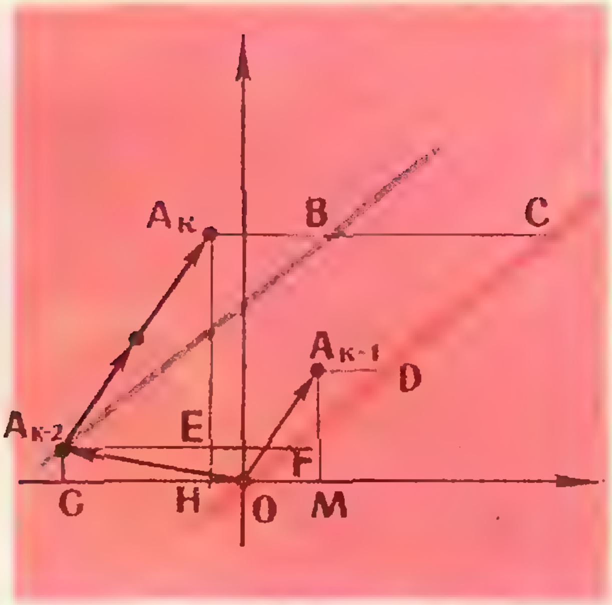


Рис. 9.

Теорема 3. *Точка A_k (при $k \geqslant 2$) отвечает $(k-2)$-й подходящей дроби α_{k-2} числа α.*

Доказательство. Для A_2 и A_3 это ясно: A_2 соответствует $p=0$, $q=1$, то есть приближению, равному $0=\alpha_0$ (напомним, что $m_0=0$); A_3 соответствует $p=1$, $q=m_1$ (рис. 8), то есть приближению $^1/m_1=\alpha_1$.

Пусть нам уже известно, что при $i \leqslant k-1$, где $k \geqslant 4$, точка A_i отвечает приближению α_{i-2}. Покажем, что A_k отвечает α_{k-2}.

Мы должны доказать, что $A_kC = p_{k-2}$, $A_kH = q_{k-2}$ (рис. 9). Треугольник $A_{k-2}A_kE$ подобен треугольнику $OA_{k-1}M$; треугольник $A_{k-2}A_kB$ подобен треугольнику $OA_{k-1}D$; коэффициент подобия в обоих случаях равен m_{k-2}. Имеем:

$$A_kC = BC + A_kB = A_{k-2}F + m_{k-2}A_{k-1}D = p_{k-4} + m_{k-2}p_{k-3} = p_{k-2},$$

$$A_kH = EH + A_kE = A_{k-2}G + m_{k-2}A_{k-1}M = q_{k-4} + m_{k-2}q_{k-3} = q_{k-2}$$

(см. статью Н. М. Бескина).

Теорема доказана.

Теорема 3 вместе со следствием из теоремы 2 приводит нас к следующему выводу:

Если для данного иррационального числа α есть бесконечно много приближений с коэффициентом качества, меньшим данного, то их бесконечно много уже среди подходящих дробей числа α.

Остается последний вопрос: как найти коэффициенты качества подходящих дробей?

Счастливым образом этот вопрос удается полностью решить, и ответ записывается изящной и удобной формулой.

§ 3. Коэффициенты качества подходящих дробей

Теорема 4. *Пусть $\alpha = [0;\ m_1,\ m_2,\ \ldots\ ]$, μ_k — коэффициент качества $k-1$-й подходящей дроби. Тогда:*

$$\frac{1}{\mu_k} = m_k + [0;\ m_{k+1},\ m_{k+2},\ \ldots] + [0;\ m_{k-1},\ m_{k-2},\ \ldots,\ m_1]$$

Доказательство. Рассмотрим точки A_{k+2} и A_{k+1}, отвечающие приближениям α_k и α_{k-1} (рис. 10). Через q_k, r_k; q_{k-1}, r_{k-1} обозначим их расстояния до осей OX, OY. Мы знаем, что $\mu_k = r_{k-1} q_{k-1}$ (см. § 3). Докажем три формулы:

$$q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k = 1 \tag{3}$$

$$r_k / r_{k-1} = [0; m_{k+1}, m_{k+2}, \dots] \tag{4}$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [m_k; m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_1]. \tag{5}$$

Формула (3) доказывается так. Разобьем параллелограмм $OA_{k+1}BA_{k+2}$ прямыми, параллельными осям координат, на треугольники: $A_{k+1}QO$, OPA_{k+2}, $A_{k+2}MB$, BRA_{k+1} и прямоугольник $MPQR$ (см. рис. 11). Площадь параллелограмма $OA_{k+1}BA_{k+2}$ равна 1, так как это — основной параллелограмм нашей решетки. Находим площади частей:

$$1 = \frac{1}{2} r_{k-1} q_{k-1} + \frac{1}{2} r_k q_k + \\ + \frac{1}{2} r_{k-1} q_{k-1} + \frac{1}{2} r_k q_k + \\ + (r_{k-1} - r_k)(q_k - q_{k-1}) = \\ = q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k.$$

Формула (4), по существу, нам уже известна: если отбросить часть нашего алгоритма вытягивания носов, предшествующую получению точки A_{k+2}, мы получим тот же алгоритм для векторов OA_{k+1}, OA_{k-2}. Поэтому формула (4) прямо следует из формулы (2).

Самое неожиданное доказательство имеет формула (5). Построим ломаную $A'_{k+2} \dots A'_2$ (рис. 12), симметричную ломаной $A_{k+2} \dots A_2$ относительно точки O. Эта ломаная вместе с ломаной $A_{k+1} \dots A_1$ представляет собой, как это видно, результат применения ABH к векторам $\overrightarrow{OA}_{k+2}$, $\overrightarrow{OA}_{k+1}$ и отрицательного

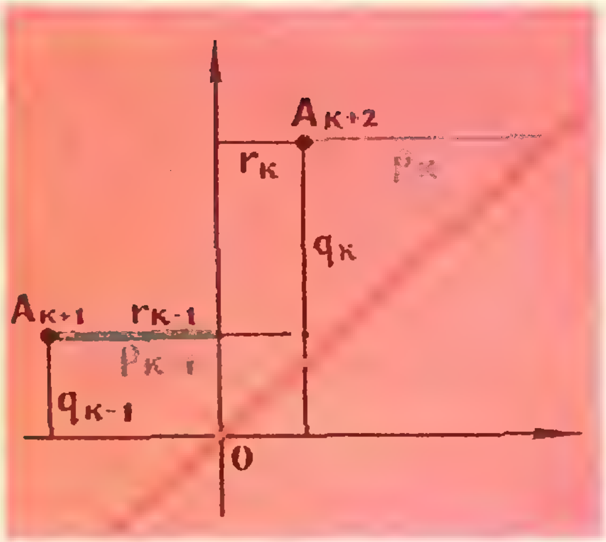


Рис. 10.

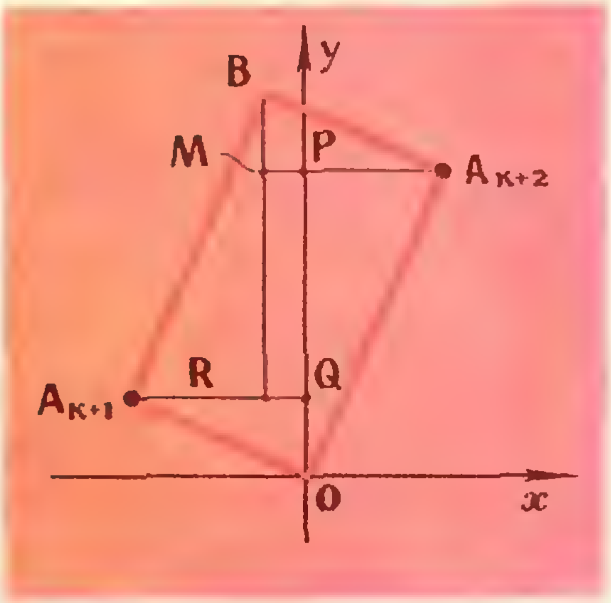


Рис. 11.

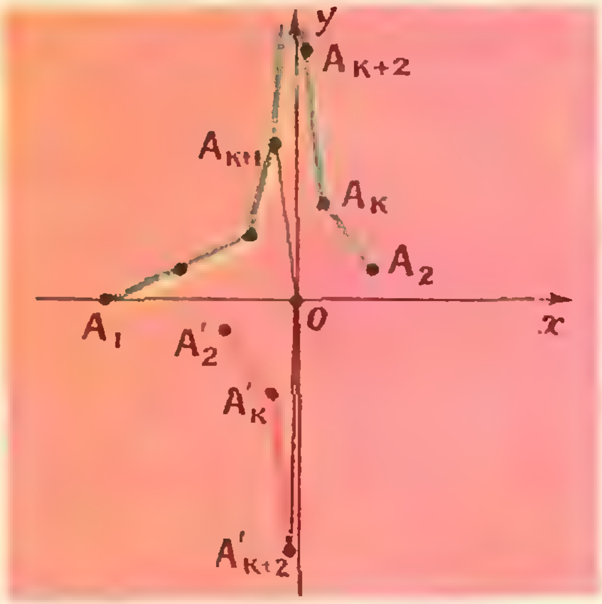


Рис. 12.

направления оси OX. Этот алгоритм, как мы видим, конечный, и кончается в точке A_1. Устроен он так: сначала из точки A'_{k+2} откладывается m_k раз вектор OA_{k+1}, затем из точки A_{k+1} откладывается m_{k-1} раз вектор $\overrightarrow{OA'_k}$ и т. д. Последнее откладывание: вектор $\overrightarrow{OA'_2}$ откладывается m_1 раз.

В силу формулы (4) имеем:

$$q_k/q_{k-1} = [m_k; m_{k-1}, \ldots, m_1].$$

Итак, все формулы доказаны. Докажем теперь теорему 4.

Имеем:

$$\frac{1}{\mu_k} = \frac{q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k}{r_{k-1} q_{k-1}} = \frac{r_k}{r_{k-1}} + \frac{q_k}{q_{k-1}} = [0;\ m_{k+1} \ldots] + [m_k;\ m_{k-1}, \ldots, m_1]$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Доказательство теоремы Гурвица-Бореля.

Мы должны показать, что бесчисленное множество подходящих дробей числа $\alpha = [0; m_1, m_2, \ldots]$ имеют коэффициенты качества, меньшие $\frac{1}{\sqrt{5}}$, то есть, что для бесконечно многих k имеют место неравенства $\mu_k < \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\frac{1}{\mu_k} > \sqrt{5}$. Воспользуемся теоремой 7.

Возможны три случая.

1°. Среди чисел $m_1, m_2, \ldots$ бесконечно много отличных от 1 и от 2. Этот случай — самый простой. Если $m_k > 2$, то $m_k \geqslant 3$ и $\frac{1}{\mu_k} = m_k + \frac{1}{m_{k+1} + \ldots} + \frac{1}{m_{k-1} + \ldots} > m_k \geqslant 3 > \sqrt{5}$.

2°. Среди чисел $m_1, m_2, \ldots$ лишь конечное число отличается от 1 и 2, но двоек бесконечно много. В этом случае для *бесконечно многих* k имеем: $m_k = 2$, $m_{k-1} \leqslant 2$, $m_{k+1} \leqslant 2$. Для таких k

$$\frac{1}{\mu_k} = m_k + [0; m_{k+1}, \ldots] + [0;\ m_{k-1}, \ldots] > 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt{5}.$$

3°. Начиная с некоторого, все неполные частные равны 1. Пусть, скажем, $m_{k_0} > 1$ и $m_k = 1$ при $k > k_0$. Если разность $k - k_0$ четна, то

$$\frac{1}{\mu_k} = 1 + [0;\ 1,\ 1, \ldots\ 1,\ m_{k_0}, \ldots] > 1 + 2\,[0;\ 1,\ 1, \ldots] = 1 + \frac{4}{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{5}$$

(мы воспользовались здесь тем, что, если k четно и $m'_{k+1} > m''_{k+1}$, то

$$[m_0;\ m_1, \ldots, m_k,\ m'_{k+1}, \ldots] > [m_0,\ m_1, \ldots, m_k,\ m''_{k+1}, \ldots]$$

и равенством $[1;\ 1,\ 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$).

Докажите эти факты самостоятельно).

Строго говоря, остался не рассмотренным случай, когда *все* неполные частные равны 1. В этом случае имеем

$$\frac{1}{\mu_k} = 1 + [0;\ 1,\ 1, \ldots] + [0;\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1]$$

и при четном k получаем

$$\frac{1}{\mu_k} < 1 + 2\,[0;\ 1,\ 1,\ \ldots] = \sqrt{5}$$

в силу свойств цепных дробей.

Во всех случаях доказано существование бесконечно многих приближений с коэффициентом качества, меньшим $1/\sqrt{5}$.

Ясно, что в то же время в случае 3° и только в этом случае число $\sqrt{5}$ нельзя увеличить. Строго говоря, в этом случае

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\mu_k} = \sqrt{5},$$

то есть при очень больших k число $1/\mu_k$ очень близко к $\sqrt{5}$.

Таким образом, все утверждения теоремы Гурвица — Бореля нами доказаны.

Фактически мы доказали даже больше. Ясно, что теорема 7 позволяет решать вопрос о наилучших приближениях *индивидуально* для каждого α. Например, если неполные частные данного числа α не равны все 1, начиная с некоторого номера, то есть если случай 3° не имеет места, то, как видно из нашего рассуждения, $\sqrt{5}$ можно заменить на $2^2/_3$ (а на самом деле даже на $2\sqrt{2}$; докажите). Из теоремы 7 следует, что

$$m_k < \frac{1}{\mu_k} < m_k + 2.$$

Отсюда видно, что если неполные частные числа α растут неограниченно, то число $\frac{1}{\mu_k}$ может быть сколь угодно велико, то есть число μ_k может быть сколь угодно мало, то есть для данного α существуют приближения со сколь угодно малым коэффициентом качества.

Если же числа m_k все меньше некоторого числа N, то коэффициент качества приближений этого числа не может быть меньше, чем $\frac{1}{N+2}$. Например, коэффициент качества рациональных приближений числа $\sqrt{2} = [1;\ 2,\ 2, \ldots]$ не может быть меньше $\frac{1}{4}$ (фактически наименьший коэффициент качества среди приближений числа $\sqrt{2}$ имеет дробь $\frac{3}{2}$; этот коэффициент равен $6 - 4\sqrt{2} \approx 0{,}34$).

Так удивительным образом оказывается, что «самые лучшие» иррациональные числа, как $\sqrt{2}$, приближаются рациональными числами хуже всего.

Поле тяжести сферически-однородного тела

И. И. Огиевецкий

Закон всемирного тяготения Ньютона равным образом определяет и падение яблок на землю, и движение Луны вокруг Земли, и орбиты планет. Он основывается на том, что сила притяжения между материальными точками с массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии l друг от друга, равна

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{l^2}, \qquad (1)$$

где $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{н \cdot м^2}{кг^2}$ — гравитационная постоянная (в системе СИ). Но Земля, Луна и другие реальные тела не точечны, они имеют конечные размеры. Как определить силу притяжения между протяженными телами?

Решение этой проблемы привело Ньютона к созданию важнейшей отрасли математики — интегрального исчисления. Чтобы найти силу притяжения материальной точки к протяженному телу, следует мысленно разбить это тело на маленькие (в пределе — бесконечно малые) части, вычислить вклад в силу притяжения от каждой из этих частей по формуле (1) и затем сложить (проинтегрировать) эти вклады. Небесные тела можно приближенно считать сферически-однородными, то есть такими, что в каждой данной точке их плотность целиком определяется расстоянием этой точки от центра тела. Ньютон обнаружил замечательный факт: сила притяжения между сферически-однородными телами с массами m_1 и m_2 определяется формулой (1), если под l понимать расстояние между их центрами, то есть они взаимодействуют так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах *).

Мы расскажем здесь, как доказать этот факт на основе элементарных и красивых геометрических соображений.

Сферически-однородное тело можно представить себе как совокупность вложенных друг в друга однородных сферических поверхностей. Для них имеют место два следующих утверждения.

1. Однородная сферическая поверхность радиуса R и плотности ρ притягивает точечную массу m, расположенную вне ее на расстоянии d от центра, с силой

$$F = \gamma \frac{4\pi R^2 \rho m}{d^2} = \gamma \frac{M \cdot m}{d^2}, \qquad (2)$$

где M — масса всей поверхности. Иными словами, сила притяжения вне сферической поверхности такая же, как если бы вся масса поверхности была сосредоточена в ее центре. Отсюда сразу же следует аналогичное утверждение для сферически-однородного тела.

---

*) Этим свойством часто пользуются как очевидным, без доказательства. Использовалось оно и в некоторых статьях «Кванта». Поэтому очень полезно понять, как оно доказывается.

2. Внутри однородной сферической поверхности сила притяжения всюду равна нулю.

При доказательстве мы будем существенно использовать понятие инверсии. Инверсией относительно окружности с центром O и радиусом R называют такое преобразование плоскости, при котором каждой точке Q на плоскости сопоставляется ее образ — точка $\bar{Q}$, лежащая на луче OQ, причем

$$OQ\cdot O\bar{Q}=R^2. \tag{3}$$

Точки Q и $\bar{Q}$ называются взаимно обратными. Аналогичным образом можно определить инверсию (в пространстве) относительно сферы с радиусом R.

Инверсия обладает многими замечательными свойствами и находит большое число красивых применений *). Нам понадобится только одно

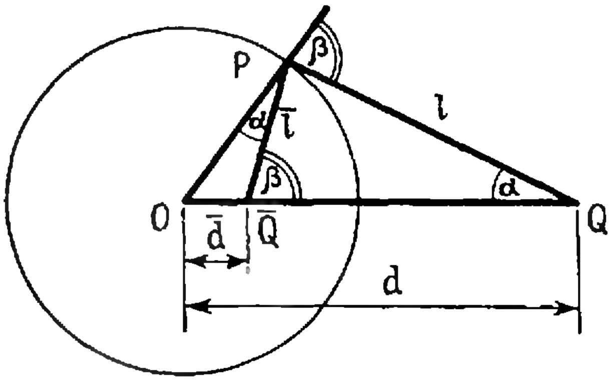


Рис. 1.

свойство. Пусть P — любая точка окружности, а Q и $\bar{Q}$ — точки, взаимно обратные относительно этой окружности (рис. 1). . Введем обозначения

$$OQ=d,\ O\bar{Q}=\bar{d},\ PQ=l,\ P\bar{Q}=\bar{l}.$$

Для наглядности нарисуем два треугольника OPQ и $O\bar{Q}P$ отдельно (рис. 2); легко видеть, что они подобны, так как они имеют общий угол в вершине O и прилегающие к ней стороны пропорциональны: из (3) следует, что $\frac{\bar{d}}{R}=\frac{R}{d}$.

Отсюда

$$\frac{\bar{l}}{l}=\frac{\bar{d}}{R}=\frac{R}{d}. \tag{4}$$

Иными словами, хотя сами длины отрезков l и $\bar{l}$ зависят от положения точки P на окружности, их отношение $\bar{l}/l$ постоянно и не зависит от выбора точки P на окружности.

Приступим теперь к доказательству утверждения 1. Пусть S — однородная сферическая поверхность плотности ρ и пусть точечная масса m находится в точке Q на расстоянии d от центра ($d>R$). Выделим бесконечно малый элемент поверхности ΔS вблизи некоторой точки P, и проведем плоскость через центр сферы O, точку P и точку Q (см. рис. 1).

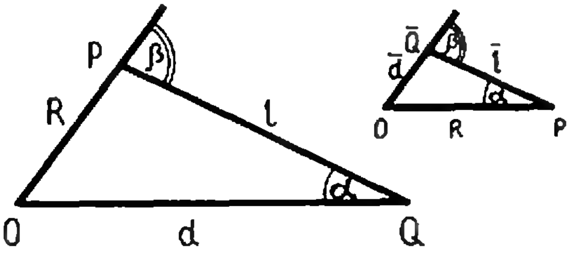


Рис. 2.

Согласно закону (1), элемент ΔS притягивает точечную массу m с силой

$$\Delta F=\gamma\frac{m\rho\,\Delta S}{l^2}. \tag{5}$$

Нам нужно сложить силы притяжения от всех элементов ΔS сферы. Из соображений симметрии ясно, что суммарная сила будет направлена вдоль луча OQ. Поэтому нас интересует только составляющая ΔF_{OQ}, равная

$$\Delta F_{OQ}=\gamma\frac{m\rho\,\Delta S\cos\alpha}{l^2}. \tag{6}$$

---

*) В «Кванте» № 8 за этот год была опубликована статья А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония». В ней рассказывалось о некоторых свойствах инверсии.

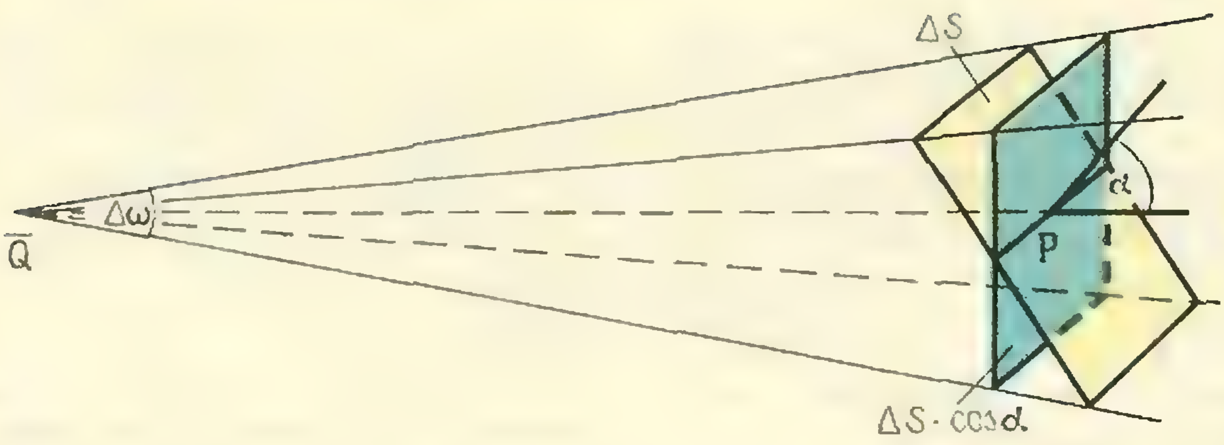


Рис. 3.

Привлечём теперь инверсию и заменим в (6) l на $\bar{l}\,\frac{d}{R}$ согласно (4):

$$\Delta F_{OQ} = \gamma\,\frac{m\rho R^2\cos\alpha\,\Delta S}{d^2\bar{l}^2} = \gamma\,\frac{m\rho R^2\,\Delta\omega}{d^2}, \qquad (7)$$

где введена величина

$$\Delta\omega = \frac{\cos\alpha\,\Delta S}{\bar{l}^2}.$$

Сделаем важное наблюдение. Заметим, что α есть также угол между нормалью (радиусом OP) к элементу поверхности ΔS и направлением $\bar{Q}P$ *), и $\cos\alpha$ положителен для любой точки P.

Легко убедиться поэтому, что $\Delta\omega$ — это телесный угол, под которым виден элемент поверхности ΔS из точки $\bar{Q}$.

Если ввести конус с вершиной в точке $\bar{Q}$ и образующими, обегающими контур ΔS, то телесный угол при вершине этого конуса как раз и будет $\Delta\omega$ (рис. 3).

Численно угол $\Delta\omega$ равен площади, которую высекает этот конус из сферы единичного радиуса с центром в точке $\bar{Q}$.

Полное притяжение всей поверхностью равно сумме вкладов от всех элементов ΔS:

$$F = \sum_S \Delta F_{OQ} = \gamma\,\frac{m\rho R^2}{d^2}\sum_S \Delta\omega = \gamma\,\frac{m\rho 4\pi R^2}{d^2} = \gamma\,\frac{mM}{d^2}, \qquad (8)$$

так как $\sum\limits_S \Delta\omega = 4\pi$ — полному телесному углу, под которым видна вся сфера из внутренней точки $\bar{Q}$, а $4\pi R^2\rho = M$ есть полная масса сферической поверхности. Тем самым утверждение 1 доказано.

Рассмотрим теперь материальную точку $\bar{Q}$ массы m внутри полой сферической поверхности. Снова из соображений симметрии очевидно, что сила, создаваемая сферической поверхностью в целом, может быть направлена только вдоль линии $O\bar{Q}$.

Поэтому нам нужно сложить составляющие силы $\Delta F_{O\bar{Q}}$ от элементов сферы ΔS, равные

$$\Delta F_{O\bar{Q}} = \gamma\,\frac{m\rho\Delta S\cos\beta}{\bar{l}^2} = \gamma\,\frac{m\rho R^2\Delta S\cos\beta}{\bar{d}^2 l^2}, \qquad (9)$$

если опять использовать прием с инверсией и заменить $\bar{l}$ на $l\,\frac{\bar{d}}{R}$ согласно соотношению (4).

Рассечем сферу S на две части $S_п$ и $S_л$ плоскостью, проходящей через точку $\bar{Q}$ перпендикулярно линии

---

*) Именно здесь и существенна операция инверсии. С ее помощью мы ввели в знаменатель (6) вместо расстояния l расстояние $\bar{l}$, благодаря чему в формуле возник телесный угол $\Delta\omega$.

$O\bar{Q}$ и образующей в пересечении со сферой диск (рис. 4). Очевидно, что части сферической поверхности $S_{п}$ и $S_{л}$, лежащие справа и слева от этого диска, будут притягивать материальную точку $\bar{Q}$ в разные стороны, направо и налево. Соответственно (см. рис. 4), $\cos\beta > 0$ для точек P из $S_{п}$ и $\cos\beta < 0$ для точек из $S_{л}$. Учтем теперь, что $\frac{\Delta S\,|\cos\beta|}{l^2} = \Delta\omega$ — телесному углу, под которым виден элемент ΔS из точки Q*).

Складывая силы $\Delta F_{O\bar{Q}}$, находим полную силу

$$F = \sum_{S} \Delta F_{O\bar{Q}} = \frac{\gamma m \rho R^2}{\bar{d}^2}\left(\sum_{S_{п}} \Delta\omega - \sum_{S_{л}} \Delta\omega\right), \tag{10}$$

где суммы распространены, соответственно, на части поверхности $S_{п}$ и $S_{л}$. Но $\sum\limits_{S_{п}} \Delta\omega = \sum\limits_{S_{л}} \Delta\omega = \omega_D$ — телесному углу, под которым диск D виден из точки Q. В самом деле (см. рис. 4), для конуса с вершиной

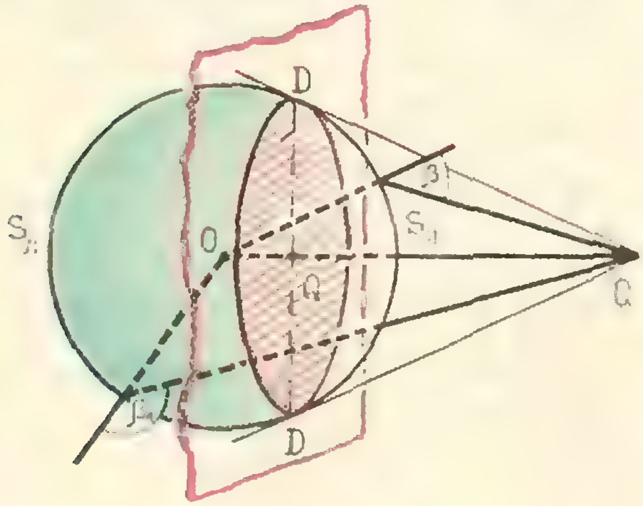


Рис. 4.

Q, образованного касательными к сфере S, линия касания есть как раз окружность D (проверьте это). Таким образом,

$$F = 0 \tag{11}$$

для любой точки $\bar{Q}$, лежащей внутри S. Доказательство утверждения 2 завершено, внутри однородной сферической поверхности сила тяготения действительно обращается в нуль.

Весьма примечательно, что Ньютон придавал очень большое значение доказанным выше предположениям о гравитационных свойствах протяженных сферически-однородных тел и поверхностей. Только после доказательства этих предположений Ньютон опубликовал полученный им на много лет ранее вывод законов движения планет Кеплера из формулы (1) для точечных тел (см. Дж. Орир, «Популярная физика», Москва, 1964 г., стр. 87—98).

Упражнения

1. Замечательным свойством математических методов является то, что одна и та же «математическая модель» может описывать факты из совершенно, казалось бы, далеких друг от друга областей физики. Пользуясь тем, что закон Кулона, описывающий взаимодействие двух точечных электрических зарядов, математически записывается так же, как и гравитационный закон Ньютона, сформулируйте «электростатические аналоги» предположений 1 и 2.

2. Докажите, что сила притяжения точечной массы однородной неограниченной пластинкой обратно пропорциональна расстоянию этой массы от пластинки.

3. Найдите силу притяжения, оказываемого однородной материальной полусферой на точечную массу, расположенную на прямой, соединяющей центр сферы с ее полюсом.

4. В воображаемом плоском мире Хинтона (см. «Квант» № 4, 1970) сила взаимодействия точечных масс обратно пропорциональна расстоянию между ними. Имея в виду, что «сферами» плоского мира являются окружности, сформулируйте и докажите для мира Хинтона предложения, аналогичные предложениям 1 и 2. Покажите, что сила притяжения, которую испытывает воображаемый житель одной из планет хинтоновской системы, пропорциональна расстоянию жителя от центра планеты. В случае, если в системе имеются кольцеобразные планеты, то во внутренности кольца гравитационное поле отсутствует (предполагается, что планеты состоят из однородной материи).

---

*) Как и для точки вне сферы, при вычислении силы в точке внутри сферы мы обнаруживаем, что в формулу входит телесный угол, на этот раз для инвертированной точки, лежащей вне сферы.

«Неприводимый» случай

В. Г. Янкелевич

Наш читатель семиклассник Миша Балкин спрашивает: «Я увидел в справочнике формулу Кардано для решения кубичного уравнения $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}, \quad \text{где } D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Но мне кажется, что эту формулу не всегда можно использовать. Например, если мы хотим найти с помощью этой формулы корни уравнения $x^3-x=0$ ($p=-1$, $q=0$), то получим

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Это какие-то мнимые числа, а уравнение имеет три хороших корня: 0, 1 и -1. Как устранить это противоречие?»

Редакция считает, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Мы публикуем статью школьника 10 класса города Кустаная В. Г. Янкелевича, который рассказывает, как можно решать кубичные уравнения в том случае, когда в формуле Кардано получаются отрицательные числа под знаком квадратного корня.

Еще в XVI веке была найдена общая формула, позволяющая выразить решения уравнения третьей степени

$$x^3+px^2+qx+r=0 \qquad (1)$$

через его коэффициенты с помощью арифметических операций и извлечения корней. Эту формулу (ее называют формулой дель Ферро или формулой Тартальи — Кардано) можно записать так:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{c}{54}+\sqrt{-\frac{D}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{54}-\sqrt{-\frac{D}{108}}}-\frac{p}{3}, \qquad (2)$$

где $c=2p^3-9pq+27r$; $D=p^2q^2-4q^3-4p^3r+18pqr-27r^2$. Позже, как только оформилось понятие комплексного числа, стало ясно, что эта формула позволяет получить все решения уравнения (1) с любыми (комплексными) коэффициентами p, q, r. Но, к сожалению, даже если все коэффициенты уравнения — обычные действительные числа, то для нахождения (даже действительных!) решений по формуле (2) приходится извлекать корни из комплексных чисел; эта трудность возникает, когда $D>0$ (это как раз тот случай, когда уравнение имеет три различных действительных корня).

Рассмотрим кубичное уравнение (1) с действительным и положительным дискриминантом D *).

Мы покажем, что любое уравнение (1) можно свести к уравнению вида

$$ay^3-3by^2-3ay+b=0, \qquad (3)$$

где a и b — действительные числа и $a\neq 0$.

Сначала докажем, что уравнение (3) имеет корни

$$y_1=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2=\operatorname{tg}\frac{\varphi+2\pi}{3}, \qquad (4)$$

$$y_3=\operatorname{tg}\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

---

*) D называется дискриминантом многочлена x^3+px^2+qx+r. Можно показать, что $D=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (1). Если коэффициенты p, q, r действительны и $D<0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня и один действительный, который сразу находится по формуле (2).

где φ определяется из условий

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(можно считать, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; тогда φ определяется однозначно). Для доказательства достаточно воспользоваться формулой

$$\frac{\operatorname{tg}^3\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

проверку которой мы предоставляем читателю. Теперь покажем, как уравнение (1) привести к виду (3). Положим $x = my + n$; уравнение (1) примет вид

$$m^3y^3 + m^2(3n+p)y^2 + m(3n^2+2pn+q)y + (n^3+pn^2+qn+r) = 0,$$

где m и n — произвольные параметры. Нам надо подобрать значения a, b, m и n так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} m^3 = a, \\ m^2(3n+p) = -3b, \\ m(3n^2+2pn+q) = -3a, \\ n^3+pn^2+qn+r = b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(p^2-3q)n = 9r - pq, \\ 3m^2 = -(3n^2+2pn+q), \\ a = m^3, \\ b = n^3+pn^2+qn+r. \end{cases}$$

Заметим, что если

$$D = -4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 - 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 > 0,$$

то

$$q - \frac{p^2}{3} < 0,$$

то есть $p^2 - 3q > 0$, и поэтому можно положить

$$n = \frac{9r - pq}{2(p^2-3q)},$$

$$m = \pm\sqrt{-\frac{3n^2+2pn+q}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3D}}{2(3q-p^2)}$$

(m мы выбираем с произвольным знаком),

$$a = m^3, \quad b = n^3 + pn^2 + qn + r.$$

Итак, мы показали, как от общего уравнения (1) перейти к уравнению (3), решив которое, мы сможем найти корни из соотношения

$$x = my + n.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 8 = 0. \qquad (5)$$

Из приведенных выше вычислений следует, что уравнение (5) с помощью преобразования $x = y - 3$ приводится к виду

$$y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0. \qquad (6)$$

Здесь $a = 1$, $b = 1$, следовательно,

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Корнями уравнения (6) будут:

$$y_1 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y_2 = \operatorname{tg}\frac{\varphi+2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1,$$

$$y_3 = \operatorname{tg}\frac{\varphi+4\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{17\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Теперь из соотношения $x = y - 3$ находим корни уравнения (5)

$$x_1 = -1 - \sqrt{3}, \; x_2 = -4, \; x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Упражнение

Проверьте, что для уравнения $x^3 + px + q = 0$ можно получить интересную формулу:

$$x = 4r\sin^3\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - \frac{q}{p}, \text{ где}$$

$$k = 0,\ 1,\ 2; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$b = -\frac{q}{p}, \quad a = \sqrt{-b^2 - \frac{4p}{27}}.$$

Демонстрация орбит тел, движущихся под действием центрального притяжения

Р. Вуд

В прошлом номере нашего журнала была напечатана статья замечательного американского физика Р. Вуда об искусственных миражах и смерчах. Ниже мы помещаем еще одну статью Вуда, посвященную исследованию орбит тел в центральном поле. Эта статья была опубликована в журнале «Physical Review» за 1897 год.

После того как Вуд опубликовал статью о лабораторной демонстрации орбит планет и комет вокруг Солнца при помощи стального шарика и электромагнита, в журнале «Nature» было опубликовано письмо профессора лондонского университета, в котором утверждалось, что данный опыт не демонстрирует орбиты в гравитационном поле, так как сила притяжения шарика магнитом изменяется обратно пропорционально пятой степени, а не квадрату расстояния, как в случае тяготения.

Вуд взялся за работу всерьез, начертил детальную диаграмму и понял, что шарик пересекает магнитные линии под углом и что его орбита зависит только от горизонтальной составляющей напряженности. После тщательных измерений напряженности магнитного поля в плоскости стекла оказалось, что она почти точно обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Тем временем критические отклики появились в нескольких других английских технических журналах, и Вуд с удовольствием послал подтверждение правильности своего опыта, приведя результаты измерений.

До сих пор не было сделано попыток показать в лабораторных условиях движение тел по эллиптической, параболической и гиперболической орбитам под действием центральной притягивающей силы, величина которой менялась бы обратно пропорционально квадрату расстояния. Я провел несколько опытов, исследуя движение маленького стального шарика вокруг магнитного полюса. Опыты дали хорошие результаты, и я считаю, что они могут быть полезны при чтении лекций.

Устройство для демонстрации очень несложно. Оно состоит из стеклянного диска диаметром около 40 *см*, с маленьким отверстием в центре. В это отверстие пропущен конусообразный конец большого электромагнита. Поверхность диска покрывается копотью (рис. 1). Нужно постараться как можно более точно придать пластине горизонтальное положение, а оси магнита — вертикальное.

Маленький стальной полированный шарик около 5 *мм* диаметром (например, из подшипника от велосипеда), пущенный на пластину, проделывает некоторый путь по ее закопченной поверхности и оставляет ясный след.

В данных условиях сила тяжести не оказывает существенного влияния на движение, и мы можем учитывать лишь начальную скорость и центральную притягивающую силу, а также потери скорости из-за трения.

Шарик с различными начальными скоростями вылетает из короткой стеклянной трубки на уровне плоскости пластины. При этом получаются траектории, довольно удачно имитирующие эллипс, параболу и гиперболу.

На рисунке 2 помещена фотография пластины, на которой видны все три вида орбит; пятно в центре — это отверстие, занимаемое магнитным полюсом; стрелки показывают направление движения.

Траектория *1* соответствует малой начальной скорости, при которой орбита очень близка к эллипсу с источником притягивающей силы в одном из фокусов. Потеря скорости из-за трения заставляет шарик «падать на Солнце» после того как он совершил один оборот, то есть за «год» существования системы.

В другом опыте был получен эллипс (строго говоря, спираль), почти замыкающийся; отклонение траектории составляло не более 2 *мм*, в то время как в опыте, показанном на данном рисунке, оно почти достигало сантиметра.

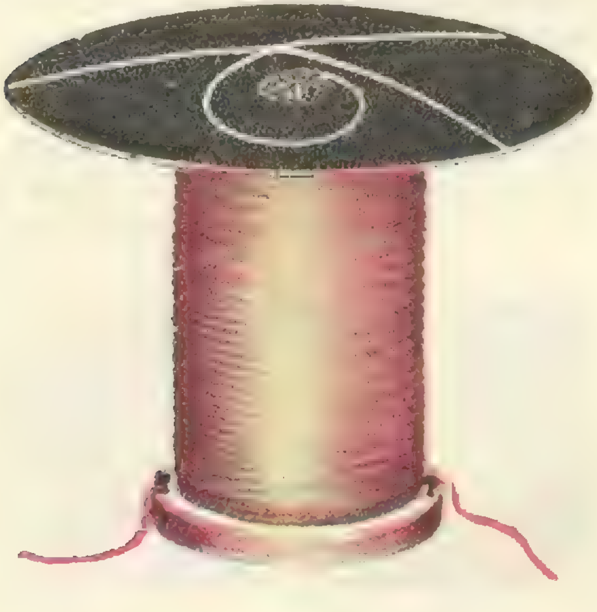


Рис. 1.

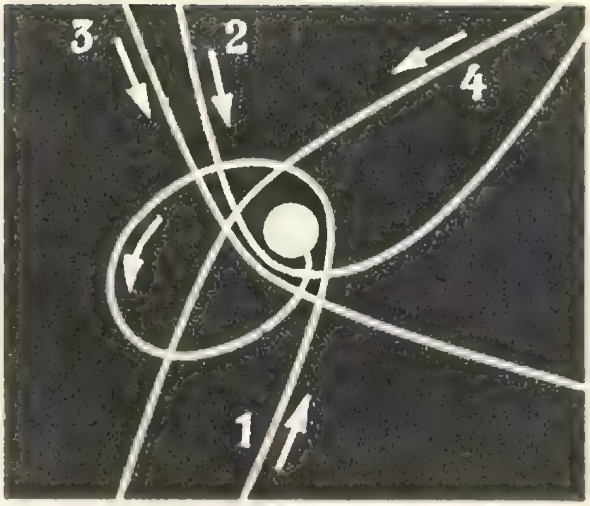


Рис. 2.

Правая ветвь кривой с индексом *2* напоминает параболу и возникает при несколько более высокой начальной скорости. Отметим, что шарик движется к перигею по траектории, очень напоминающей гиперболу. Однако, как только он минует полюс, скорость шарика несколько падает, выводя его на параболу. Может быть, более правильно называть эту кривую эллипсом с очень большим эксцентриситетом, поскольку условия образования параболической орбиты трудно обеспечить приближенно.

Траектории *3* и *4* соответствуют гиперболам с еще более высокими начальными скоростями.

Траектории, показанные на рисунке 2, далеко не лучшие из полученных на пластинках. Очень трудно воспроизвести на одной пластинке все три типа кривых, поскольку необходимо ограничиться всего лишь четырьмя-пятью запусками, а для получения кривой определенного типа скорость надо тщательно устанавливать. Если провести серию опытов, можно получить значительно лучшие образцы.

Конечно, легче всего воспроизвести гиперболу, а труднее всего — параболу.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М111. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34. (Можно считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.)

Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Г. В. Розенблюм

М112. В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Доказать, что осталось не меньше, чем $(n+m-1)$ чисел.

М113. Доказать, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

Б. М. Ивлев

М114. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Доказать, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

В. Б. Алексеев

М115. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

Г. А. Гальперин

Ф118. На рисунке 1 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно измерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме?

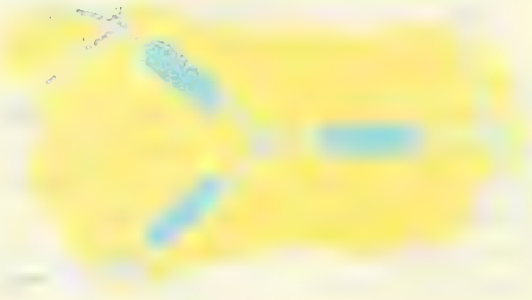


Рис. 1.

А. Р. Зильберман

Ф119. Свет от источника S по пути к экрану проходит через покоящийся стеклянный кубик с ребром l (рис. 2). На сколько быстрее свет

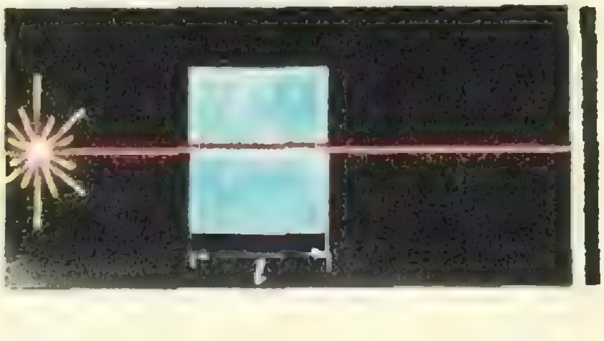


Рис. 2.

дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью v? Скорость света в воздухе c, показатель преломления стекла n ($v \ll c$, $n \gg 1$).

Г. В. Меледин

Ф120. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V. Давление газов в полости пренебрежимо мало́. Поршень оказывает на воду постоянное давление P. Какую кинетическую энергию приобретет вода в момент, когда полость исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать.

Г. Л. Коткин

Ф121. Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим магдебургские полушария» (полусферы) с радиусом $R = 20$ *см* (рис. 3). Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F. Атмосферное давление равно 1 *атм*.

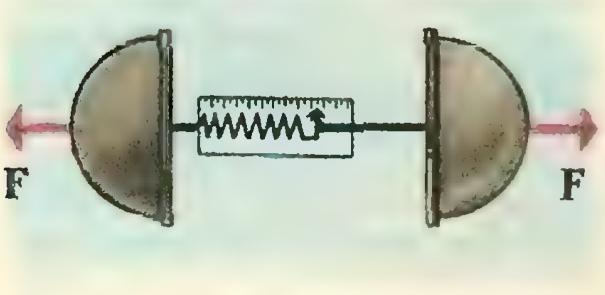


Рис. 3.

Ф122. В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик?

Поправка

В «Кванте» №8 за 1971 г. на стр. 3 по вине редакции ошибочно помещен «портрет с бронзовой медали Евклида». В действительности, изображения математика Евклида до нашего времени не дошли. Помещенное изображение, по всей видимости, является портретом философа Евклида из Мегары.

Найдите ошибку

Как известно, точкой, сумма расстояний от которой до вершин данного четырехугольника минимальна,

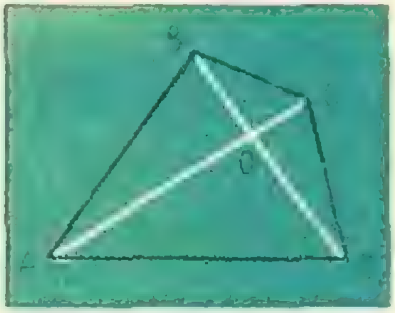


Рис. 1.

является точка пересечения его диагоналей (рис. 1). Будем уменьшать одну из сторон четырехугольника, например, BC (рис. 2), пока сторона BC

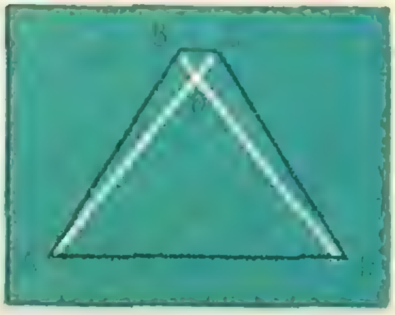


Рис. 2.

не превратится в точку. При этом точка O будет приближаться к BC и на рисунке 3 сольется с ней.

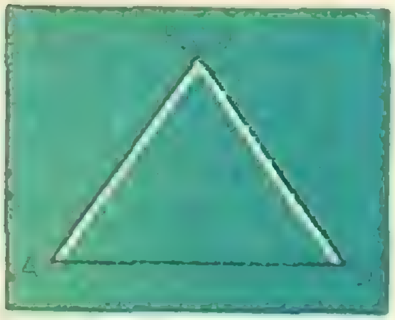
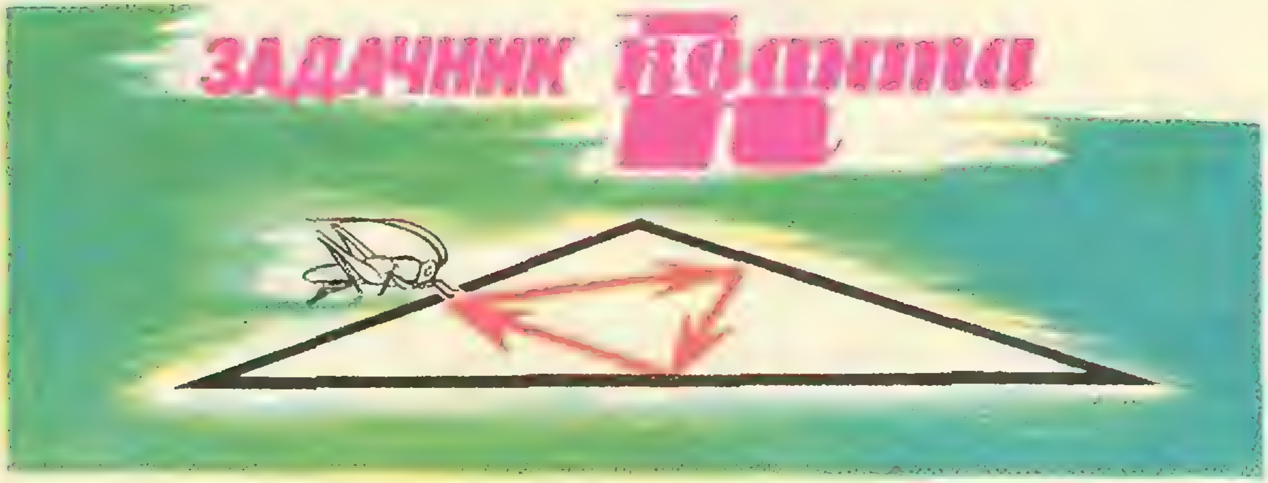


Рис. 3.

Значит, точкой, сумма расстояний от которой до вершин данного треугольника минимальна, является одна из его вершин. Но есть теорема, утверждающая, что такой точкой является точка, из которой все три стороны треугольника видны под углом 120°, а не одна из вершин.

Где же ошибка?

А. Скоблин



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М70—М73

М70

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — несколько прямых на плоскости, среди которых есть две пересекающиеся. Докажите, что можно и притом единственным способом выбрать на каждой из этих прямых по точке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ так, чтобы перпендикуляр, восставленный в точке X_i к прямой l_i, проходил через точку X_{i+1} (для всех $i=1, 2, \ldots, n-1$), и перпендикуляр, восставленный к l_n в точке X_n, проходил через точку X_1.

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Эту задачу можно сформулировать еще следующим образом. Пусть p_i — отображение, которое каждой точке M (на плоскости) ставит в соответствие ее проекцию на прямую l_i, то есть $p_i(M)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l_i. Требуется доказать, что на прямой l_1 существует единственная точка X_1 такая, которая после n отображений

$$X_1 \xrightarrow{p_n} X_n \xrightarrow{p_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \cdots \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_1} X_1$$

переходит в себя.

Для произвольной точки X прямой l_1 обозначим через $f(X)$ ту точку на прямой l_1, в которую переходит X после n отображений $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ (рис. 1); это записывается так:

$$f=p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n.$$

Выберем на каждой из наших прямых l_i начало отсчета и направление, то есть превратим каждую из них в числовую ось (единицу масштаба мы выбираем на всех прямых одинаковой). (Мы отождествляем точку (на прямой) и соответствующее ей число — ее координату — так, что отображения $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и f можем считать теперь функциями, которые

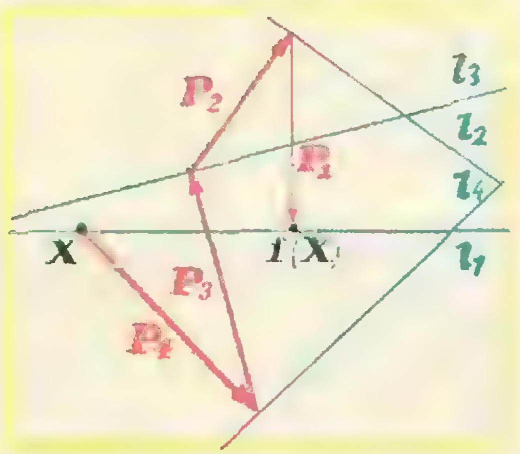


Рис. 1. Отображение $f: x \to f(x)$ называется *произведением* отображений p_4, p_3, p_2, p_1.

каждому числу ставят в соответствие новое число.)

Докажем, что отображение f — линейное: $f(x) = ax + b$.

Для этого достаточно доказать три следующие почти очевидные утверждения.

(1) Если l и l' — две прямые и $p: l \to l'$ — отображение, сопоставляющее каждой точке ее проекцию на l', то p — линейное отображение.

(2) Если p_1 и p_2 — линейные отображения, то $p_1 \circ p_2$ — тоже.

(3) Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — линейные отображения, то $f = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ — тоже линейное отображение.

Ясно, что (3) выводится из (2) с помощью индукции. Проверка (2): если $p_1(x) = a_1x + b_1$ и $p_2(x) = a_2x + b_2$, то $(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$. Для доказательства (1) проверьте такую формулу:

$$p(x) = x\cos\alpha + c,$$

где α — угол между положительными направлениями осей Ox и $O'x'$, c — координата точки $p(O)$ в системе Ox' (рис. 2; рассмотрите также случай, когда прямые l и l_1 параллельны).

Теперь для решения задачи достаточно показать, что линейное уравнение $x = ax + b$ имеет решение и притом только одно. Если это не так (то есть, если решений нет или больше одного), то $a = 1$. Докажем, что этого не может быть. Заметим, что при каждом проектировании p_k: $l_{k+1} \to l_k$ расстояние между любыми двумя точками не увеличивается:

$$|p_k(x) - p_k(x')| \leqslant |x - x'|,$$

а если прямые l_{k+1} и l_k не параллельны, то строго уменьшается. Отсюда следует, что для любых двух точек x и x'

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Но если $a = 1$, то есть, если $f(x) = x + b$, то f сохраняет расстояния между любыми двумя точками (просто сдвигает их все на расстояние b). Получили противоречие. Доказательство закончено.

Задача **М70** и наше решение без всяких изменений переносятся на тот случай, когда прямые расположены не на плоскости, а в пространстве (среди них могут быть и скрещивающиеся). При этом p_k означает проектирование на прямую l_k в пространстве: отображение, которое ставит в соответствие каждой точке основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую l_k.

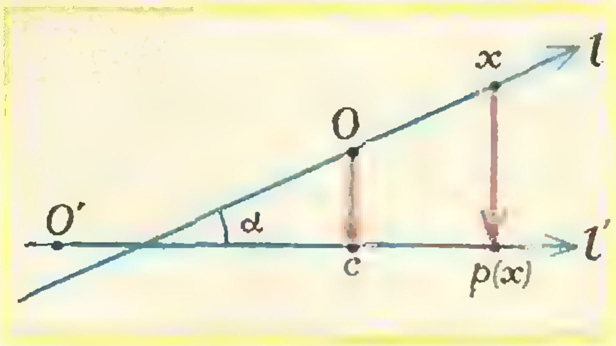


Рис. 2. Отображение, которое каждой точке одной прямой ставит в соответствие ее проекцию на другую прямую, записывается линейной функцией.

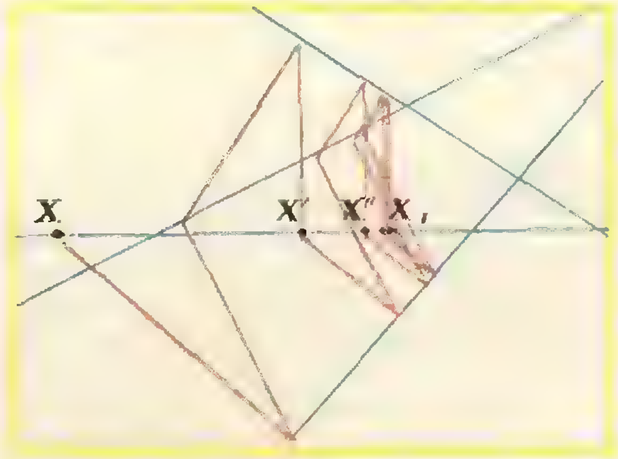


Рис. 3. Точку X_1, для которой $f(X_1) = X_1$, практически легко найти методом *последовательных приближений*: начав с произвольной точки X, опускаем перпендикуляры на данные прямые и находим последовательно после каждого «цикла» точки $X' = f(X)$ $X'' = f(X')$ и так далее. Нетрудно доказать, что расстояния $|X - X_1|$, $|X' - X_1|$, $|X'' - X_1|$, ... образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $|a| < 1$, так что, повторив построение несколько раз, мы можем найти положение точки X_1 с любой желаемой точностью. Подобный метод очень часто используется для отыскания решений уравнений вида $f(X) = X$; он применим тогда, когда функция f уменьшает расстояние между любыми двумя точками. В нашем случае, когда f — линейная функция, разумеется, решение уравнения $f(X) = X$ можно найти точно (подумайте, как найти точку X_1, если известны X, X' и X'').

Есть и другая возможность обобщения: рассматривать вместо прямых плоскости. Можно доказать, например, такой факт: если даны n плоскостей в пространстве, среди которых есть три пересекающиеся в одной точке, то можно и притом единственным образом выбрать на каждой из этих плоскостей по точке X_k ($k = 1, \ldots, n$) так, чтобы перпендикуляр, восставленный в точке X_k к соответствующей плоскости, проходил через точку X_{k+1} (причем $X_{n+1} = X_1$). Теперь уже $f = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ будет линейным отображением плоскости на плоскость и в координатах будет записываться так: $f(x, y) = (x', y')$, где $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$.

Докажите, что если система уравнений

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y + c_1, \\ y = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

не имеет решений или имеет больше одного решения (это бывает, если $(a_1-1)(b_2-1) - a_2b_1 = 0$), то система $x = a_1x + b_1y$, $y = a_2x + b_2y$ имеет решение (x_0, y_0), отличное от $(0,0)$, и что отображение f не меняет расстояния между точками $(0,0)$ и (x_0, y_0), чего в нашей задаче быть не может.

Наиболее полные решения задачи прислали *Ф. Шмидель* из Москвы, *Ю. Оболонков* из Воронежа, *М. Розов* из Минска.

M71

Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания.

Подумайте, что будет, если действовать в другом порядке — в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — строках, получится ли в результате та же самая таблица, что и в первом случае или другая?

Рассмотрим таблицу, у которой в каждой строке числа стоят в порядке возрастания, и докажем, что, если $l < r$, то наибольшее число r-го столбца (обозначим его через b) не меньше наибольшего числа l-го столбца (обозначим его через a). Действительно, число, стоящее на пересечении той строки, где стоит a, и r-го столбца, не меньше a (потому что в строке числа идут в порядке возрастания).

Аналогично можно доказать, что k-е по величине (считая от наибольшего) число в r-столбце (b_k) не меньше k-го по величине числа в l-м столбце (a_k). Действительно (рис. 4), в l-м столбце имеется k чисел, не меньших a_k, следовательно, в тех же строках в r-м столбце имеется k чисел, не меньших a_k, поэтому $b_k \geqslant a_k$. Отсюда следует, что если переставить числа по столбцам в порядке возрастания, то k-е число в r-м столбце будет не меньше k-го числа в l-м столбце для любых $l < r$, то есть что в k-й строке числа идут в порядке возрастания. Утверждение задачи доказано.

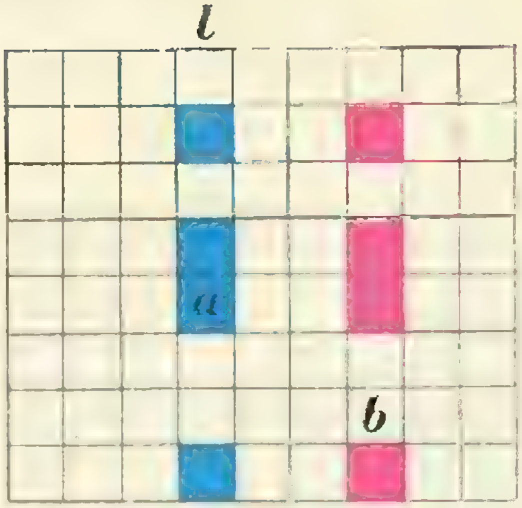


Рис. 4. Если числа в голубых клетках не меньше a, то числа в розовых клетках тоже не меньше a.

В зависимости от того, как переставлять числа (сначала по столбцам или сначала по строкам), могут полу-

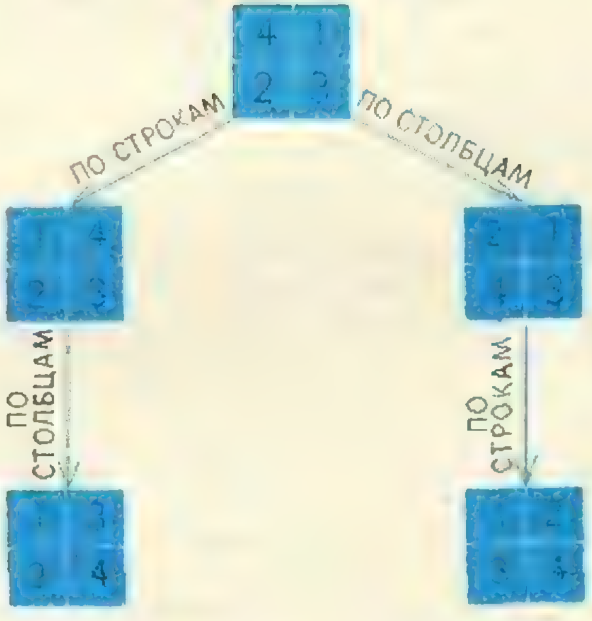


Рис. 5.

читься разные таблицы. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести пример (рис. 5).

Правильно решили задачу *Р. Аюпов, А. Бревдо, Л. Брагинский, Г. Высоцкая, С. Григорян, А. Гордиенко, И. Джаббаров, А. Клеин, А. Кмижнерман, И. Кочубеевский, Г. Левин, М. Прегер, Е. Скрыт, А. Слинкин, А. Черняк* и другие. Кроме решений, близких к нашему много и других, в которых проводится индукция; в некоторых работах доказано, что можно осуществлять перестановки последовательно в каждом столбце так, что при этом все время числа будут стоять по строкам в порядке возрастания.

Н. Б. Васильев

М72

Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p, \qquad (1)$$

где p — произвольное вещественное число.

Наивная попытка решения: возведем обе части уравнения в куб

$$2+3\sqrt[3]{1-x^2}\left(\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}\right)=p^3 \qquad (2)$$

и подставим сюда первоначальное равенство (1):

$$2+3p\sqrt[3]{1-x^2}=p^3. \qquad (3)$$

Теперь легко найти x:

$$x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{p^3-2}{3p}\right)^3}\,. \qquad (4)$$

Нам было прислано много писем, где получен (этим и другими способами) этот ответ. Немало было и таких писем, в которых было верно найдено множество значений p, при которых формула (4) имеет смысл:

$$p=-1,\quad 0<p\leqslant 2.$$

Некоторые заметили даже, что значения $p=-1$ надо отбросить, так как значение $x=0$, даваемое формулой при этом p, не подходит. Но при этом не было доказано, что при всех p, $0<p\leqslant 2$ значения x, даваемые формулой (4), являются решениями. (Обычно таким доказательством служит проверка, но тут ее проделать очень сложно.) А это надо доказывать, так как не все преобразования, проделанные выше, сохраняют равносильность: уравнение (2) не эквивалентно (3). Чтобы убедиться в этом, подставьте $x=0$, $p=-1$ в (2) и (3). Равенство (3) обратится в тождество, а (2) — нет. Поэтому утверждения, встречавшиеся в письмах, что это преобразование эквивалентно, неверны. (В самом деле: попробуйте из (3) вывести (2). Вам придется использовать равенство (1), условие задачи, а этого нельзя делать, так как именно его и надо доказать.) Раз так, то и другие корни могут оказаться посторонними.

Разберем более детально преобразования, которые мы проделали с уравнением. Обозначим для краткости $\sqrt[3]{1-x}=u$ и $\sqrt[3]{1+x}=v$.

От уравнения

$$u+v=p$$

мы перешли к уравнению

$$u^3+v^3+3uv(u+v)=p^3 \qquad (2)$$

с помощью эквивалентного преобразования (возвышения обеих частей в куб). Следующий шаг, который мы хотим сделать,— подставить p вместо $u+v$ и перейти к уравнению

$$u^3+v^3+3uvp=p^3, \qquad (3)$$

которое мы запишем так:

$$u^3+v^3-p^3+3uvp=0,$$

$$(u+v)^3-p^3-3uv\,(u+v-p)=0.$$

Применим формулу для разности двух кубов и затем вынесем $(u+v-p)$ за скобку:

$$(u+v-p)\,(u^2+v^2+p^2+up+pv-uv)=0. \qquad (3')$$

Итак, нам удалось записать уравнение (3) в таком виде (3′), по которому уже нетрудно изучить, почему оно не равносильно (2). Ясно, что левая часть (3′) равна нулю, когда хоть одна скобка равна нулю:

1) $u+v-p=0$,
2) $u^2+v^2+p^2+up+pv-uv=0.$

Первое равенство — это наше исходное уравнение. Значит, все посторонние решения связаны со вторым и надо выяснить, когда оно выполняется. Умножив его на 2, можно записать его так:

$$(u+p)^2+(v+p)^2+(u-v)^2=0.$$

Это равенство выполняется только при $u=v=-p$.

В применении к нашему уравнению:

$$\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-p.$$

Значит, $x=0$ при $p=-1$ — единственный посторонний корень. Все остальные корни, даваемые формулой (4), при $0<p\leqslant 2$ удовлетворяют уравнению (1).

Выпишем еще раз тождества, которые мы попутно установили (для симметрии мы заменим p на $-w$):

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)\,(u^2+v^2+w^2-uw-vw-uv),$$

$$2\,(u^2+v^2+w^2-uw-vw-uv)=(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2.$$

Они часто бывают полезны при доказательстве неравенств и в других задачах.

M73

На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причем все такие возможности мы считаем равновероятными), окажется, что угаданы ровно 4 клетки? 5 клеток?... все 8 клеток?

Как известно, 8 клеток из 64 могут быть выбраны $C_{64}^8=\frac{64!}{8!56!}$ способами ($n!$ — произведение всех целых чисел от 1 до n включительно) *). Все эти способы равновероятны. Следовательно, вероятность того, что выпадет какой-то один определенный способ, равна $1/C_{64}^8$. Теперь надо подсчитать, во скольких случаях оказались угаданными ровно k клеток ($0\leqslant k\leqslant 8$). Число таких случаев равно числу способов, при которых выбираются k клеток из 8 отмеченных и $8-k$ клеток из 56 неотмеченных. Поэтому оно равно $C_8^k\cdot C_{56}^{8-k}$. Чтобы найти искомую вероятность f_k — вероятность угадать ровно k клеток, надо умножить вероятность одного способа на это число. Получим

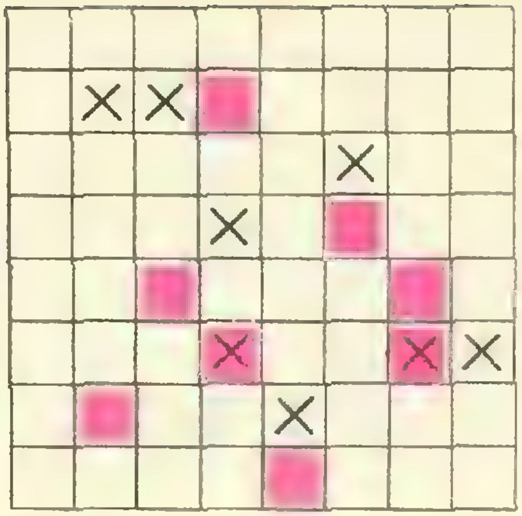


Рис. 6. Красные клетки — выигравшие; выбранные нами 8 клеток отмечены крестом. На этом рисунке $k=2$, $8-k=6$.

$$f_k=\frac{C_8^k\cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8}.$$

Таким образом, вероятности угадать 0, 1, ..., 8 клеток равны соответственно

$$f_0=\frac{C_8^0\cdot C_{56}^8}{C_{64}^8},$$

$$f_1=\frac{C_8^1\cdot C_{56}^7}{C_{64}^8},\quad \ldots,\quad f_8=\frac{C_8^8\cdot C_{56}^0}{C_{64}^8}.\qquad (1)$$

Сумма этих девяти чисел, конечно, равна единице.

Формально задача решена, но с практической точки зрения это еще не ответ. Хотелось бы представить себе, насколько велики шансы угадать то или иное число клеток, если мы купим и заполним, скажем, десять лотерейных билетов. Для этого надо приближенно представить эти числа в виде десятичных дробей. С помощью логарифмической линейки это можно сделать, пользуясь, например, прямо формулами (1). Так поступил *А. Злотник* из г. Жуковского. Мы опишем другой, как нам кажется, более простой способ.

---

*) См., например, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте» № 1, 1971 г.

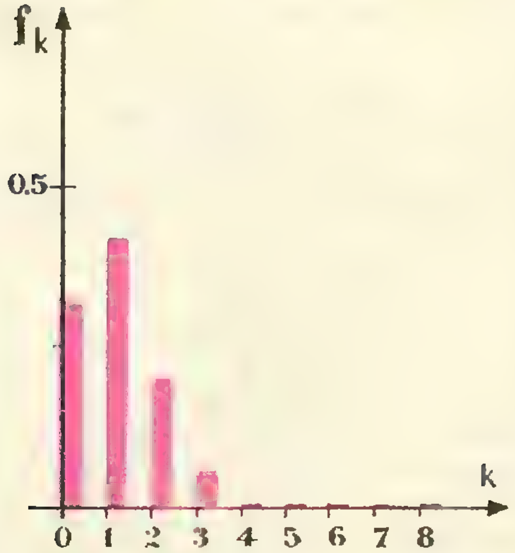


Рис. 7. Здесь показаны числа f_k — вероятности угадать k клеток ($k = 0, 1, 2, \ldots, 8$). При $k \geqslant 4$ величина f_k очень близка к нулю.

Сначала вычислим отношение $(k+1)$-го из этих чисел к k-му:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{C_8^{k+1} \cdot C_{56}^{8-k-1}}{C_{64}^8} : \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8} =$$

$$= \frac{(8-k)^2}{(k+1)(48+k+1)};$$

в частности,

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{64}{49} \approx 1{,}31; \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{49}{100};$$

$$\frac{f_3}{f_2} = \frac{12}{51} \approx 0{,}235; \quad \frac{f_4}{f_3} = \frac{25}{208} \approx 0{,}12;$$

$$\frac{f_5}{f_4} \approx 0{,}06; \ \ldots$$

Вычислим отношения f_2, f_3, f_4 к f_0 с двумя знаками после запятой:

$$\frac{f_2}{f_0} = 0{,}64; \quad \frac{f_3}{f_0} \approx 0{,}15; \quad \frac{f_4}{f_0} = 0{,}02.$$

Ясно, что $f_5/f_0 < 0{,}02 \cdot 0{,}12$ и при выбранной степени точности f_5, f_6, f_7, f_8 равны нулю. Мы можем составить уравнение

$$f_0(1+1{,}31+0{,}64+0{,}15+0{,}02)=1,$$

откуда $f_0 \approx 0{,}32$. Теперь находим f_1, f_2, f_3, f_4:

$$f_1 \approx f_0 \cdot 1{,}31 \approx 0{,}42; \quad f_2 \approx f_0 \cdot 0{,}64 \approx 0{,}20;$$

$$f_3 \approx f_2 \cdot 0{,}24 \approx 0{,}047; \quad f_4 \approx f_3 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}0056.$$

Таким образом, если вы заполните десять билетов, то среди них скорее всего все будут такие, на которых угадано 0, 1, 2 и, быть может, 3 клетки; вероятность угадать 4 и более клеток очень мала. Умножая f_4 на $\frac{f_5}{f_4} \approx 0{,}06$ и так далее, можно получить приближенные значения f_5, f_6, f_7, f_8. В частности, $f_8 \approx 2 \cdot 10^{-10}$. Это значит, что для того, чтобы иметь реальные шансы угадать все 8 клеток, надо заполнить несколько десятков миллиардов билетов.

С помощью приближенного метода расчета, который мы применили, можно показать, что если число N клеток на лотерейном билете много больше числа m клеток, которые нужно отмечать, а m достаточно велико, то вероятность угадать k клеток приблизительно равна

$$f_k = \frac{C_m^k C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m} \approx \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!},$$

где $\mu = \frac{m^2}{N-2m}$, а $e \approx 2{,}718\ldots$ — постоянное число (при этом нужно пользоваться тем, что $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$ для любого x).

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения задач Ф79—Ф82

Ф79

Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить полено?

При опускании полена в лодку лодка погрузится в озеро, вытеснив дополнительно объем воды $\Delta V = \frac{m}{\rho}$ (m — масса полена, ρ — плотность воды). С другой стороны, так как полено плавает в воде, то уровень воды в лодке должен измениться точно так же, как изменился бы он при доливании в лодку воды массой, равной массе полена, и объемом, равным объему погруженной части полена, то есть $V = \frac{m}{\rho}$. (Мы можем мысленно убрать полено и заполнить получившуюся впадину водой — при этом уровень воды в лодке не изменится.) Такой же объем воды дополнительно вытесняет лодка при бросании в нее полена. Поэтому уровень воды в лодке будет совпадать с уровнем воды в озере, если толщина стенок лодки пренебрежимо мала, и будет немного выше уровня воды в озере, если стенки толстые.

Правильное решение прислали *Р. Хаснутдинов* (пос. Октябрьский БАССР), *А. Зисман* (Псков), *И. Вигдорович* (Симферополь), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл.), *В. Рудько* (Киев), *А. Старченко* (пос. Петропавловск Днепропетровской обл.), *А. Демидов* (Москва), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *Ф. Тухватуллин* (Ташкент), *Н. Шишкин* (Нальчик), *Н. Филиппов* (Ленинград), *Н. Сидоров* (Москва).

И. Ш. Слободецкий

Ф80

Вдоль наклонной плоскости под углом β к направлению спуска бросают кубик (рис. 8). Найти установившуюся скорость движения кубика, если коэффициент трения его о плоскость $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

На кубик действуют сила тяжести $P = mg$, сила нормальной реакции $N = mg\cos\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}}$ (рис. 8).

Рассмотрим составляющие сил вдоль плоскости. Вниз в сторону наибыстрейшего спуска (ось y) действует составляющая силы тяжести $F = mg\sin\alpha$; в сторону, противоположную скорости, действует сила трения $F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\alpha$. По условию, $k = \operatorname{tg}\alpha$, поэтому $F_{\text{тр}} = \operatorname{tg}\alpha \cdot mg\cos\alpha = mg\sin\alpha = F$.

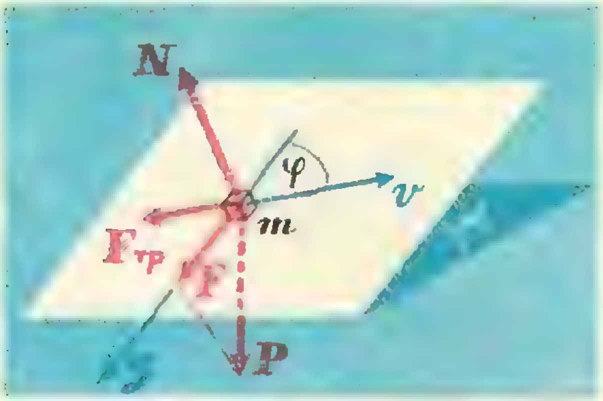


Рис. 8.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению движения кубика под действием двух одинаковых по величине сил. Одна из них направлена всегда против скорости кубика, другая — вдоль оси y.

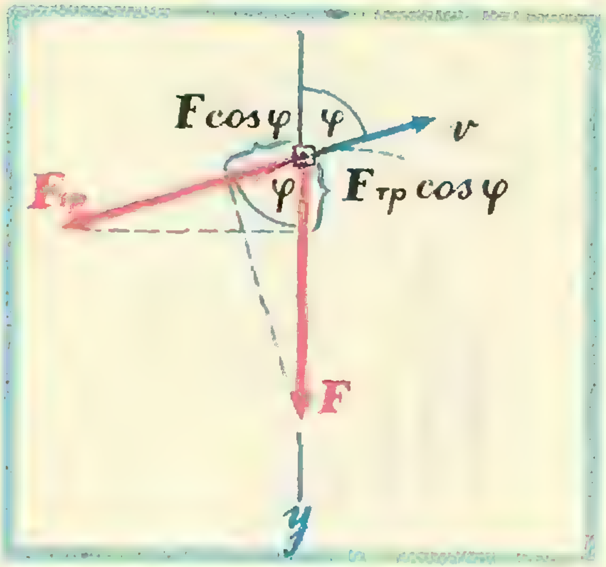


Рис. 9.

Пусть в некоторый момент скорость **v** составляет с осью y угол φ (рис. 9). Тангенциальное (направленное по касательной к траектории) ускорение a кубика определяется силой $F_{\text{тр}} = F$ и проекцией $F\cos\varphi$ силы F на то же направление:

$$a = \frac{F + F\cos\varphi}{m}.$$

Ускорение a_y (вдоль оси y) определяется силой F и проекцией $F_{\text{тр}}\cos\varphi$ силы $F_{\text{тр}}$ на ось y. Легко видеть, что по величине это ускорение равно тангенциальному:

$$a_y = \frac{F + F_{\text{тр}}\cos\varphi}{m} = \frac{F + F\cos\varphi}{m} = a.$$

Таким образом, быстрота изменения величины полной скорости $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ и быстрота изменения величины составляющей скорости вдоль оси y $a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$ одинаковы. Но если быстрота изменения во времени двух каких-либо величин одинакова, то сами эти величины различаются лишь на постоянную, не зависящую от времени. Обозначим эту постоянную через V. Тогда в любой момент времени

$$v = v_y + V.$$

Найти константу V можно, подставив в эту формулу значения v и v_y

в начальный момент движения кубика ($v=v_0$, $v_y=v_0\cos\beta$):

$$v_0=v_0\cos\beta+V.$$

Отсюда

$$V=v_0(1-\cos\beta).$$

Следовательно,

$$v=v_y+v_0(1-\cos\beta),$$

где

$$v_y=v\cos\varphi.$$

По истечении достаточно длительного времени «поперечная» составляющая скорости кубика уменьшится до нуля. Кубик будет двигаться вниз вдоль оси y. В этом предельном состоянии $\varphi=\pi$, то есть $\cos\varphi=-1$; $v_y=-v$.

Для установившейся скорости v можно написать уравнение

$$v=-v+v_0(1-\cos\beta).$$

Отсюда

$$v=v_0\frac{1-\cos\beta}{2}=v_0\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Зная, что $a=a_y$, задачу можно решить также графически. Действительно, если изменение Δv величины полной скорости равно изменению Δv_y, то легко найти величину и направление вектора **v** в любой момент времени.

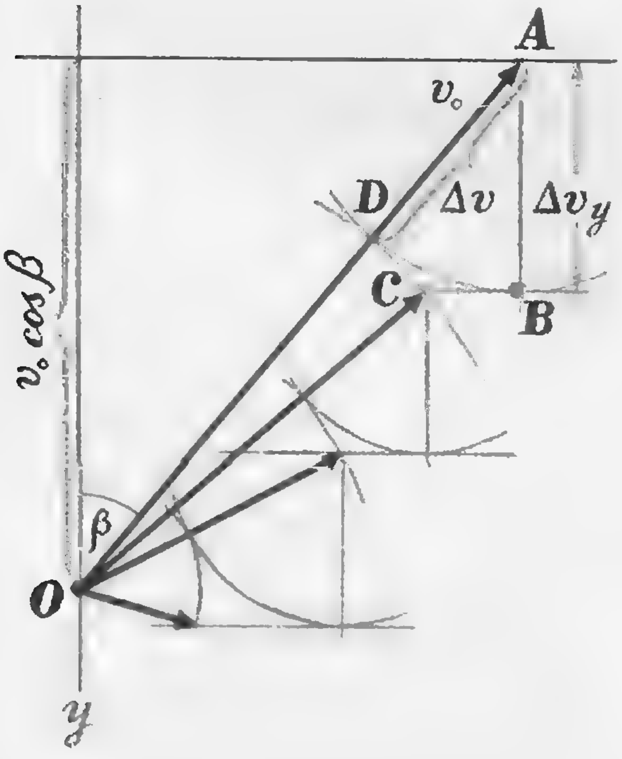


Рис. 10.

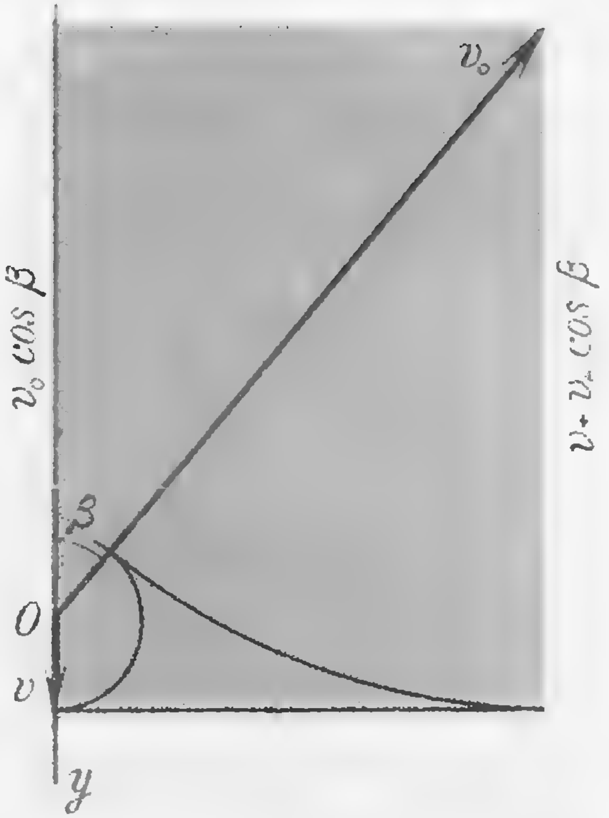


Рис. 11.

Для этого можно применить следующее построение. Начертим вектор начальной скорости $\mathbf{v}_0$, направив его под углом β к оси y (рис. 10). Пусть через время Δt составляющая $\mathbf{v}_y$ скорости кубика изменилась на Δv_y, а полная скорость — на $\Delta v=\Delta v_y$. Следовательно, через время Δt вектор $\mathbf{v}_0$ будет на Δv короче, и на такую же величину изменится величина его проекции на ось y.

Через точку B, лежащую ниже точки A (конца вектора $\mathbf{v}_0$) на отрезок $\Delta v_y=\Delta v$, проведем горизонтальную прямую BC. Радиусом AB, равным $\Delta v_y=\Delta v$, из точки A как из центра проведем дугу BD. Точка D отметит длину нового вектора $v=v_0-\Delta v$. Радиусом OD, равным $v=v_0-\Delta v$, из точки O как из центра проведем дугу DC. Точка C пересечения дуги и прямой BC явится концом искомого вектора OC, равного v.

Такое построение можно сделать для любых интервалов времени Δt. Оно показывает, что вектор скорости **v** кубика укорачивается и приближается к оси y (рис. 11) Из чертежа видно, что в предельном случае

$$v+v_0\cos\beta=v_0-v.$$

Отсюда

$$v=\frac{v_0(1-\cos\beta)}{2}=v_0\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Правильное решение прислал *П. Беляков* (Москва).

Б. Б. Буховцев

Ф81

В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки утратит сверхпроводящие свойства, то произойдет авария. На этом участке будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв.

Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии.

Схемы с реле не годятся — слишком велико время их срабатывания. Взрыв произойдет раньше, чем сработает реле. Поэтому единственный выход — замкнуть соленоид на сопротивление. Обычно поступают так. Провод для соленоида делается армированным медью. При утрате сверхпроводимости арматура будет служить буфером, по которому пойдет ток, и выделение тепла будет рассредоточено по цепи.

Правильное решение прислали *С. Черников* (Семипалатинск), *Н. Ефимов* (Воронеж), *В. Скворцов* (Ленинград).

Ф82

Найдите условие, при котором через сопротивление r, подключенное в точках A и B схемы, изображенной на рисунке 12, не будет идти ток.

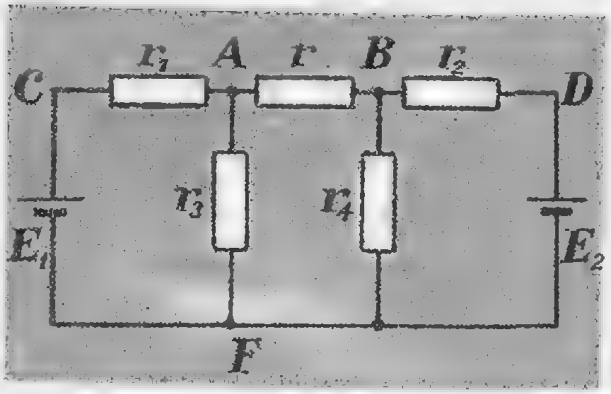


Рис. 12.

Ток не будет идти через сопротивление r, если разность потенциалов точек A и B равна нулю. Примем потенциал точки F за нуль. Тогда потенциал точки C равен E_1, а потенциал точки D равен E_2. Через сопротивление r_1 идет ток $I = \frac{E_1}{r_1 + r_3}$, и поэтому падение напряжения на сопротивлении r_1 равно $U_1 = Ir_1 = E_1 \frac{r_1}{r_1 + r_3}$, а потенциал точки A равен

$$\varphi_A = E_1 - E_1 \frac{r_1}{r_1 + r_3} = E_1 \frac{r_3}{r_1 + r_3}.$$

Аналогично найдем потенциал точки B:

$$\varphi_B = E_2 \frac{r_4}{r_2 + r_4}.$$

Из условия $\varphi_A = \varphi_B$ получим

$$E_1 \frac{r_3}{r_3 + r_1} = E_2 \frac{r_4}{r_2 + r_4}.$$

Это — общее условие отсутствия тока через сопротивление r. Оно включает и очевидный симметричный случай $r_1 = r_2$, $r_3 = r_4$ и $E_1 = E_2$.

И. Ш. Слободецкий

ФИГУРКИ НА ВЕСАХ

На одном коромысле весов (см. рисунок на обложке) висит октаэдр, на другом — четыре тетраэдра. Оказывается, если ребра всех фигур равны, то объем октаэдра равен сумме объемов четырех тетраэдров, а потому весы находятся в равновесии. Попробуйте доказать это утверждение. Воспользуйтесь преобразованием подобия и докажите, что, если из татраэдра вырезать октаэдр с ребрами вдвое меньшими, чем ребра исходных тел, то останутся четыре тетраэдра (тоже с вдвое меньшими ребрами).

Итак, если все тела сплошные, то один октаэдр уравновешивается четырьмя тетраэдрами. А если тела полые или состоят лишь из ребер?

V Всесоюзная математическая олимпиада

В. Л. Гутенмахер

С 15 по 20 апреля в Риге проходила V Всесоюзная математическая олимпиада. Но жюри олимпиады (председатель Ян Бардзинь, зам. председателя Николай Васильев) начало свою работу уже с 13 апреля. Из ста задач, которые привезли с собой члены жюри, нужно было отобрать наиболее интересные и оригинальные задачи. На этот раз, в отличие от прошлых лет, жюри решило дать школьникам задания, которые были бы близки к серьезной математической науке, а на втором туре провести даже некоторый эксперимент: предложить одну более трудную задачу, разбив ее на серию постепенно усложняющихся вопросов, в решении которых предлагалось бы продвинуться как можно дальше.

Первый и второй тур олимпиады проходили 16 и 17 апреля отдельно по восьмым, девятым и десятым классам.

Мы помещаем ниже список из 23 задач, которые предлагались школьникам. Среди них, по существу, всего 14 различных задач. 10 задач мы публикуем в «Задачнике Кванта» (см. «Квант» №№ 10, 11).

ЗАДАЧИ

8 класс (первый день)

1. Доказать, что существует стозначное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

2. Дан треугольник $A_1A_2A_3$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке. Доказать, что если $A_1B_1=A_2D_2$ и $A_2B_2=A_3D_3$, то $A_3B_3=A_1D_1$.

3. Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a, а число d — под числом c, то $a+d=b+c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

4. См. задачу М111.

8 класс (второй день)

5. См. задачу М108.

6. Доказать, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел.

7. См. задачу М109.

9 класс (первый день)

1. См. задачу М113.

2. На каждой стороне треугольника ABC взято по две точки: на AB — точки D и E, на BC — точки F

и G и на CA — точки H и K. Дано, что $AD=BE$, $BF=CG$ и $CH=AK$. В треугольниках ADK, BEF и CGH проведены медианы из вершин A, B и C. Доказать, что прямые, на которых лежат эти медианы, пересекаются в одной точке.

3. См. задачу **M115**.
4. См. задачу **M111**.
5. См. задачу **M112**.

9 класс (второй день)

6. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

Решите эту задачу, если:

а) $n=4$,

б) $n=10$,

в) n — любое натуральное число.

7. Доказать, что все прямые, делящие одновременно и площадь, и периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

8. См. задачу **M110**.

10 класс (первый день)

1. См. задачу **M106**.
2. См. задачу **M107**, а.
3. Проекции тела на две плоскости — круги. Доказать, что эти круги имеют равные радиусы.
4. См. задачу **M111**.
5. См. задачу **M114**.

10 класс (второй день)

6. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики:

а) Укажите ответ для маленьких значений n: для $n=2$, 3, 4.

б) Попробуйте найти ответ при $n=10$.

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так.

Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3), где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений 1, 2,..., n. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличается от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти оценки для более общей задачи, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех или большего числа букв.

7. а) Рассмотрим функцию $f(x, y)=x^2+xy+y^2$. Доказать, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что

$$f(x-m,\ y-n)=(x-m)^2+$$
$$+(x-m)(y-n)+(y-n)^2\leqslant\frac{1}{2}.$$

б) Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m,\ y-n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что выполнено неравенство $\bar{f}(x, y)\leqslant\frac{1}{2}$ для всех (x, y). Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y)\leqslant\frac{1}{3}$. Найдите все точки, для которых имеет место равенство $\bar{f}(x, y)=\frac{1}{3}$.

в) Рассмотрим функцию

$$f_a(x, y)=x^2+axy+y^2\ (a\geqslant 0).$$

Найдите какое-либо число C (зависящее от a) так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство $|\bar{f}_a(x, y)|\leqslant C$. Постарайтесь найти точную оценку.

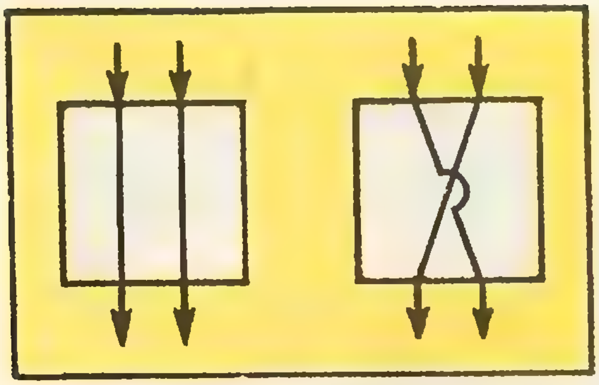


Рис. 1.

8. Переключатель (рис. 1) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях. На рисунке 2 изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»; меняя состояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, то есть

$$\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&2\end{matrix}$$

(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3=8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», то есть осуществляла бы любое из 24 возможных соединений входов и выходов.

б) Какое минимальное число переключаталей нужно для такой схемы?

в) Назовем схему с n входами и n выходами n-универсальной, если она осуществляет любое из $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами. На рисунке 3 изображена схема с восемью входами и восемью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной. Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n-универсальной схеме.

В первый день, как и предполагалось, наиболее легкими оказались задачи 1—3 в восьмом, 1 и 2 в девятом и 1—3 в десятом классах. Школьники успешно справились с ними, причем были найдены разные и иногда

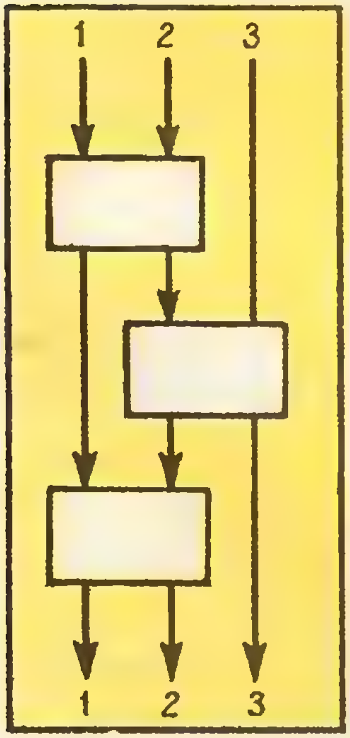


Рис. 2.

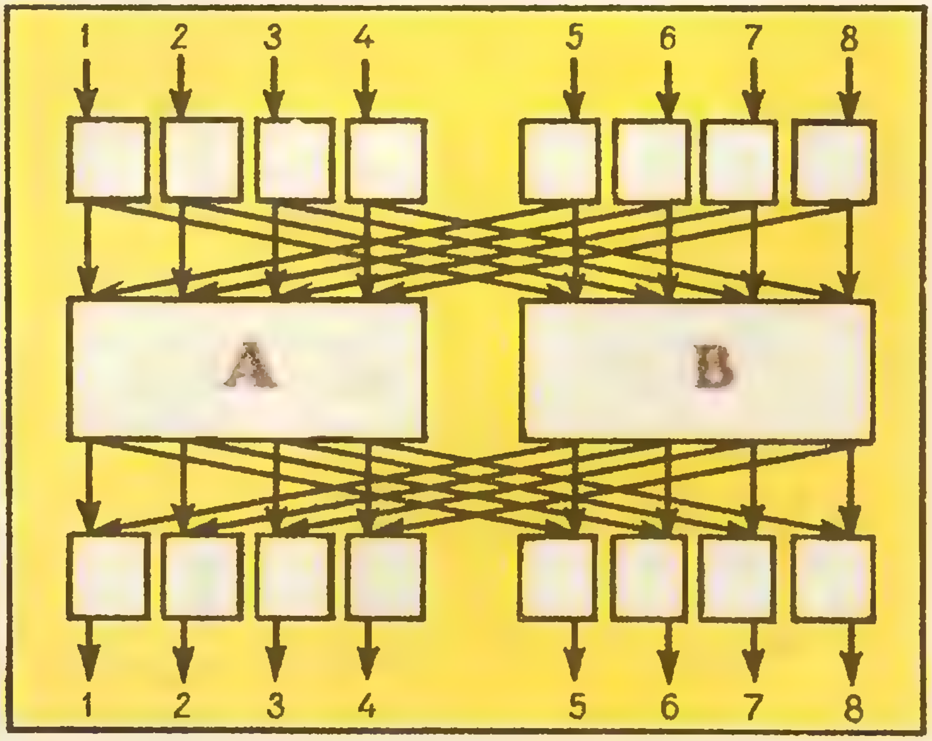


Рис. 3.

не известные жюри способы доказательства.

Камнем преткновения стала задача № 4, предложенная во всех классах. Многие пробовали решить эту задачу, но при этом упускали из виду, что расположение кругов может быть достаточно экзотическим: круги могут налегать друг на друга, их центры могут быть расположены близко друг к другу и т. п. По существу, в этой задаче фигура, покрытая кругами, может иметь почти произвольную форму, и нужно придумать такое рассуждение, которое годится для любой такой фигуры. У этой задачи есть очень короткое и красивое решение. В каждом классе ее удалось решить лишь одному школьнику (в таблице на стр. 39 указано, сколько людей решило каждую задачу полностью или с небольшими просчетами). Повторялись в равных классах и другие задачи, однако их формулировки отличались друг от друга. Например, задача 1 в девятом классе отличается от задачи 1 в восьмом классе тем, что вместо числа 100 поставлено число n. Задача 7 девятого класса отличается от задачи 5а восьмого класса тем, что не названа точка, в которой пересекаются прямые, и, таким образом, существенно усложнена.

В качестве более интересного примера дублирования мы приведем задачи 3 (8 класс) и 5 (9 класс). Первая из этих задач — просто частный случай второй (для $m=2$, $n=10$), но в формулировке 8 класса более четко выделено, что именно требуется в ее решении: (1) указать ответ (этот ответ — 11 вопросов — нашли почти все); (2) доказать, что за 11 вопросов узнать все числа можно (это очень просто); (3) доказать, что за 10 или меньше вопросов узнать числа нельзя.

Задача 3 (8 класс). Пусть a и c — какие-то два числа, стоящие в верхней строке, а b и d — числа, стоящие под ними:

$$\begin{array}{cc} \ldots\ a\ldots & c\ldots \\ \ldots\ b\ldots & d\ldots \end{array}$$

Условие, которому удовлетворяет это число, состоит только в том, что $a+d=c+b$. Перепишем это условие так: $a-b=c-d$. Отсюда следует, что разность между числом в верхней строке и числом, стоящим под ним, для всех столбцов одна и та же; обозначим эту разность через y. Таблицу можно записать так:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2\ \ldots & x_9 & x_{10} \\ x_1-y & x_2-y\ \ldots & x_9-y & x_{10}-y \end{array}$$

здесь $x_1, \ldots, x_{10}$, y — произвольные числа. Эту таблицу можно определить за 11 вопросов. Например, можно за 10 вопросов найти 10 чисел $x_1, \ldots, x_{10}$ из первой строки, а затем, задав один вопрос «какое число стоит во второй строке на первом месте?», найти y.

Почти очевидно, что меньше, чем за 11 вопросов нельзя найти 11 неизвестных. Однако жюри не считало, что это очевидно, и требовало пояснений. Большую трудность представляла для участников запись их полного и четкого решения задач. Записывать строчки и таблицы, состоящие из большого числа элементов, и свободно обращаться с ними, могут очень немногие школьники. В решении следующей задачи имеется трудность как раз такого рода.

Задача 6 (8 класс). Будем доказывать утверждение задачи от противного. Допустим, что либо сумма двух чисел из 25 либо их разность содержится среди оставшихся чисел.

Расположим данные числа в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{24} < a_{25}.$$

Рассмотрим наибольшее число a_{25} в паре с любым из остальных чисел. Очевидно, что сумма таких чисел не содержится среди данных чисел, так как

$$a_{25}+a_i > a_{25} \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ 24).$$

Следовательно, разности этих чисел

$$a_{25}-a_{24} < a_{25}-a_{23} < \ldots < a_{25}-a_1$$

должны содержаться среди данных чисел. Единственный возможный вариант:

$$a_{25}-a_{24}=a_1,\ a_{25}-a_{23}=a_2, \ldots$$
$$\ldots, a_{25}-a_1=a_{24}$$

или, что то же самое,

$$a_{24}+a_1=a_{23}+a_2=\ldots=a_{13}+a_{12}=a_{25}.$$

Число участников, решивших каждую задачу

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="6">I день</td><td colspan="9">II день</td></tr>
<tr><td>8 класс</td><td>№ задачи</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td>5а</td><td>5б</td><td>6</td><td colspan="2">7а</td><td colspan="2">7б</td><td colspan="2">7в</td></tr>
<tr><td></td><td>Решило</td><td>30</td><td>7</td><td>22</td><td>1</td><td></td><td></td><td>42</td><td>15</td><td>13</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">9</td></tr>
<tr><td>9 класс</td><td>№ задачи</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>5</td><td>6а</td><td></td><td>6б, в</td><td></td><td>7</td><td></td><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Решило</td><td>56</td><td>31</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td>6</td><td>9</td><td></td><td>1</td><td></td><td>16</td><td></td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10 класс</td><td>№ задачи</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>5</td><td>6а*</td><td colspan="2">6б—в</td><td>7а*</td><td>7б</td><td>7в</td><td>8а*</td><td>8б</td><td>8в</td></tr>
<tr><td></td><td>Решило</td><td>26</td><td>43</td><td>65</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td>32</td><td colspan="2">1</td><td>18</td><td>5</td><td>3</td><td>19</td><td>15</td><td>1</td></tr>
</table>

---

* Различные результаты, полученные участниками по этим задачам, не укладываются точно в рамки сформулированных вопросов; указано число школьников, получивших наиболее полные и точные результаты, построивших интересные примеры и т. п.

Теперь рассмотрим число a_{24} в паре с любым из первых двадцати трех чисел. С парой чисел a_1 и a_{24} все в порядке, так как $a_{24}+a_1=a_{25}$. Суммы же чисел

$$a_{24}+a_2, \ldots, a_{24}+a_{23}$$

не содержатся среди данных чисел, так как

$$a_{24}+a_i>a_{24}+a_1=a_{25},$$
$$(i=2, 3, \ldots, 23).$$

Следовательно, разности этих чисел должны содержаться среди данных чисел. Запишем их в порядке возрастания:

$$a_{24}-a_{23}<a_{24}-a_{22}<\ldots<a_{24}-a_2.$$

Из равенства $a_{23}+a_2=a_{25}$ следует, что $a_{24}-a_2<a_{23}$ и поэтому единственный возможный вариант:

$$a_{24}-a_{23}=a_1, \quad a_{24}-a_{22}=a_2, \ldots$$
$$\ldots, a_{24}-a_{12}=a_{12}, \ldots, a_{24}-a_2=a_{22}.$$

Но в таком случае разность $a_{24}-a_{12}$ не содержится среди оставшихся чисел, а сумма $a_{24}+a_{12}$ вообще не содержится среди данных чисел. Получили противоречие. Тем самым утверждение задачи доказано.

Задача оказывается верной и для n чисел, где $n \geqslant 4$. Доказательство можно провести аналогичным образом, причем для четного n можно получить противоречие на первом же шаге наших рассуждений. Попробуйте сами записать это доказательство.

Неожиданными для жюри явились результаты сравнительно легкой стереометрической задачи 3 (10 класс). Задача оказалась посильной лишь одной трети десятиклассников. Это свидетельствует, пожалуй, о том, что пространственное представление у большинства участников олимпиады развито недостаточно.

Задача 3 (10 класс). Тут речь идет об обычной ортогональной проекции. Определение проекции тела на данную плоскость содержится в школьном учебнике. Нам понадобится определение проекции тела на прямую.

Проекцией точки на данную прямую назовем основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Если точка лежит на данной прямой, то ее проекцией будет сама эта точка.

Проекцией тела на данную прямую назовем множество проекций всех его точек.

Пусть P — плоскость и l — прямая, лежащая на P. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что проекция любой точки на прямую l может быть получена последовательным проектированием этой точки на плоскость P и проектированием полученной точки на прямую.

По условию задачи проекция тела на две плоскости — круги. Допустим, что эти плоскости пересекаются по прямой l. Из сказанного следует, что проекция тела на прямую l совпадает с проекциями каждого из кругов на l. Отсюда заключаем, что *проекции обоих кругов l совпадают друг с другом*.

Ясно, что *проекция круга на прямую l лежащую в его плоскости, представляет собой отрезок, равный диаметру круга*. Следовательно, эти круги имеют одинаковые диаметры и одинаковые радиусы.

Случай, когда данные плоскости параллельны друг другу достаточно очевиден.

Заметим, что задача допускает и другие решения; введение нового понятия — проекция тела на прямую,— безусловно, не является необходимым.

Можно сказать, что остальные задачи первого дня у десятиклассников, хотя и были более трудными, но все допускали значительно более короткие решения, чем приведенное выше решение задачи № 3.

Вариант девятого класса нужно признать несколько перегруженным: здесь не было ни одной «совсем простой» задачи. В частности, задача 3 никем не была решена полностью.

Особенно тяжелым был второй тур, где собраны задачи, требующие длительного размышления. А поскольку девятиклассникам не предложили так же, как в десятом классе, решать только одну задачу, то, стараясь сделать все, некоторые не сделали ничего.

Первый тур в 8 классе был напряженным. Ни одному ученику не удалось решить все задачи. Однако на втором туре к удивлению жюри три человека решили все задачи. Две из трех задач второго тура состояли из нескольких вопросов. В задаче 5 пункт б) являлся обобщением пункта а), а полное решение задачи 7 а), б), в) позволяло школьнику сформулировать и доказать утверждение, естественно обобщающее все три пункта этой задачи.

Эксперимент II тура наиболее последовательно был выдержан в 10 классе, где участникам было предложено выбрать только одну задачу и посвятить все пять часов её решению. Любопытно, что все три задачи оказались равноценными. Десятиклассники разделились на три примерно равные группы «специалистов» по каждой задаче. В каждой из задач был достигнут «потолок» — задача была доведена (или почти доведена) до конца, то есть до тех результатов, которыми располагало жюри. Например, в задаче 6 были полностью сделаны пункты а) — в); в задаче 7 для $0 \leqslant a \leqslant 2$ была найдена точная оценка $C = \frac{1}{a+2}$. О задачах 6—8 будет рассказано в отдельных статьях в первых номерах «Кванта» в следующем году, и, если вам удастся получить до тех пор интересные результаты по этим задачам, напишите нам!

Члены жюри проверяли каждую работу более 500 участников олимпиады не менее двух раз, а наиболее спорные работы просматривали 10, а то и больше человек. В заключение всем школьникам были рассказаны решения задач и был проведен индивидуальный разбор их работ.

На этих встречах ребята могли посмотреть свои тетради и побеседовать с членами жюри, выяснить все интересующие их вопросы по задачам, узнать новые задачи. Например, член жюри Н. Константинов провел двухчасовой кружок, на котором школьники предлагали придуманные ими самими задачи и совместными усилиями их решали. Не смогли решить только одну задачу, предложенную участником олимпиады Н. Романовым.

Задача. *Каждая точка плоскости окрашена в один из трех цветов: красный, синий или желтый. Обязательно ли найдутся три точки одного цвета, которые образуют треугольник, подобный данному?*

Не остались в стороне и руководители команд. Для них члены жюри прочли несколько лекций.

В заключение мы приведем еще одну исследовательскую задачу из портфеля жюри, которая предназначалась для II тура, но не была включена из-за перегрузки вариантов.

Задача. *Пусть* $-1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. *Если при некотором* a, *таком, что* $-1 \leqslant a \leqslant 0$,
$|(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_n)| > 1$,
то при любом x, *таком, что* $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$|(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)| \leqslant 1$.

Доказать это утверждение:

а) *при* $n=2$; б) *при* $n=3$;

в) *при произвольном* n.

V Всесоюзная физическая олимпиада

И. А. Зайцев

С 15 по 20 апреля в Новосибирске проходила V Всесоюзная физическая олимпиада. По уже устоявшейся традиции она проходила в два тура: теоретического и экспериментального. Подбирая задачи, жюри стремилось к тому, чтобы при их решении было достаточно знаний, предполагаемых программой средней школы, но требовалось бы «физическое мышление», понимание, чем можно пренебречь, понимание того, как происходит процесс, о котором говорится в задаче, и т. д. Труднее всего жюри пришлось с задачами экспериментального тура. Они не должны были требовать для решения слишком много времени и в них должна была быть «олимпиадность»: при решении нужно было проявить находчивость, подумать о том, как лучше поставить опыт, чтобы получить как можно более точный результат. Это, впрочем, относилось как к теоретическим, так и к экспериментальным задачам.

Всего жюри отобрало 14 теоретических и 10 экспериментальных задач. Некоторые задачи повторялись в разных классах. Ниже мы публикуем все задачи, которые предлагались на олимпиаде (часть из них уже была опубликована в «Кванте» № 10, часть мы публикуем в этом номере в «Задачнике «Кванта»).

Каждая из работ участников олимпиады проверялась дважды — вначале одним из членов жюри, затем каждую из задач в работе проверяли отдельно «специалисты» по этой задаче. Это позволило усреднить требования, уменьшить вероятность ошибки. Лучшие и худшие работы, кроме того, проверялись старшим по варианту.

Работой по подготовке задач и проверкой работ руководили: председатель жюри — академик С. Т. Беляев, его заместители — Е. И. Биченков и И. Ш. Слободецкий.

Приведем для примера решения двух характерных «олимпиадных» задач теоретического тура.

1. Два протона и два позитрона, первоначально покоившиеся в вершинах квадрата со стороной a (рис. 1), разлетаются. Отношение их масс $M/m=2000$, а заряды одинаковы. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после разлета (на бесконечности). (10 класс).

Вначале на все частицы действуют одинаковые по величине силы. Но массы протонов в 2000 раз превышают массы позитронов. Это означает, что ускорения позитронов будут в 2000 раз больше ускорений протонов. Поэтому позитроны быстро разлетятся на бесконечность, а затем протоны будут разлетаться, взаимодействуя уже только друг с другом. Это дает возможность при вычислении скоростей позитронов протоны считать неподвижными.

Найдем полную потенциальную энергию позитронов до разлета. Если бы протонов не было, то потенциальная энергия взаимодействия двух позитронов была бы равна $\frac{e^2}{a\sqrt{2}}$ (т. е. работе, которую нужно затратить для сближения двух позитронов). Потенциал поля, которое создает каждый из протонов в точке, где находится позитрон, очевидно, равен $\varphi=\frac{e}{a}$. Поэтому полная потенциальная энергия позитронов будет равна

$$П_1=\frac{e^2}{a\sqrt{2}}+2\,\frac{e}{a}\,e+2\,\frac{e}{a}\,e=$$
$$=\frac{e^2}{a}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(Потенциальную энергию взаимодействия протонов мы можем не учитывать, так как она не меняется — протоны неподвижны.) Вся эта энергия перейдет в кинетическую энергию позитронов при их разлете. Ясно, что скорости позитронов на бесконечности одинаковы. Поэтому

$$\frac{e^2}{a}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\,\frac{mv^2}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{e^2}{a}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=mv^2. \qquad (1)$$

Теперь рассмотрим разлет протонов. Их потенциальная энергия до разлета, очевидно, равна $П_2=\frac{e^2}{a\sqrt{2}}$, а полная кинетическая энергия после разлета равна Mu^2 (u — скорость протонов). По закону сохранения энергии

$$\frac{e^2}{a\sqrt{2}}=Mu^2. \qquad (2)$$

Разделив теперь уравнение (2) на уравнение (1), получим

$$\frac{1}{4\sqrt{2}+1}=\frac{M}{m}\left(\frac{u}{v}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{u}{v}=\sqrt{\frac{m}{M}\,\frac{1}{4\sqrt{2}+1}}\approx 0{,}007.$$

2. На гладком столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 2. Коэффициент трения между грузами M и m равен k. Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой F, как указано на рисунке. Найти ускорения всех грузов системы. (8 класс).

Вот как решил эту задачу Вадим Мирный (шк. № 2, г. Москва), получивший на олимпиаде диплом II степени.

Перенумеруем грузы так, как показано на рисунке 2. Выберем систему отсчета, связанную со столом, и положительное направление вправо. Тогда никакой из грузов не может иметь отрицательного ускорения.

Пусть вместо грузов 3 и 4 на столе стоит столб, к которому привязана нить. В этом случае натяжение нити

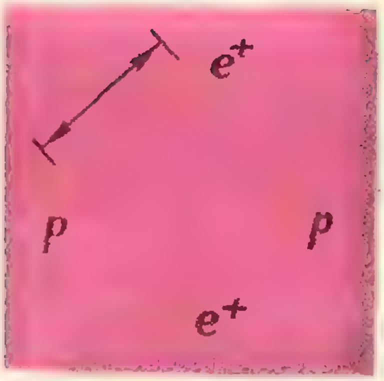


Рис. 1.

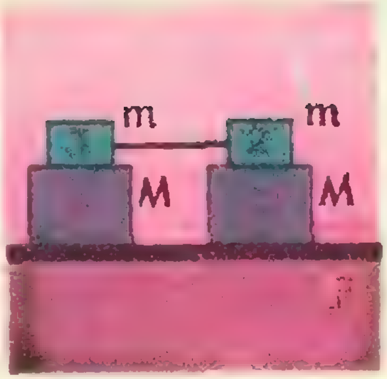


Рис. 2.

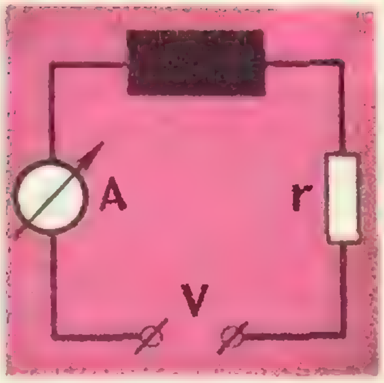


Рис. 3.

будет наибольшим. Но даже в этом случае груз 2 не может иметь ускорения, направленного влево. Поэтому он вообще никогда не может иметь отрицательного ускорения. Ускорение груза 3 равно ускорению груза 2, а ускорение груза 4 направлено вправо, так как на него действует только одна, направленная вправо, сила трения о груз 3.

Докажем, что трение между грузами 3 и 4 — всегда трение покоя. Предположим противное: груз 3 скользит по грузу 4. Тогда сила трения между ними $F_{тр}=kmg$, а сила натяжения веревки $T>kmg$, поэтому ускорение груза 2 направлено влево, чего не может быть. Поэтому ускорения грузов 2, 3 и 4 одинаковы. Обозначим его a_2, а ускорение груза 1 a_1. Теперь рассмотрим два случая.

Первый случай. Между грузами 1 и 2 трение покоя и $a_1=a_2$. Пусть сила трения между ними равна F_1, а сила трения между грузами 3 и 4 — F_2; сила натяжения нити T.

Тогда

$$\begin{array}{ll} \text{для груза 1} & \left\{ \begin{array}{l} F-F_1=Ma_1, \\ F_1-T=ma_2, \\ T-F_2=ma_2, \\ F_2=Ma_2. \end{array} \right. \\ \text{для груза 2} & \\ \text{для груза 3} & \\ \text{для груза 4} & \end{array}$$

Решая эту систему, получаем:

$$F_1=\frac{2m+M}{2(M+m)}F,$$

$$a_1=a_2=\frac{F}{2(M+m)}.$$

Этот же результат можно было получить и не решая систему уравнений. Так как трение между всеми поверхностями — трение покоя, то система грузов движется как твердое тело с массой $\tilde{M}=2(M+m)$:

$$F=\tilde{M}a_1, \quad a_1=a_2=\frac{F}{2(M+m)}.$$

Второй случай. Груз 2 скользит по грузу 1. Тогда на груз 1 действует сила $F'=F-kmg$ и его ускорение равно

$$a_1=\frac{F-kmg}{M}.$$

Система грузов 2, 3 и 4 движется как твердое тело; его масса $\tilde{M}=2m+M$ и ускорение

$$a_2=\frac{kmg}{2m+M}.$$

Ясно, что первый случай осуществляется, если

$$F_1=F\frac{2m+M}{2(M+m)}\leqslant kmg,$$

или

$$F\geqslant\frac{2km(m+M)}{2m+M}g.$$

Если $F<\dfrac{2km(m+M)}{2m+M}g$, то осуществляется второй случай. Решение системы уравнений было необходимым, чтобы определить, какие условия соответствуют первому случаю, а какие — второму.

Варианты задач, предложенные участникам олимпиады

В скобках после каждой задачи указано число участников, решивших ее.

Задачи теоретического тура

8 класс (129 участников)

1. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M, в который вмерзла свинцовая дробинка массы m. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца 11,3 г/см^3, льда 0,9 г/см^3, теплота плавления льда 80 кал/г. Температура воды в сосуде равна 0° С. (66)

2. К ящику с двумя клеммами подключили: 1) амперметр, 2) сопротивление $r=1$ ом и 3) источник постоянного напряжения $V_1=5$ в (рис. 3). Амперметр показал ток $I_1=1$ а. Когда вместо источника напряжения V_1 включили другой источник напряжения, $V_2=20$ в, амперметр показал ток $I_2=2$ а. Что находится внутри ящика? (39)

Было много решений этой задачи с реле, двумя лампочками, одна из которых сгорает при большом напряжении, и т. д. Но задача имеет простое и красивое решение. Нашли его немногие.

3. На гладком столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 2 (см. стр. 44). Коэффициент трения между грузами M и m равен k. Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой F, как указано на рисунке. Найти ускорения всех грузов системы. (34)

4. Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 4. (43)

В этой задаче нужно было показать, что хотя, забираясь вверх, велосипедист проигрывает в расстоянии, зато выигрывает в скорости.

Тем восьмиклассникам, которые занимались по старой программе (их было всего 12), вместо двух последних задач были предложены другие.

1. Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим полусферы с радиусом $R=20$ см (рис. 5). Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F. Атмосферное давление равно 1 атм.

2. В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик и почему?

35 восьмиклассников — участников олимпиады не сделали ни одной задачи, 32 решили только одну, 26 — две, 18 — три. Пятеро решили все четыре задачи, хотя и с некоторыми неточностями и мелкими погрешностями.

9 класс (171 участник)

1. Свет от источника S двумя путями приходит к экрану, проходя че-

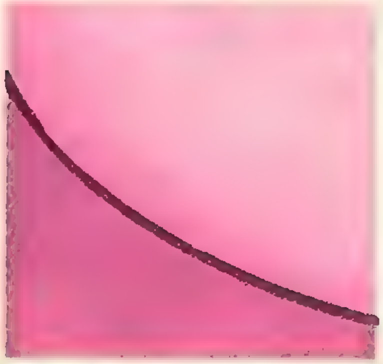


Рис. 4.

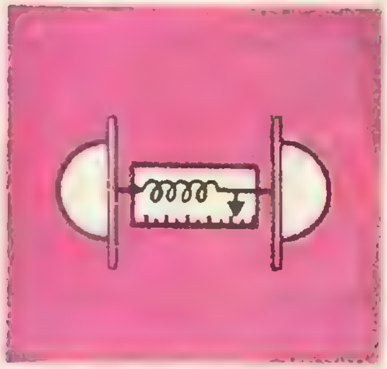


Рис. 5.

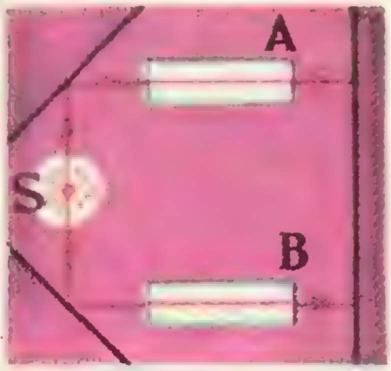


Рис. 6.

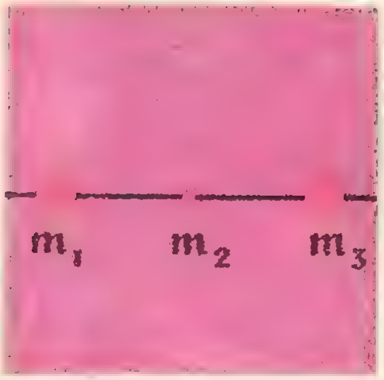


Рис. 7.

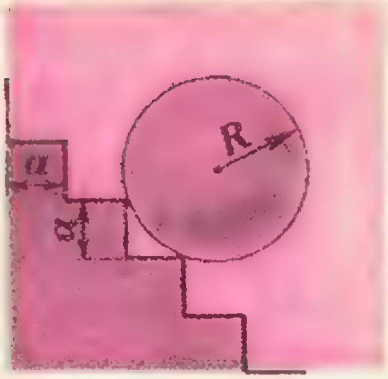


Рис. 8.

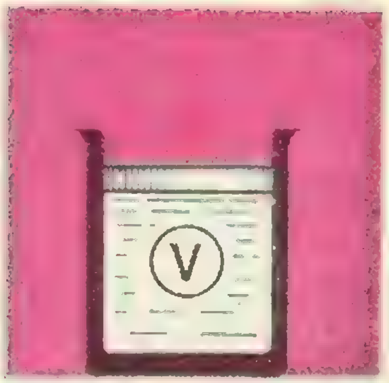


Рис. 9.

рез стеклянные кубики A и B длины l каждый (рис. 6). Скорость света в воздухе равна c, в неподвижном стекле — v. Насколько быстрее свет пройдет по нижнему пути, если кубик B привести в движение со скоростью u? (77)

Эту задачу нужно было решить в приближении $v \ll c$ и $u \ll c$. Многие участники, однако, решили задачу в общем случае, используя формулы теории относительности.

2. Три тела с массами m_1, m_2, m_3 могут скользить вдоль горизонтальной прямой без трения (рис. 7), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$. Определить максимальные скорости двух крайних тел, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость V. Удары считать абсолютно упругими. (43)

Не следует решать эту задачу «в лоб», составляя большое число уравнений. Здесь нужно было подумать о следствиях условий $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$.

3. Шар радиуса R соскальзывает по лестнице, ширина и высота ступенек которой $a \ll R$ (рис. 8). Соударения шара со ступеньками неупругие, трения нет. Какой наибольшей скорости достигнет шар при достаточно большой длине лестницы? (16)

4. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V (рис. 9). Давление паров в полости пренебрежимо мало. Поршень оказывает на воду постоянное давление P. Какую кинетическую энергию приобретет вода в момент, когда полость исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать. (109)

5. В камеру сгорания реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Сечение выходного отверстия сопла двигателя S, давление в этом сечении P, температура $T°$ К. Определить силу тяги двигателя. (70)

30 девятиклассников — участников олимпиады не решили ни одной задачи, 45 решили по одной, 51 — по две, 29 — по три, 13 — по четыре. Только двое сделали все задачи.

10 класс (249 участников)

1. На рисунке 10 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно замерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме? (45)

Задача имеет очень короткое и интересное решение. Попробуйте найти его.

2. К маятнику AB с шариком массы M подвешен маятник BC с шариком массы m (рис. 11). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T. Найти длину нити BC, если известно, что нить AB все время остается вертикальной. (35)

3. См. задачу 5 для 9 кл. (120)

4. Два протона и два позитрона, первоначально покоившиеся в вер-

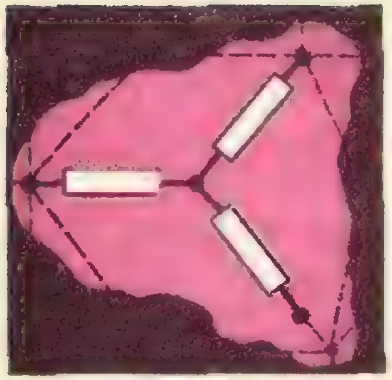


Рис. 10.

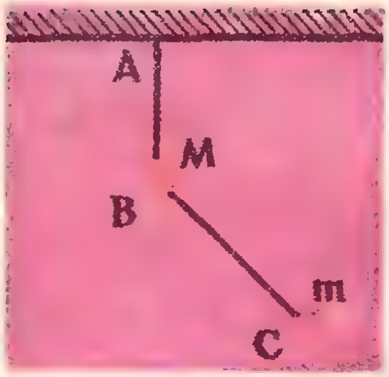


Рис. 11.

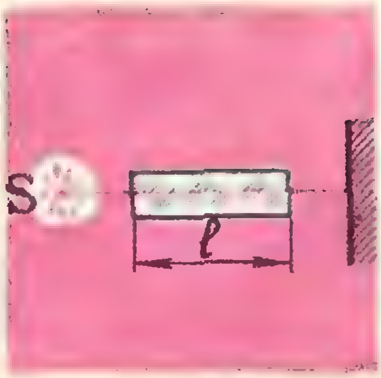


Рис. 12.

шинах квадрата со стороной a (см. рис. 1 на стр. 44), разлетаются. Отношение их масс $M/m=2000$, а заряды одинаковы. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после разлета (на бесконечности). (5)

Главное в этой задаче — понять, как будет происходить разлет частиц.

5. Свет от источника S по пути к экрану проходит через стеклянный кубик с ребром l (рис. 12). Насколько быстрее свет дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью v? Скорость света c, показатель преломления стекла n. (97)

См. замечание к задаче 1 для 9 кл.

74 десятиклассника — участника олимпиады не решили ни одной задачи, 69 справились только с одной, 52 — с двумя, 25 — с тремя, 13 — с четырьмя. Все задачи решил только один участник олимпиады.

Задачи экспериментального тура

Выполняя экспериментальную работу, важно было не только выполнить ее правильно, но и сделать это просто, остроумно и оригинально. Нужно было продумать, нельзя ли провести требуемые измерения несколькими методами.

8 класс

1. Определить к. п. д. наклонной плоскости с помощью секундомера, линейки и бруска.

2. Найти отношение коэффициентов трения покоя и скольжения, имея планку и две круглые деревянные палочки.

3. Имеются два шарика, подвешенные на нитях равной длины к одной точке, кусочек пластилина и транспортир. Масса одного из шариков известна. Определить массу второго.

4. Имеется два черных ящика. В одном из них лампочка, а в другом сопротивление. Найти, где что, пользуясь батарейкой, амперметром и вольтметром.

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 кл.

2. Определить удельный вес жидкости с помощью трубки, сосудов с жидкостью и линейки.

3. Определить зависимость периода колебаний физического маятника (палки с отверстиями) от длины. Имеются две одинаковые палки с отверстиями и штатив со штырем, на который можно одеть эти палки.

4. Определить теплоту плавления льда, имея калориметр, термометр, лед, мензурки.

10 класс

1. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, имея источник с известной э. д. с., микроамперметр, два одинаковых конденсатора, известное сопротивление.

2. Определить коэффициент преломления стеклянной плоскопараллельной пластинки.

3. Определить влажность снега с помощью калориметра, термометра, мензурки и воды.

4. См. задачу 3 для 9 кл.

Попробуйте проделать самостоятельно эти работы.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Графики
В ЗАДАЧАХ НА РАВНОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Б. А. Кордемский

На вступительных экзаменах по математике предлагаются самые разнообразные задачи на составление уравнений. Многие из них относятся к категории задач, описывающих равномерные процессы: перемещение с постоянной скоростью, подача воды по трубе с постоянной пропускной способностью, выполнение работы при постоянной производительности труда, оплата проезда при постоянной таксе и другие.

Часто такие задачи проще всего решать геометрически, строя график зависимости между величинами, о которых идет речь в условии задачи.

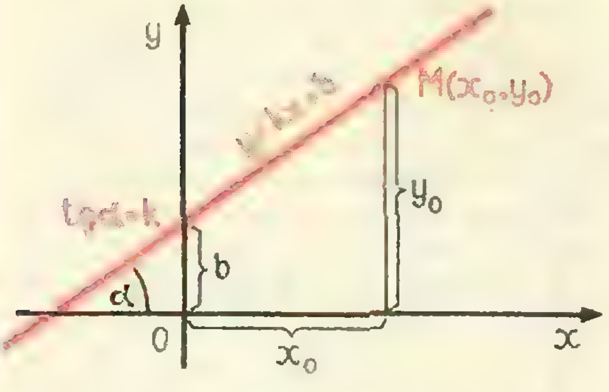


Рис. 1. График равномерного процесса.

На графике равномерный процесс изображается прямой линией (рис. 1); при этом зависимая и независимая переменные y и x связаны между собой соотношением

$$y=kx+b\ ^{*)}.$$

Каждая точка M графика изображает некоторое «состояние» рассматриваемого равномерного процесса: абсцисса x_0 и ордината y_0 точки M рассказывают о значениях величин, характеризующих процесс.

Например, при равномерном движении тела по прямой, принимаемой за координатную ось, график зависимости его координаты от времени представляет собой прямую линию**).

На рисунке 2 абсцисса и ордината точки M_0 показывают, что некто, проехав на такси 3,5 *км* (*OA км*) уплатил за проезд 45 копеек (*OB коп*).

На рисунке 3 прямая AD — график длины огарка равномерно горящей свечи. Отрезок OA (взятый в масштабе оси Oy)

---

*) Вообще прямая линия может задаваться и соотношением $x=c$ (y произвольно), но такие уравнения в задачах обычно не возникают, поскольку в этом случае y не зависит от x.

**) См. статью Ю. В. Зайчикова «Графики движения», «Квант» № 6, 1970, стр. 39—45.

означает начальную длину свечи; отрезок BM (взятый в том же масштабе) — длину огарка через t единиц времени ($t=OB$ в масштабе оси Ox). В свою очередь отрезок MC рассказывает о длине сгоревшей части свечи к тому же моменту времени t, а отрезок OD дает нам время, за которое свеча сгорит полностью. Очевидно, что отношение $\frac{MC}{AC}=\frac{AO}{OD}$ характеризует скорость, с которой сгорает свеча.

Отметим, что прямую AD на рисунке 3 можно рассматривать и как график длины сгоревшей части свечи, если осью, на которой откладывается длина сгоревшей части свечи, считать прямую AO (A — начало координат, AA' — ось времени).

Этот прием полезен при построении на одном чертеже графиков встречных движений или «встречных» работ (когда одно задание выполняют два человека, бассейн заполняется двумя трубами).

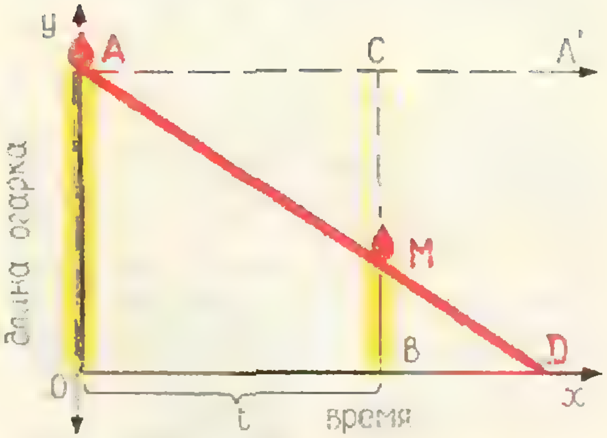


Рис. 3. График длины огарка свечи.

При решении задач на равномерные процессы важно научиться переводить алгебраическое условие задачи на геометрический язык графиков. При этом нет нужды составлять уравнение прямой линии, изображающей равномерный процесс. Для ее построения в соответствующей прямоугольной системе координат достаточно знать какие-либо два «состояния» этого процесса.

На рисунке 4 представлена геометрическая модель следующей задачи (текст условия комментируется замечаниями о соответствующей геометрической интерпретации).

Задача 1. *Пароход начали грузить 4 подъемных крана одинаковой мощности*. (Пусть отрезок OA произвольной длины — объем всей работы, OA' — предполагаемый график работы этих четырех кранов.) *После того как они проработали 2 часа* ($OB=AB'=2$ часа), *к ним присоединили еще 2 крана меньшей мощности* (ломаная $AB'C$ — график «встречной» работы этих двух кранов, отнесенный к системе осей AA' и AO; масштабы на этих осях те же, что и на осях Ox и Oy), *и после этого погрузка была окончена через 3 часа* ($BE=3$ часа; DE и DE' — количество работы, выполненной соответственно четырьмя и двумя кранами при их совместном действии).

Если бы все краны начали работать одновременно (новый график работы двух кранов — прямая AF, причем $AF \parallel B'C$), *то погрузка была бы окончена в 4,5 часа* (отрезок $ON=4,5$ часа).

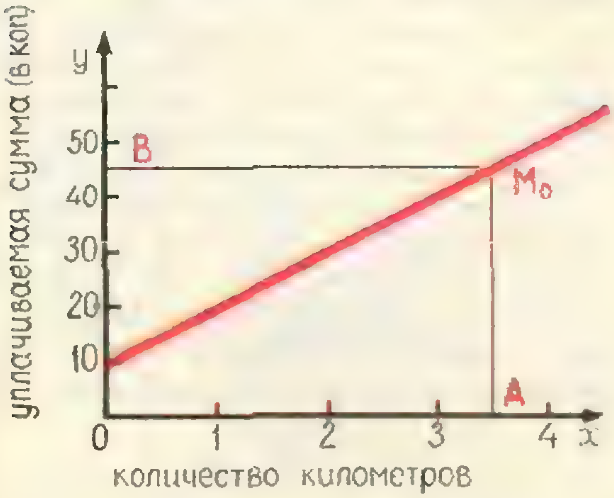


Рис. 2. График оплаты проезда на такси.

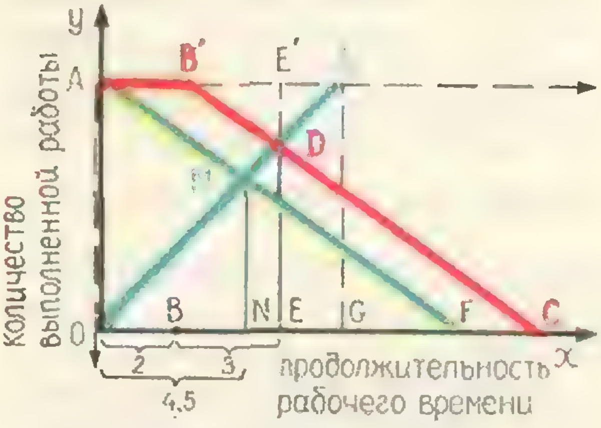


Рис. 4. Графики работы подъемных кранов.

Определить, за сколько часов мог бы окончить погрузку один кран меньшей мощности.

Конечно, эту задачу можно решать обычным способом: ввести неизвестные и составить систему двух уравнений, а затем решить ее*). Но привлечение графиков значительно облегчает рациональный выбор неизвестных и нахождение связей между данными величинами и искомыми. Решение при этом получается короче и нагляднее, поскольку появляется совершенно законная возможность использовать геометрические свойства, например, подобие треугольников.

Решение. Два маломощных крана выполняют всю работу (OA) за OF часов; найдем длину этого отрезка. Для этого рассмотрим две пары подобных треугольников:

$$\triangle ODE \backsim \triangle OMN, \text{ откуда } \frac{DE}{MN} = \frac{5}{4,5};$$

$$\triangle CDE \backsim \triangle FMN, \text{ откуда } \frac{DE}{MN} = \frac{EC}{NF},$$

или $\frac{5}{4,5} = \frac{OF+2-5}{OF-4,5}$. Отсюда находим $OF = 18$. Так как 18 часов — время работы двух кранов малой мощности, то один такой кран завершит погрузку за 36 часов.

Рассуждения, использующие графическую интерпретацию, с успехом можно применять для решения и таких задач, где речь идет о сплавах или смесях двух веществ.

Задача 2. *Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении* 2 : 3, *в другом — в отношении* 3 : 7. *Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить* 8 *кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении* 5 : 11?

Решение. Будем решать задачу по долям золота в сплавах. Золото составляет $\frac{2}{5}$ первого сплава, $\frac{3}{10}$ второго и $\frac{5}{16}$ искомого; приведя к общему знаменателю, получим дроби

$$\frac{32}{80}, \quad \frac{24}{80}, \quad \frac{25}{80}.$$

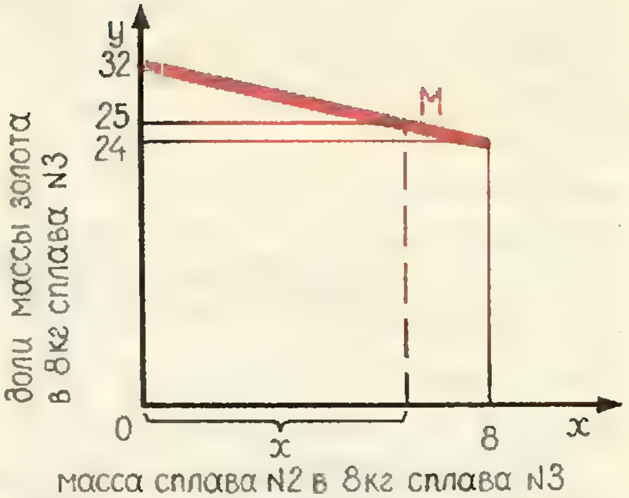


Рис. 5. График массы золота в сплаве № 3.

Пусть мы взяли x *кг* сплава № 2 и $8-x$ *кг* сплава № 1. Ясно, что масса золота в сплаве № 2 пропорциональна массе x этого сплава, а масса золота в сплаве № 1 пропорциональна массе $8-x$ этого сплава, то есть линейно зависит от x. Поэтому масса золота в сплаве № 3, составленном из сплавов № 1 и № 2, также линейно зависит от x. Построим график этой зависимости в системе координат с осями: Ox — «масса сплава № 2 в 8 *кг* сплава № 3» и Oy — «$\frac{1}{80}$ массы золота в 8 *кг* сплава № 3»; получится прямая линия (рис. 5).

Эту прямую можно построить по двум ее точкам: (8, 24) и (0, 32). Они возникают из граничных значений для x: если искомый сплав состоит из $x_1 = 8$ *кг* сплава № 2 (и 0 *кг* сплава № 1), то, очевидно, $y_1 = 24$; если же сплав № 3 состоит из 8 *кг* сплава № 1 (то есть $x = 0$), то $y_0 = 32$. Теперь нам надо найти абсциссу x точки M (красной прямой) с ординатой $y = 25$; из подобия треугольников получаем

$$\frac{x}{8} = \frac{32-25}{32-24},$$

откуда $x = 7$ (*кг*).

---

*) См. Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин, «Сборник задач по элементарной математике», М., «Наука», 1960, задача № 462.

Задача 3. *Переплетчик работал над выполнением заказа 9 часов чистого рабочего времени; закончить работу было поручено другому переплетчику, который сдал ее через 4 часа 48 минут. Если бы оба переплетчика работали вместе, они окончили бы переплетные работы за 6 часов 40 минут. За какой промежуток времени смог бы выполнить всю работу каждый переплетчик в отдельности?*

В подобных задачах подразумевается пропорциональная зависимость между временем t и количеством A выполняемой работы: $A=kt$, где коэффициент k характеризует производительность труда.

Удобен прием решения, основанный на предположении, что задача решена, и на рисунке 6 изображены графики соответствующих процессов. На самом деле графики на рисунке 6 мы изобразим произвольно (без точного соответствия числовым данным задачи); исследуя их, отыщем подобные треугольники, из которых и определим интересующие нас величины. При этом, строго говоря, нет нужды соблюдать масштаб по оси Ox даже для построения точек $\frac{24}{5}$, $\frac{20}{3}$ и 9. Для решения задачи важно лишь то, что на «настоящем» рисунке сохранится прямолинейность графиков и подобие треугольников.

Решение. Величину всего заказа изобразим на оси Oy отрезком OA (рис. 6). Построим $AB \parallel Ox$ (соблюдая лишь одно условие: $AB>9$) и проведем прямую OB — график работы первого рабочего; абсцисса t_1 ($t_1>9$) точки B — первое искомое время.

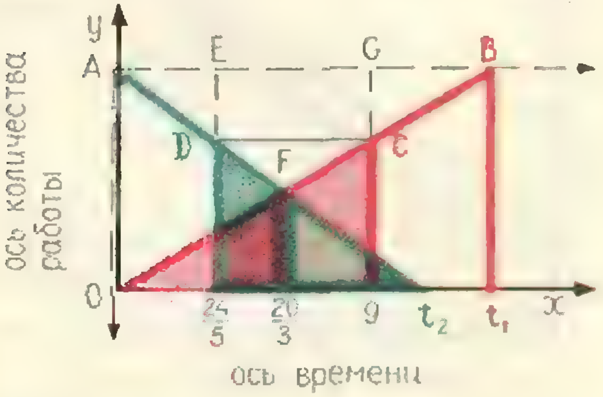


Рис. 6. Графики работы переплетчиков (условные).

Отметим на оси Ox две точки: $\frac{24}{5}$ и 9, соответствующие моментам времени 4 час. 48 мин. и 9 час. На прямой OB отметим точку C с абсциссой 9; ордината точки C — это количество работы, выполненной первым переплетчиком за 9 часов. Тогда отрезок GC соответствует той части всей работы, которая осталась на долю второго рабочего.

Известно, что второй рабочий выполнил ее за $\frac{24}{5}$ часа, поэтому отметим на прямой AB точку E с абсциссой $\frac{24}{5}$ и построим $ED=GC$. Прямая AD — график работы второго переплетчика. (Этот график отнесен к системе осей AB, AO, на которых выбраны те же масштабы, что на осях Ox и Oy.)

Точка t_2 пересечения прямой AD и оси Ox — второе искомое время. Абсцисса $\frac{20}{3}$ точки F пересечения графиков OB и At_2 — время (6 час. 40 мин.) окончания работ при совместной работе переплетчиков.

Выделяя две пары подобных треугольников (пару с гипотенузами Dt_2, Ft_2 и пару с гипотенузами OC, OF), образуем две пропорции, из которых, учитывая, что ординаты точек C и D равны, получаем два уравнения, каждое из которых содержит только одно неизвестное:

$$9:\frac{20}{3}=\frac{t_2-\frac{24}{5}}{t_2-\frac{20}{3}}, \qquad t_1:9=\frac{12}{12-\frac{24}{5}}.$$

Решая их, находим $t_1=15$ час, $t_2=12$ час.

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1970). *Три гонщика A, B, C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A*

на расстоянии $^1/_3$ длины шоссе, а гонщик C — перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 минут A впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем C. Сколько времени тратит на круг гонщик A?

Немудрено запутаться в этой сети переплетающихся движений, если следовать традиционной, «привычной» схеме составления системы уравнений*). Но вся эта сеть становится прозрачной и приводит лишь к одному уравнению, если привлечь графики.

Решение. Пусть Ox — ось времени, Oy — ось расстояний (рис. 7), $OM_1=1$ — длина кольцевого шоссе, M_1M_2 — второй «виток» этого же шоссе. Точки B, C и D таковы, что

$$OB=BC=CM_1=M_1D=1/3.$$

Прямая OA — предполагаемый график движения гонщика A. Построим прямую $DD_1 \parallel Ox$ и отметим точку E ее пересечения с OA; по условию, BE — график движения гонщика B. Пусть x — абсцисса точки E; отметим на оси Ox точку F такую, что $OF=x+10$, и проведем прямую $FG \perp Ox$ до пересечения с OA в точке G. Тогда, по условию, CG — график движения гонщика C.

Из рисунка находим

$$v_A=\frac{OD}{x}=\frac{4}{3x}, \quad v_B=\frac{BD}{x}=\frac{1}{x},$$

кроме того, по условию,

$$v_C=\frac{1}{x+2{,}5}.$$

Построим $CC_1 \parallel Ox$; видно, что разность путей $FG-C_1G$ гонщиков A и C за время $x+10$ (мин.) равна $FC_1=OC=\frac{2}{3}$. Получаем уравнение

$$\frac{4}{3x}(x+10)-\frac{1}{x+2{,}5}(x+10)=\frac{2}{3}.$$

Решая его, находим $x=20$ (мин.). За это время гонщик A делает $^4/_3$ круга, следовательно, на один круг он тратит 15 (мин.).

В заключение рассмотрим аналогичную задачу, в условии которой круговые движения еще более запутаны.

Задача 5 (МГУ, мехмат, 1970). *Три гонщика (A, потом B и затем C) стартуют с интервалом в 1 минуту из одной точки кольцевого шоссе и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 минут. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через 3 минуты он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик A?*

Решение. На оси времени Ox отмечаем три точки 0, 1, 2 (моменты стартов). На оси расстояний Oy откладываем последовательно четыре равных отрезка, символизирующих длину кольцевого шоссе (рис. 8). Проведем параллельно оси Ox вспомогательные прямые: I, II, III, IV.

При построении графика OA движения гонщика A выберем произвольный наклон к оси Ox, но такой, чтобы абсцисса x (искомое время) точки пересечения прямых OA и I удовлетворяла условию $x>2$. Из точки A пересечения прямых OA и III опускаем перпендикуляр на ось Ox и отмечаем точку B его пересечения с

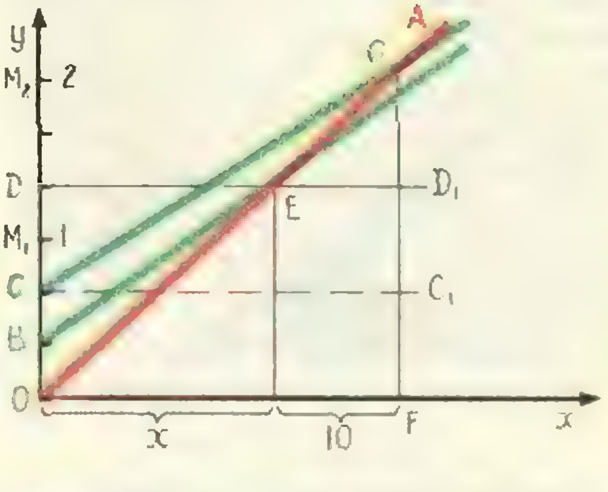


Рис. 7. Графики движения гонщиков, стартующих одновременно.

---

*) См. статью Н. Н. Колесникова «Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году», «Квант» № 3, 1971, стр. 45—50.

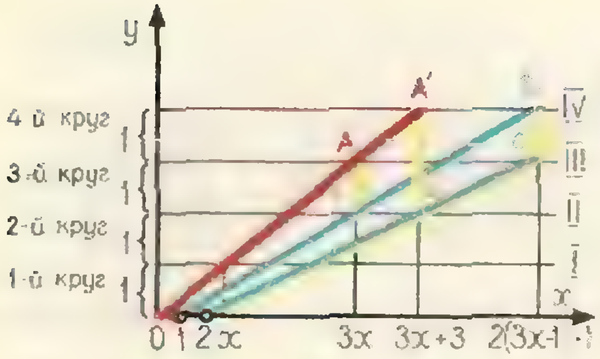


Рис. 8. Графики движения гонщиков, стартующих из одной точки.

прямой II и точку $3x$ на оси Ox. Прямая $1B$ — график движения гонщика B (всякий обгон при движении по окружности и при общей стартовой точке означает, что обгоняющий прошел на один круг больше обгоняемого).

Аналогичным образом по точке B_1 пересечения прямых $1B$ и IV находим точку C на прямой III, определяем ее абсциссу $2(3x-1)+1$ и строим график — прямую $2C$ — движения гонщика C.

Длину кольцевого шоссе можно принять за единицу и найти скорости гонщиков (тангенсы углов наклона графиков, определяемые из соответствующих прямоугольных треугольников):

$$v_A=\frac{1}{x},\quad v_B=\frac{2}{3x-1},\quad v_C=\frac{1}{2x-1}.$$

Согласно условию задачи в момент $3x+3$ произошел второй обгон гонщиком A гонщика C, следовательно разность пройденных ими путей (отрезок $A'C'$) равна 2. Составляем уравнение:

$$v_A(3x+3)-v_C\,(3x+1)=2,$$

или

$$\frac{3x+3}{x}-\frac{3x+1}{2x-1}=2.$$

Из двух его корней условию удовлетворяет только $x=3$ (мин.).

Упражнения

1. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми весовыми порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их одинаковыми, но иными, чем первый магазин, весовыми порциями. При этих условиях через b дней, прошедших от начала перевозочных операций на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозку магазины закончили одновременно и вес арбузов, полученных первым магазином, равен весу арбузов, полученных вторым магазином?

2. (МГУ, биофак, 1968). Бак наполняется водой с помощью нескольких насосов. Сначала включили три насоса одинаковой производительности, а через 2,5 часа после начала их работы подключили еще два насоса другой, но тоже одинаковой производительности. В результате через 1 час после подключения двух насосов воды в баке до полного объема не хватало 15 $м^3$, а еще через час бак был полон. Один из двух подключенных позже насосов мог бы наполнить бак за 40 часов. Найти объем бака.

3. (МГУ, химфак, 1970). Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал $^2/_5$ всего пути от B до A?

4. Два спортсмена выбегают одновременно (первый — из A в B, второй — из B в A) и встречаются на расстоянии a $м$ от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает обратно, и они вновь встречаются на расстоянии b $м$ от B. Найти длину дорожки *).

5. (МГУ, мехмат, 1970). Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 минуты после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 минут?

---

*) Это — задача № 190 из книги Н. С. Залогина «Конкурсные задачи по математике». Киев, 1964. Использование графиков подскажет полное условие существования решения этой задачи: $3a>2b$, ускользнувшее от внимания автора книги (он указывает лишь условие $3a>b$, не являющееся достаточным).

СТАТИКА

Л.Г. АСЛАМАЗОВ

Какие условия накладываются на силы, приложенные к телу, если тело находится в покое? Ответ на этот вопрос дает статика.

Прежде всего ясно, что сумма всех сил (разумеется, векторная) должна быть равна нулю. В противном случае по II закону Ньютона тело обязательно двигалось бы с ускорением. Но одного этого условия недостаточно. Если, например, приложить к телу две силы, равные по величине, но противоположно направленные (*и такие*, чтобы линии их действия не совпадали), то, очевидно, векторная сумма сил равна нулю, но тело не будет находиться в покое — оно будет вращаться (рис. 1).

Вторым условием, которому должны удовлетворять силы, является равенство нулю суммы их моментов относительно какой-либо точки. Напомним, что моментом силы F относительно точки O (рис. 2) называется произведение $F\cdot h$, где h — расстояние от точки O до линии действия силы (плечо силы). Момент положителен, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицателен в противоположном случае.

Точку O можно выбирать произвольно. В самом деле, если сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки O равна нулю, то сумма моментов относительно любой другой точки O_1 также равна нулю. Рассмотрим момент силы F, действующей *на тело (рис. 2), относительно* точки O_1:

$$Fh_1=F(h-a\cos\alpha)=Fh-aF\cos\alpha.$$

Величина $F\cos\alpha$ — это проекция силы F на направление OO_2. Так как векторная сумма всех сил, по условию равна нулю, то и сумма их проекций на любое направление тоже равна нулю. Поэтому $\Sigma Fh_1=\Sigma Fh-a\Sigma F\cos\alpha=0$.

Итак, для того чтобы тело находилось в покое, должны быть равны нулю векторная сумма всех сил и ал-

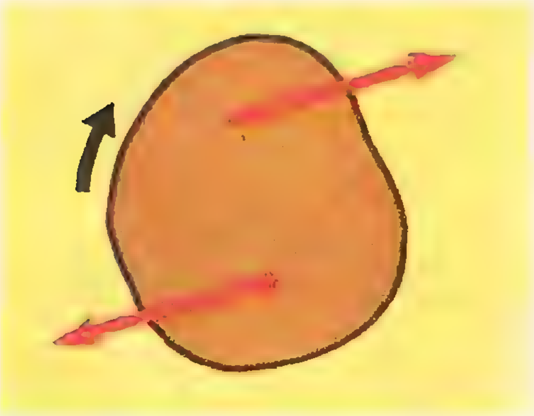


Рис. 1.

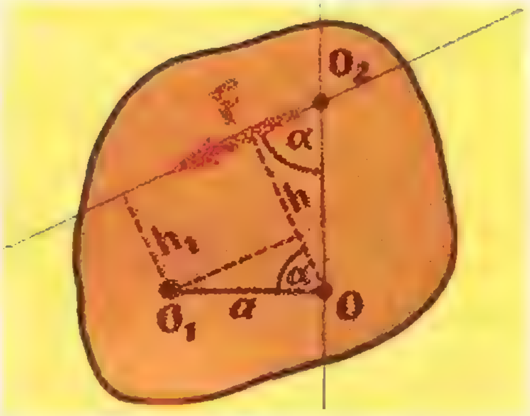


Рис. 2.

гебраическая сумма (то есть сумма с учетом знаков) моментов всех сил относительно произвольной точки. Часто бывает удобно пользоваться следствием первого условия — равенством нулю алгебраической суммы проекций всех сил на произвольно выбранное направление.

Казалось бы (поскольку направление, на которое мы проектируем силы, и точка, относительно которой мы считаем моменты, могут быть произвольными), выбирая различные направления и различные точки, можно получать сколько угодно уравнений для нахождения сил, приложенных к телу. Однако это не так. Часть полученных уравнений окажется следствием других. Для случая, когда все силы лежат в одной плоскости, можно записать всего три уравнения.

Какими именно условиями равновесия удобнее пользоваться, зависит от конкретной задачи.

Задача 1. Труба массы m лежит на земле. Какое минимальное вертикальное усилие надо приложить для того, чтобы приподнять ее за один из концов (рис. 3)?

Задача решается в одну строчку, если воспользоваться уравнением моментов относительно точки O

$$mg\frac{l}{2}-Fl=0 \quad (l \text{ — длина трубы}),$$

откуда $F=\frac{mg}{2}$. Правильный выбор точки позволил сразу же исключить из рассмотрения неизвестную силу N, которая нас в этом случае не интересовала.

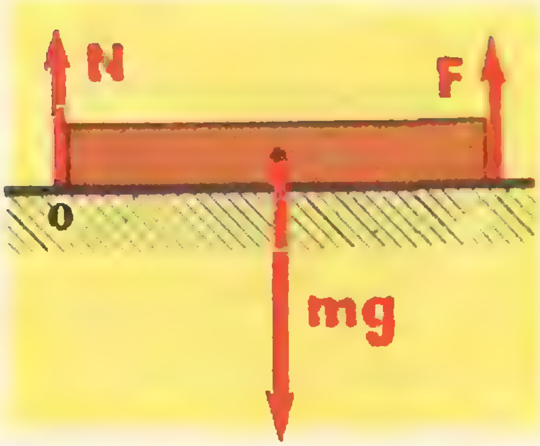


Рис. 3.

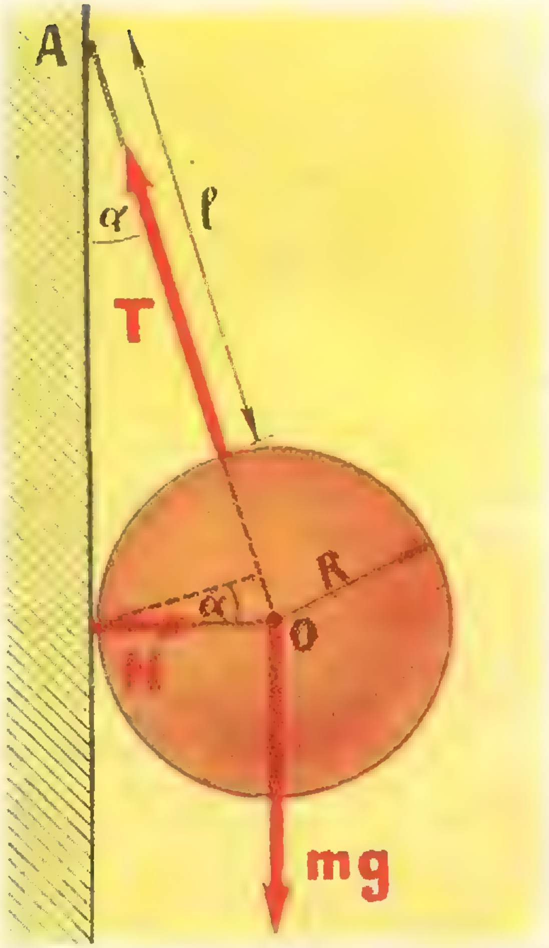


Рис. 4.

Задача 2. К вертикальной гладкой стене в точке A на веревке длины l подвешен шар массы m (рис. 4). Чему равны сила натяжения веревки T и сила давления шара на стенку N, если радиус шара равен R?

Воспользуемся уравнением моментов относительно центра шара O. Моменты сил mg и N относительно точки O равны нулю. Следовательно, линия действия силы натяжения T также проходит через центр шара.

В качестве двух других условий можно взять, например, равенство нулю проекций всех сил на горизонтальное и вертикальное направления:

$$T\cos\alpha=mg, \quad T\sin\alpha=N.$$

Из чертежа находим, что $\sin\alpha=\frac{R}{l+R}$, а $\cos\alpha=\frac{\sqrt{(l+R)^2-R^2}}{l+R}$.

В некоторых случаях оказывается удобным пользоваться только уравнениями моментов.

Задача 3. Шар массы m опирается на две гладкие плоскости, образующие двугранный угол. Нижняя плоскость наклонена к горизонту под углом α, а верхняя — под углом β к нижней (рис. 5). Определить силы, с которыми шар давит на плоскости.

Запишем уравнение моментов относительно точки A:

$$mgR\sin\alpha - N_2 R\sin\beta = 0.$$

Отсюда $N_2 = \dfrac{mg\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Сила N_1 так же легко находится из уравнения моментов относительно точки B:

$$N_1 R\sin\beta - mgR\sin(\beta+\alpha) = 0,$$

или $N_1 = \dfrac{mg\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta}$.

Во многих случаях равновесие становится возможным только благодаря силам трения, которые уравновешивают приложенные силы. При этом важно понимать, что сила трения покоя не всегда равна kN (k — коэффициент трения, N — сила нормального давления). Это выражение дает только максимально возможное значение силы трения. Так, например, сила трения, действующая на тело, покоящееся на наклонной плоскости с углом наклона α, просто равна составляющей силы тяжести, параллельной наклонной плоскости: $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$. Она становится равной $kN = kmg\cos\alpha$ только в момент начала движения при $\alpha = \operatorname{arctg} k$. На тело, лежащее на горизонтальной плоскости ($\alpha = 0$), сила трения вообще не действует.

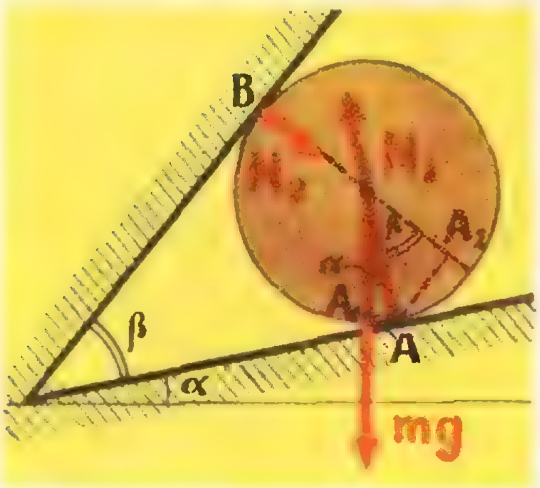


Рис. 5.

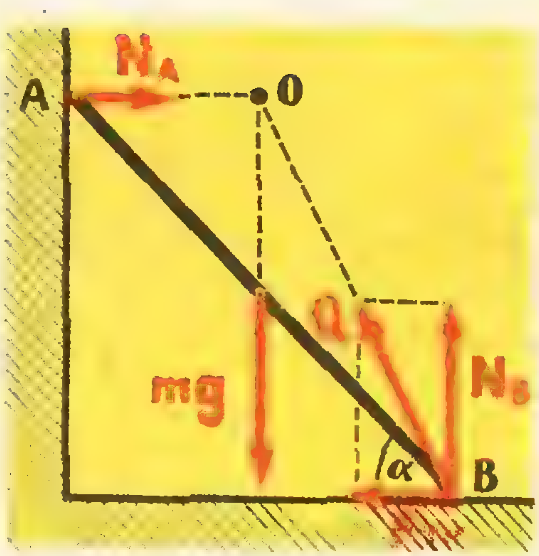


Рис. 6.

Разберем типичный пример задачи с трением.

Задача 4. К совершенно гладкой вертикальной стенке приставлена лестница массы m, наклоненная под углом α к горизонту. Как направлены и чему равны силы, действующие на лестницу со стороны стенки и пола?

Для решения задачи спроектируем все силы, действующие на лестницу, на горизонтальное и вертикальное направления и воспользуемся уравнением моментов относительно точки B (рис. 6):

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - N_A l\sin\alpha = 0,$$

где l — длина лестницы. Из этого уравнения находим, что давление на стенку

$$N_A = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = N_A = \dfrac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$, а давление на пол $N_B = mg$. Сила реакции пола равна векторной сумме сил N_B и $F_{\text{тр}}$:

$$Q = \sqrt{N_B^2 + F_{\text{тр}}^2} = \frac{mg}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$$

и наклонена к горизонту под углом

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{N_B}{F_{\text{тр}}} = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha).$$

Линию действия этой силы можно получить построением: она должна проходить через точку O пересечения линий действия сил N_A и mg, так как сумма моментов всех сил относительно этой точки также равна нулю.

Таким образом, мы получили, что для достижения равновесия сила трения должна равняться $\frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Это возможно, если коэффициент трения $k \geqslant \frac{F_{\text{тр}}}{N_B} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. При $k = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$ сила трения $\frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ равна максимальному возможному значению kN_B; при бо́льших k для достижения равновесия достаточно некоторой части максимальной возможной силы трения.

Заметим, что нужное для равновесия значение k зависит от угла: при α, близком к нулю (лестница почти горизонтальна), нужен большой коэффициент трения, а при приближении α к $\frac{\pi}{2}$ он стремится к нулю.

Задача 5. Какой минимальной горизонтальной силой можно опрокинуть через ребро куб, лежащий на горизонтальной плоскости?

Обычно при решении такой задачи исходят из того, что при опрокидывании момент приложенной силы F относительно оси вращения O (рис. 7) уравновешивает момент силы тяжести. Это, конечно, правильно. Но почему мы при этом не учитываем момента силы давления со стороны пола N? На этот вопрос часто отвечают неверно. Дело в том, что сила N не всегда проходит через центр кубика. Когда мы прикладываем к кубику силу F, линия действия силы N (равнодействующей сил давления) смещается в сторону точки O, а в момент опрокидывания сила N проходит через эту точку, и ее момент равен нулю.

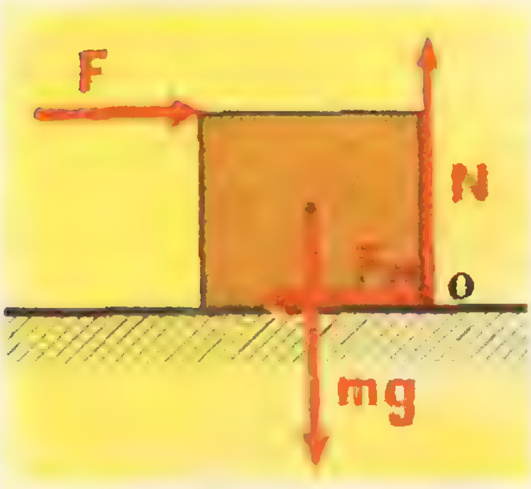


Рис. 7.

Выбором точки O для уравнения моментов мы исключаем из рассмотрения силу реакции пола и упрощаем решение задачи. Ясно, что сила F будет минимальной, когда она прикладывается к верхней грани куба и равна $\frac{mg}{2}$.

При любом ли коэффициенте трения между кубиком и полом возможно такое опрокидывание? Очевидно, нет. Для опрокидывания необходимо, чтобы при $F = \frac{mg}{2}$ кубик еще не начал скользить по плоскости. Следовательно, $\frac{mg}{2} \leqslant F_{\text{тр}\max} = kmg$, или $k \geqslant \frac{1}{2}$.

Интересно, что кубик можно опрокинуть и при меньшем коэффициенте трения силой, меньшей чем $\frac{mg}{2}$. Подумайте, как при этом надо направить силу.

Упражнения

1. Каков должен быть коэффициент трения для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскальзывал из него? Угол при вершине клина равен 30°.

2. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α стоит цилиндр радиуса r. Какова наибольшая высота цилиндра, при которой он еще не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.

3. Колесо радиуса r и массы m стоит перед ступенькой высотой h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку?

4. На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху на них кладут такое же бревно. При каком минимальном коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся?

Заочная олимпиада Азиатской части СССР

Мы публикуем тексты задач заочной олимпиады по математике, физике и химии для учащихся школ и других средних учебных заведений Сибири, Казахстана, Дальнего Востока и Средней Азии.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные, краевые, республиканские олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться органами народного образования по домашним адресам. Лучшие из победителей областных и республиканских олимпиад примут участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады, а также будут приглашены в летнюю школу Сибирского отделения Академии наук СССР.

После каждой задачи в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается, однако можно попробовать свои силы и на задачах для более старших классов. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте укажите название предмета. В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой; в этом конверте вам пришлют извещение о результатах работы. Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач не переписываются, но указываются их номера.

В начале письма не забудьте указать (разборчиво):

1. Свою фамилию, имя и отчество.
2. Почтовый домашний адрес (подробный).
3. Класс, школу, училище, техникум и т. д., адрес.
4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение,— 1 февраля 1972 года по почтовому штемпелю. Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

Участники олимпиады направляют решения по адресу: Новосибирск, 90, Олимпиада.

Желаем всем участникам олимпиады самых больших успехов.

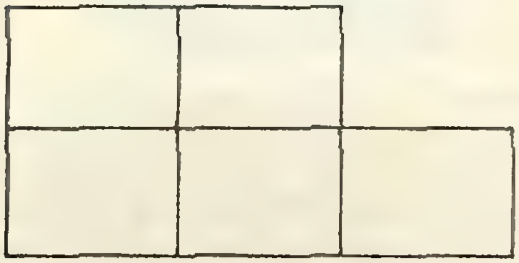
Комитет по проведению олимпиад
Сибирского отделения
Академии наук СССР

МАТЕМАТИКА

1. На плоскости даны три точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой. Четвертая точка A, отличная от них, симметрично отражается относительно P_1, полученная точка симметрично отражается относительно P_2, новая точка отражается относительно P_3, затем относительно P_1, P_2, P_3, P_1 и так далее. Обязательно ли на некотором шаге полученная точка совпадает с первоначальной точкой A? (10)

2. В окружность вписывается четырехугольник, после чего в каждый из четырех образовавшихся сегментов вписывается окружность, касающаяся соответствующей стороны четырехугольника в ее середине (рис. 1). Для какого четырехугольника сумма длин полученных четырех окружностей будет наименьшей? (10)

3. Легко доказать, что квадраты 10×10, 20×20, 30×30 и т. д. покрываются фигурами вида из пяти клеток, а квадрат 5×5 — нет (сторона клетки принята за единицу).



Можно ли покрыть такими фигурами квадраты 15×15, 25×25, 35×35 и т. д.? (9—10)

4. На бесконечном листе клетчатой бумаги выбрано пять узлов (узлом называется точка, где пересекаются линии сетки). Докажите, что из этих пяти узлов наверняка можно выбрать два таких, что соединяющий их отрезок проходит еще через один узел сетки. (9—10)

5. Проведите хорду, которая делится двумя данными радиусами данной окружности в данном отношении $k_1:k_2:k_3$. (9—10)

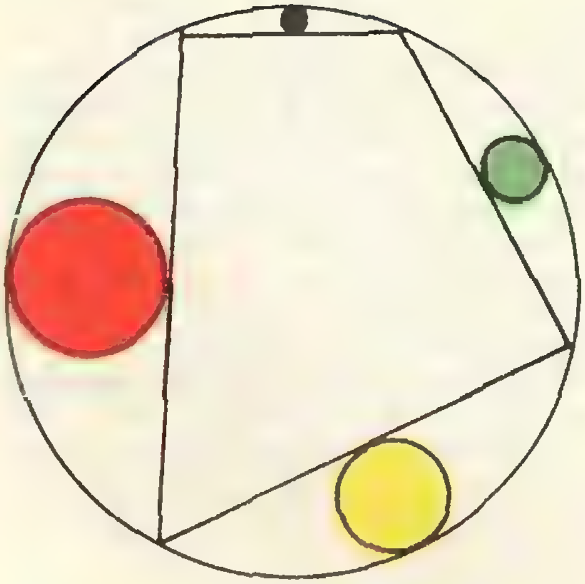


Рис. 1.

6. Впишите в данный треугольник ABC параллелограмм $BMNK$ так, чтобы точки K, M, N лежали на сторонах AB, BC и AC соответственно и чтобы диагональ KM имела заданную длину. (9)

7. Докажите, что число 11...11, записываемое 2^n единицами, имеет не менее 2^n различных делителей (включая 1 и само это число). (8—9)

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике отношение квадрата радиуса вписанной окружности к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/5. (8—9)

9. В десяти рюкзаках находится 50 банок консервов, причем в разных рюкзаках — разное количество банок. Разрешается «уравнивать» количество банок в двух рюкзаках, то есть из рюкзака с большим количеством банок перекладывать в рюкзак с меньшим количеством несколько банок так, чтобы разница в количестве банок в них стала минимальной. Докажите, что через некоторое число таких «уравниваний» можно добиться того, чтобы в каждом рюкзаке оказалось ровно по 5 банок. (8)

10. В одной из двух изолированных комнат находится электрическая лампочка, а в другой — пять выключателей, один из которых подсоединен к лампочке. Двум экспериментаторам требуется узнать, какой именно выключатель соединен с лампочкой, действуя следующим образом. Они расходятся по разным комнатам, один щелкает (как угодно) выключателями, другой следит за лампочкой, а потом они встречаются.

Как им решить задачу (часов у них нет)? (8)

11. Докажите, что m^2+1 не делится на 19 ни при каком целом m. (8)

ФИЗИКА

1. Соломинка длины l, массы M падает, сохраняя вертикальное положение. По ней ползет муравей массы m с постоянной скоростью v. Какую работу совершит муравей, перейдя от одного конца соломинки до другого?

Сопротивлением воздуха пренебречь. (8)

2. Устойчиво ли равновесие линейки, симметрично лежащей на закрепленном цилиндре.

Проскальзывания нет. Все размеры заданы. (8—9)

3. В кастрюле с тяжелой крышкой вскипятили воду. Кастрюлю сняли с плиты, после чего в спокойную воду насыпали чайную заварку. Вода бурно закипела. Объясните это явление. (8—9)

4. Плоскую фигуру разрезали на две части по прямой, проходящей через центр тяжести. Равны ли массы этих частей? (8)

5. На гвозде висел, а потом начал соскальзывать однородный канат длины L. Вес куска каната единичной длины равен d. Найти силу давления каната на гвоздь, когда расстояние между его концами равно l. Трением пренебречь. (8—10)

6. Почему спицы велосипедного колеса располагают не по радиусу, а слегка наискось? (рис. 2) (9)

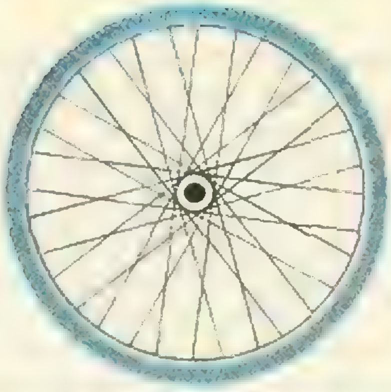


Рис. 2.

7. Указать направление сил трения, действующих на передние и задние колеса автомобиля, если только задние — ведущие. (8)

8. На дне герметически закупоренного сосуда, доверху наполненного водой, находятся два одинаковых пузырька воздуха (рис. 3). Давление на дне равно p. Один из пузырьков всплывает. Каким станет давление на дне? (9—10)

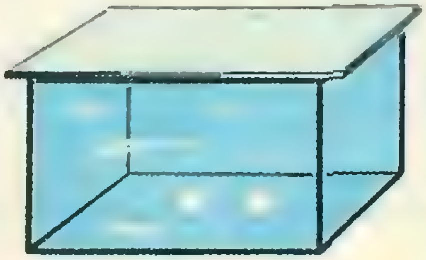


Рис. 3.

9. Почему конькобежец при торможении сводит носки коньков, а не пятки? (9—10)

10. На тележке массы M закреплена коробка, масса которой пренеб-

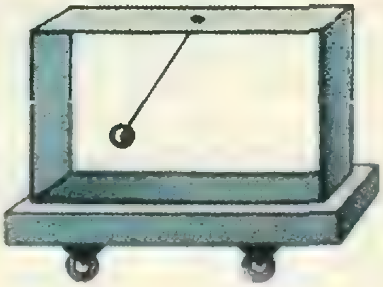


Рис. 4.

режимо мала. К верхней грани коробки прикреплен маятник (рис. 4). Длина маятника l, масса груза m. Пренебрегая трением тележки о горизонтальную плоскость, найти период малых колебаний маятника. (9—10)

11. Две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 заземлены (рис. 5).

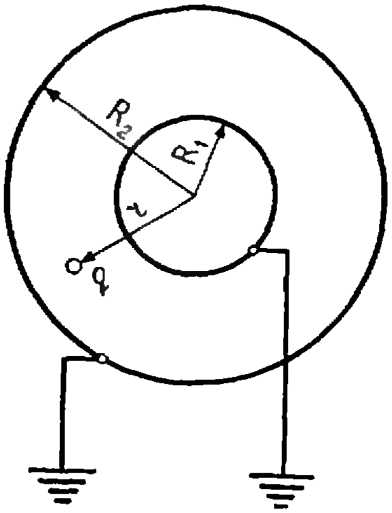


Рис. 5.

Между сферами на расстоянии r от их общего центра находится заряд q. Найти полные заряды на каждой из сфер. (10)

12. На аноде триода с плоскими электродами поддерживается напряжение u (рис. 6). Катод лампы заземлен, а сетка изолирована. Площадь

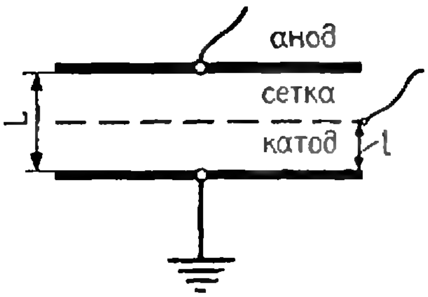


Рис. 6.

пластин S, расстояние между анодом и катодом L, между катодом и сеткой — l. При каком заряде на сетке ток через лампу прекратится? (10)

ХИМИЯ

8 класс

1. При синтезе из элементов аммиака выделяется 11 *ккал/моль*, а при синтезе из элементов гидразина (N_2H_4) поглощается 10 *ккал/моль*. Определите энергию связей N — H и N — N, если энергия связи в молекулярном водороде 104 *ккал/моль*, а в молекулярном азоте 170 *ккал/моль*.

2. Известно, что в некоторых природных силикатных минералах анионы имеют структуры, в которых тетраэдры SiO_4^{2-} образуют бесконечные двумерные цепи таким образом, что некоторые из атомов кислорода принадлежат одновременно двум тетраэдрам. (Такие атомы кислорода называют мостиковыми.) Какова будет формула аниона минерала, в котором три атома кислорода в любом тетраэдре SiO_4^{2-} являются мостиковыми? Нарисуйте фрагмент структуры этого аниона. Какие минералы с таким анионом вы знаете? Каковы их механические свойства и как они связаны со структурой минерала?

3. Известно, что ацетат натрия CH_3COONa гораздо легче образует пересыщенные растворы, чем хлористый натрий. Предложите объяснение этому явлению.

4. Образец магниевой стружки сожгли на воздухе и золу растворили в 60 *мл* 1 *М* соляной кислоты. На нейтрализацию этого раствора пошло 12 *мл* 1 *М* раствора едкого натра. После добавления избытка щелочи раствор прокипятили, а выделившийся при этом газ пропустили в колбу с 10 *мл* 1 *М* соляной кислоты. На нейтрализацию раствора в колбе пошло 6 *мл* 1 *М* раствора едкого натра. Определите вес образца магния и процентный состав золы.

9 класс

1. Растворимость йода в воде составляет 0,00134 *моль/л*, а в 0,0070 *М* растворе йодида калия — 0,0048 *моль/л*. Рассчитайте растворимость йода в 0,1 *М* раствора йодида

калия. Покажите, что определенная вами величина растворимости не зависит от предположения о том, в какой из анионов — I_3^- или I_5^- — переходит йод при растворении в растворе йодистого калия.

2. Известно, что в солянокислых растворах металлический барий является более сильным восстановителем, чем кальций, а в щелочных растворах — наоборот, кальций является более сильным восстановителем, чем барий. Объясните это явление.

3. В сосуде содержатся молекулы водорода (H_2), дейтерия (D_2) и дейтероводорода (HD) общим количеством 10^{10} молекул. Анализ этой смеси показал, что количество атомов дейтерия в ней составляет 0,1 *ат*%. Определите, каково содержание молекул каждого сорта в этой смеси, если распределение атомов дейтерия по различным сортам молекул носит случайный характер.

4. Соединение *А* — слегка окрашенный газ, который легко растворяется в воде без выделения каких-либо газообразных продуктов, образуя кислый раствор *Б*. Если 32,5 *мг* газа *А* растворить в воде, то на нейтрализацию полученного раствора потребуется 10 *мл* 0,1 *М* раствора едкого натра. Раствор *Б* не реагирует с растворами азотнокислого серебра и йодистого калия, но дает белый осадок с раствором азотнокислого кальция. При взаимодействии раствора *Б* с раствором закисного сернокислого железа, подкисленного концентрированной серной кислотой, раствор приобретает коричневую окраску. Когда раствор *Б* взаимодействует с алюминием и избытком едкого натра, выделяется газ *В*, который изменяет цвет влажной индикаторной бумаги. Раствор *Б* при длительном пребывании в стеклянной колбе разъедает ее. Определите соединение *А* и напишите уравнения всех описанных реакций.

10 класс

1. Определите, к какой величине стремится отношение констант первой и второй ступеней диссоциации k_1/k_2 для органических двухосновных кислот типа HOOC—$(CH_2)n$—COOH с увеличением длины углеводородной цепи. Почему у кислот с короткими цепями отношение k_1/k_2 значительно отличается от полученной вами величины?

2. Вещество, именуемое 3-метил-5-этилпиразолом, в действительности является смесью изомерных соединений, находящихся в подвижном равновесии. Какие это соединения? Пояснение: пиразол — пятичленное гетероциклическое соединение состава $C_3H_4N_2$. Два атома азота в цикле непосредственно связаны друг с другом. Нумерация атомов, образующих цикл, начинается с того из атомов азота, который образует связи с большим числом других атомов, и продолжается в сторону второго атома азота.

3. Охарактеризуйте сравнительную силу пентаметилбензойной, пентафторбензойной и бензойной кислот.

4. В результате взаимодействия соли карбоновой кислоты с бромом была получена неорганическая соль и смесь двух газообразных веществ. Полученная соль очень мало растворима в воде, но значительно лучше растворяется в водных растворах аммиака и галогенидов щелочных металлов. Кроме того, эта соль разлагается при действии света. При пропускании смеси газообразных продуктов через раствор гидроокиси кальция один из них полностью поглощается и при этом осаждается белое кристаллическое вещество. Прошедшее через раствор вещество при взаимодействии с натрием превращается в газообразный углеводород, 13,4 *г* которого при 50° С и 600 *мм* ртутного столба занимают объем 15 *л*. Напишите уравнения реакций, о которых идет речь.

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

От галактик до элементарных частиц

Ф.С.ЗАВЕЛЬСКИЙ
ВЗВЕШИВАНИЕ МИРОВ, АТОМОВ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Издательство «Атомиздат» в 1970 году выпустило любопытную книгу Ф. С. Завельского «Взвешивание миров, атомов и элементарных частиц» *). Сам автор следующим образом определил основную идею своей книги:

«Описывая устройство какой-нибудь конструкции, обычно чертят несколько ее проекций (вид сверху, вид сбоку, ...). Если конструкция сложная, то, кроме этого, вычерчивают один или несколько ее разрезов и притом так, чтобы сечения прошли через наиболее сложные узлы.

В этой книге дан «разрез» Мира по массе. Масса является одной из основных характеристик вещества, поэтому естественно, что рассказ о ней в той или иной мере затрагивает целый ряд важных научных и технических проблем».

Действительно, все тела, начиная от мельчайших элементарных частиц и кончая Вселенной, обладают массой — этой универсальной характеристикой материи. Автор начинает свой рассказ с описания конструкции самых древних весов и единиц измерения и заканчивает его проблемами, над которыми думают физики наших дней.

Сравнительно недавно физики научились измерять величину массы различных элементарных частиц, а астрономы — определять массы звезд и галактик. О том, какими методами они при этом пользуются, и рассказано в книге Ф. С. Завельского. Но это лишь одна сторона рассматриваемой автором проблемы измерения массы.

Вторая сторона проблемы, также рассмотренная автором, состоит в том, что само понятие массы тела по мере развития физики видоизменялось и углублялось. Ф. С. Завельский в своей книге показывает, как зародились и сформировались научные представления о массе, как они изменялись со временем.

В механике Ньютона масса тела — постоянная величина, не зависящая от характера движения этого тела. В специальной теории относительности масса тела изменяется с изменением скорости его движения. Кроме того, даже у покоящегося тела оказался огромный запас энергии, однозначно определяемый массой тела по знаменитой формуле $E = mc^2$. Выяснилось также, что образование системы взаимодействующих тел неизбежно связано с потерей некоторой доли массы тел, входящих в систему. Но и сегодня, после всех этих открытий, физики не считают, что им уже все известно о том, что же такое масса.

Оригинальный подход автора к проблеме массы заставил его привлечь в свою книгу весьма обширный материал из области физики и астрономии. Это богатство материала сделало книгу очень интересной, но с неизбежностью привело к тому, что в некоторых ее местах изложение рассматриваемых вопросов оказалось слишком беглым, поверхностным. Нередко автор скороговоркой сообщает об идее какого-либо измерения, не позволяя читателю вникнуть поглубже в суть этого метода. Это сказывается даже в тех местах, где речь идет об определениях основных понятий, например, в седьмой главе первой части при определении веса и массы. Но что поделать, — ведь в книгах существует «закон сохранения объема», вследствие которого широта изложения в какой-то мере неизбежно связана с уменьшением его глубины.

Книга Ф. С. Завельского является, безусловно, интересной попыткой обозреть обширный круг проблем, связанных с измерением массы. Прочитав эту книгу, узнаешь много интересных фактов, получишь более отчетливое представление о том, как сложна и многообразна проблема измерения массы различных тел. Ну, а для тех, кто захочет поглубже изучить какой-либо из заинтересовавших его в книге вопросов, автор дает в конце ее список дополнительной литературы.

В. А. Лешковцев

---

*) Ф. С. Завельский, Взвешивание миров, атомов и элементарных частиц, Атомиздат, 1970 г., 31000 экз., цена 31 коп.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К заметке «Найдите ошибку»

Мы нашли в треугольнике ABD такую точку, что сумма расстояний от нее до точек A и D и удвоенного расстояния от нее до точки B минимальна.

К статье «Графики в задачах на равномерные процессы»

1. $b+\sqrt{b(b-a)}$ дней.
2. 60 $м^3$.
3. 8 часов 45 мин.
4. $3a-b$. Заметьте, что, согласно условию задачи время до второй встречи больше, чем время, затрачиваемое каждым из спортсменов (и, в частности, вторым спортсменом) на весь путь AB. Отсюда и получается условие $3a-2b>0$.
5. Полкруга.

К статье «Статика»

1. Для равновесия клина необходимо, чтобы вертикальные составляющие силы давления N и силы трения F были равны: $F\cos\alpha=N\sin\alpha$, где 2α — угол при вершине клина. Коэффициент трения

$$k\geqslant\frac{F}{N}=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}15^\circ=0{,}268.$$

2. $h=2r\operatorname{ctg}\alpha$. В момент опрокидывания сила тяжести, действующая на цилиндр, должна проходить через границу основания.

3. Из уравнения моментов относительно точки касания колеса и ступеньки получаем: $F(r-h)=mg\sqrt{r^2-(r-h)^2}$, то есть

$$F=\frac{mg\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}.$$

4. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

К «Задачам о шахматном турнире»

(см. «Квант № 10, стр. 25)

1. Участник, занявший второе место, набрал не более 6 очков. В противном случае он либо занял бы первое место, либо делил первое — второе. С другой стороны, участники, занявшие пятое — восьмое места, уже в своем «собственном турнире» набрали 6 очков. Из этого следует, что они проиграли все партии шахматистам, занявшим первые четыре места.

2. 7 или 14.

4. Воспользоваться принципом Дирихле.

5. 9 участников.

6. Доказательство можно провести методом математической индукции.

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин.**

Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров.**

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 231-08-11

Сдано в набор 30/VII 1971 г.
Подписано в печать 21/IX 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,09.
Тираж 1 зав. 200 тыс. экз. Т-14382.
Цена 30 коп. Заказ 1452.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

Значки Всесоюзных олимпиад

Первая школьная олимпиада по математике была проведена в Ленинграде весной 1934 года.

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена Первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики отнеслись к ней с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли почти все крупнейшие математики-москвичи (академики А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, С. Л. Соболев; члены-корреспонденты Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман; профессор В. Ф. Каган; С. А. Яновская и др.).

С этого времени олимпиады проводились ежегодно. Они завоевали большую популярность. Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

В 1960 году оргкомитет XXIII Московской математической олимпиады совместно с Министерством просвещения РСФСР провели математическую олимпиаду в более широком масштабе. В ней приняли участие команды 13 областей РСФСР и 9 союзных республик.

Этот опыт оказался весьма успешным и с 1961 года уже стали регулярно проводиться Всероссийские математические олимпиады. Они проводятся в четыре тура: школьная, районная, областная и заключительная.

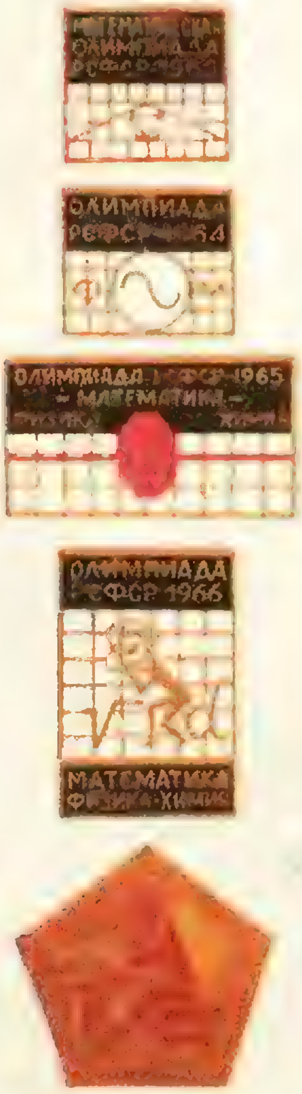
С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады. В них принимают участие команды от всех областей, краев, а также автономных и союзных республик, не имеющих областного деления. Для проведения олимпиад при Министерстве просвещения СССР был организован Центральный оргкомитет, председателем которого является академик И. К. Кикоин.

Четыре победителя из 8—10 классов от каждой области, края, автономных и союзных республик приглашаются на заключительный тур, на котором для каждого класса предлагаются несколько задач различной трудности.

Победители олимпиады отмечаются специальными премиями и похвальными грамотами.

По решению Центрального оргкомитета, начиная с IV Всероссийской олимпиады (1963 г.), выпускаются специальные значки, которыми награждаются все участники олимпиады.

Г. Н. Дьяченко



IV Всероссийская математическая олимпиада (Москва, 1963 г.)

V Всероссийская физико-математическая олимпиада (Москва, 1964 г.)

VI Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Москва, 1965 г.)

VII Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Воронеж, Москва, 1966 г.)

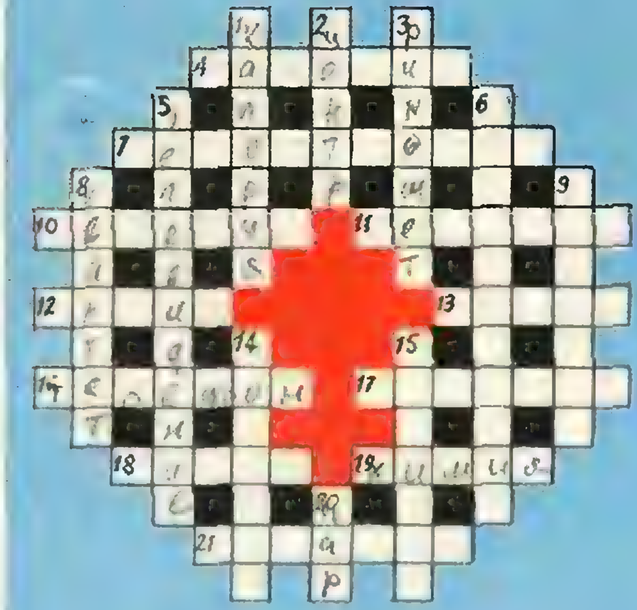
II Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Ленинград, Ереван, 1968 г.): III Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Киев, Алма-Ата, 1969 г.); IV Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Симферополь, Свердловск, 1970 г.).

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

11

10-6

КРОССВОРД



По горизонтали:

4. Объективная реальность, данная нам в ощущениях.

7. Величина, характеризующая частоту наступления события при многократном повторении испытаний.

10. Событие, происходящее в природе.

11. Замедление в развитии или переход к менее совершенным его формам.

12. Химический элемент третьей группы периодической системы элементов.

13. Прозрачная смола, являющаяся хорошим диэлектриком.

16. Электроакустическая система передачи звуков на расстояние.

17. Выдающийся русский кристаллограф.

18. Представитель одной из бурно развивающихся областей науки.

19. Наука, изучающая поведение атомов и молекул.

21. Выдающийся русский физик.

По вертикали:

1. Единица количества тепла.

2. Середина.

3. Отскок после удара.

5. Передача изображения на расстояние с помощью радиоволи.

6. Воспроизведение звуков с сохранением объемности звучания.

8. Ансамбль из четырех элементов.

9. Итог одного из арифметических действий.

14. Вещество, состоящее из макромолекул.

15. Единица громкости звука.

20. Агрегатное состояние воды.

НОМЕР
12

В номере:

Движение комет и открытие атомного ядра 1 *Я. А. Смородинский*
Иоганн Кеплер 8 *А. Эйнштейн*
Еще раз о машинном переводе 11 *В. В. Раскин*
Модели молекул 18 *А. И. Китайгородский*

Математический кружок

Задача о числах в таблице 24 *М. Л. Гервер*

Лаборатория «Кванта»

Вихревые кольца 28 *Р. Вуд*

Задачник «Кванта»

Задачи 31
Решения задач М74—М76, Ф83—Ф88 33 *А. Л. Тоом, А. Г. Кушниренко, Н. Б. Васильев, И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов*

Практикум абитуриента

Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте 39 *М. М. Козлов, И. Г. Кочнев*
Метод площадей 41 *И. Д. Новиков*

Шахматно-математические заметки 47 *Е. Я. Гик*

Обзор читательских писем 51 *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

Информация

Математическая олимпиада в МЭСИ 52 *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин*
XIII Международная математическая олимпиада школьников 53 *И. С. Петраков, В. А. Скворцов*
Впечатления участника олимпиады 54 *М. А. Цфасман*
V Международная физическая олимпиада школьников 56 *М. Д. Карасев Г. С. Тарасюк*

V городская научная конференция школьников Киева 58 *А. И. Шапиро*

Уголок коллекционера

Марки, посвященные Иоганну Кеплеру и Тихо Браге 59 *А. В. Алтыкис*
Значки, посвященные международным математическим олимпиадам 60 *М. Л. Смолянский*
Ответы, указания, решения 62
Указатель статей 1971 года 62

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ДВИЖЕНИЕ КОМЕТ И ОТКРЫТИЕ АТОМНОГО ЯДРА

Я. А. Смородинский

Гиперболы описывают траектории некоторых комет, движущихся в гравитационном поле Солнца. По гиперболам же летят заряженные частицы, рассеившиеся в электрическом поле атомного ядра. Изучение рассеяния α-частиц привело Резерфорда к открытию атомного ядра. При этом он использовал законы движения по гиперболе. О них и будет идти речь в этой статье.

Эта статья трудная. Для того чтобы разобраться в ней, нужны терпение, старательность и хорошее понимание статьи «Движение планет», опубликованной в «Кванте» № 1 за 1971 г.

О гиперболе

В этой статье мы расскажем о свойствах гиперболы. Эта кривая, по которой движутся кометы мимо Солнца, — вторая из конических сечений (о первой из них — об эллипсе — уже была речь в нашем журнале). О свойствах кривых можно рассказывать с разных точек зрения. В статье И. Н. Бронштейна («Квант» № 9, 1970 г.) были описаны свойства эллипса с точки зрения математики; в статье «Движение планет» об эллипсах рассказывалось с точки зрения механики. Это очень удобно — пользоваться попеременно геометрическими и физическими соображениями: такой способ делает многие теоремы наглядными и доказывать их становится проще. Так мы поступим и сейчас, когда нам надо разобраться в свойствах гиперболы.

Из статьи «Движение планет» вы знаете, что если планета вращается вокруг Солнца по эллипсу, то ее полная энергия отрицательна (рис. 1). Это означает, что ее потенциальная энергия тоже отрицательна и по абсолютной величине больше кинетической.

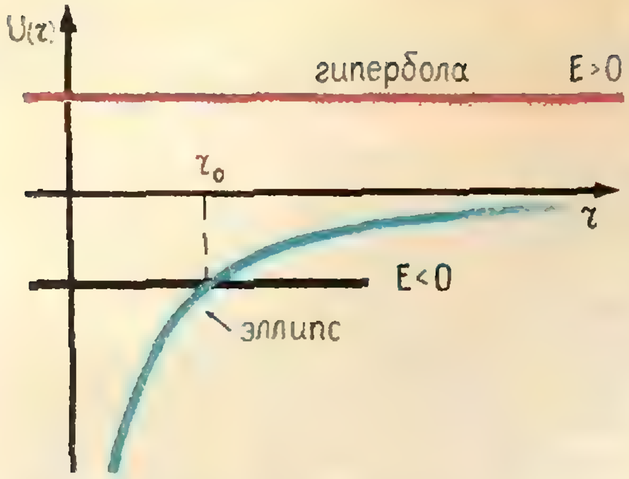


Рис. 1.

Последнее утверждение нуждается, однако, в более точной формулировке. Надо добавить, что формула для потенциальной энергии записана так, что потенциальная энергия стремится к нулю, когда расстояние r между планетой и Солнцем стремится к бесконечности:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} \qquad (1)$$

(γ — гравитационная постоянная, M и m — массы Солнца и планеты).

Итак, планета не может удалиться от Солнца и вращается по эллипсу, если ее полная энергия отрицательна.

А как будет двигаться комета в поле Солнца (или космический корабль в поле Земли), если ее полная энергия положительна, то есть

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} > 0? \qquad (2)$$

Уравнение энергии (2) в этом случае формально совпадает с уравнением энергии для эллиптического движения планеты, только с другим знаком E. Формула для момента количества движения остается той же: $L = mv\rho$ (ρ — прицельный параметр, см. ниже). Поэтому при $E > 0$ мы должны получить те же формулы, которые получали, рассматривая эллиптические траектории планет ($E < 0$), только в некоторых местах вместо знака «плюс» будет стоять знак «минус». Траекторией движения в этом случае будет гипербола.

Гипербола определяется как геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек — фокусов — постоянна. Напомним, что эллипс определялся также, только вместо слова «разность» стояло слово «сумма».

Рисунок 2 показывает, как строятся оба типа кривых на сетке, составленной из двух семейств концентрических окружностей с центрами в точках F_1 и F_2. Разберитесь сами, почему через точки пересечения окружностей проходят эллипсы и гиперболы.

Основная теорема

Проверим теперь, что если $E > 0$, то комета или космический корабль действительно движутся по гиперболе. Для наших целей, поскольку мы будем говорить об атомном ядре и опытах Резерфорда, удобнее говорить не о комете, а о заряженной частице, которая движется в поле тяжелого неподвижного заряда.

Это можно сделать потому, что закон зависимости силы взаимодействия от расстояния в обоих случаях одинаков.

Пусть тяжелая частица заряжена положительно и находится в фокусе F_1 (рис. 2). Если пролетающая легкая частица заряжена отрицательно (ее заряд — z_1e), то она должна лететь по траектории, отмеченной в верхней части рисунка знаком «—» (мы еще не доказали, что это гипербола!). По той же траектории будет лететь отрицательно заряженная частица, если неподвижная частица заряжена отрицательно и находится в фокусе F_2. Это можно доказать, воспользовавшись уравнениями механики — полная энергия и импульс в обоих случаях одинаковы. Если же пролетает частица с положительным зарядом, то она будет двигаться по траектории, отмеченной знаком «+».

Дальше будем рассуждать так же,

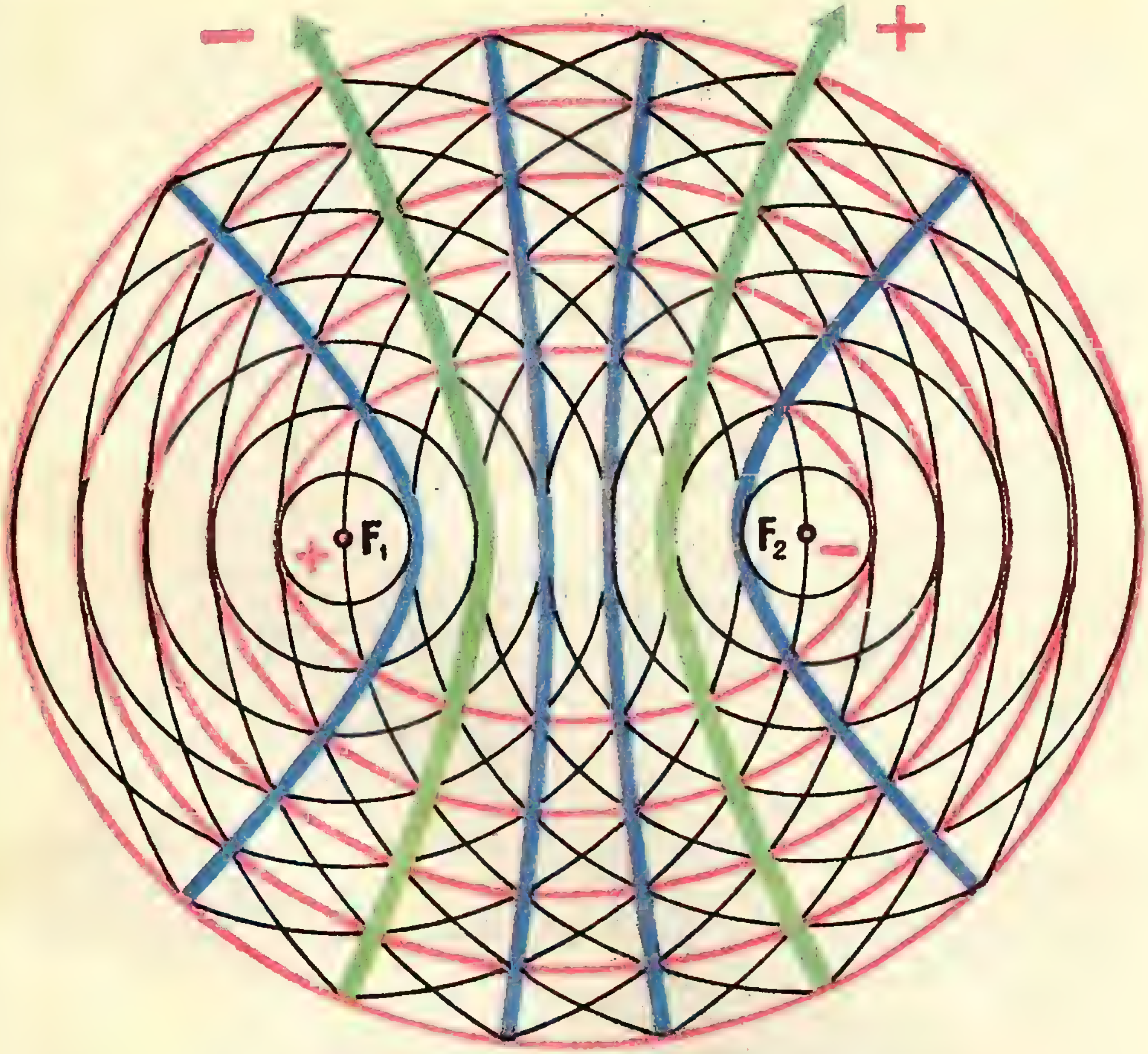


Рис. 2.

как это делалось в статье «Движение планет».

Рассмотрим две задачи одновременно. В одной — положительный заряд $+z_1e$ находится в F_1, в другой — отрицательный заряд $-z_2e$ находится в F_2. Пусть в обоих случаях энергия и угловой момент частицы, которая летит по одной и той же траектории «—», одни и те же. Составим выражения для энергии *):

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{z_1z_2e^2}{r_1} \qquad (3)$$

(для положительной частицы в фокусе F_1),

$$E = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{z_1z_2e^2}{r_2} \qquad (4)$$

(для отрицательной частицы в фокусе F_2).

Найдем отсюда кинетическую энергию и перемножим оба выражения:

$$\frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{mv_2^2}{2} = \left(E + \frac{z_1z_2e^2}{r_1}\right)\left(E - \frac{z_1z_2e^2}{r_2}\right). \qquad (5)$$

Введем угловой момент (одинаковый в обоих случаях)

$$L = mv_1p_1 = mv_2p_2. \qquad (6)$$

---

*) Не забудем, что знак потенциальной энергии в одном случае — отрицательный, в другом — положительный.

p_1 и p_2 — длины перпендикуляров, опущенных на касательные к траектории. Преобразуем формулу (5) к виду

$$\frac{L^4}{4m^2p_1^2p_2^2} - E^2 =$$

$$= \frac{z_1z_2e^2\left[E(r_2-r_1) - z_1z_2e^2\right]}{r_1r_2}. \qquad (7)$$

Чтобы это равенство выполнялось при любых r_1 и r_2, должно быть

$$r_2 - r_1 = \frac{z_1z_2e^2}{E} = 2a. \qquad (8)$$

$$p_1p_2 = \frac{L^2}{2mE} = b^2. \qquad (9)$$

Первое равенство, по определению, уравнение гиперболы. Можно, воспользовавшись оптическим свойством гиперболы (см. ниже), доказать теорему о том, что произведение длин двух перпендикуляров, опущенных на одну и ту же касательную из фокусов гиперболы, не зависит от точки, в которой проведена касательная к гиперболе*). Из этой теоремы следует, что и второе равенство тоже определяет гиперболу.

Уравнение гиперболы и ее свойства

На рисунке 3 нарисованы две гиперболы. Их две, а не четыре, так как две красные кривые являются двумя ветвями одной гиперболы. Синие кривые — две ветви другой гиперболы. Синяя гипербола — сопряженная по отношению к красной.

Уравнения гипербол написаны рядом с ними. Если вспомнить уравнение эллипса (см., например, статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» в «Кванте» № 9 за 1970 г.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то мы увидим, что уравнение гиперболы получается из уравнения эллипса, если изменить знак у b^2, то есть

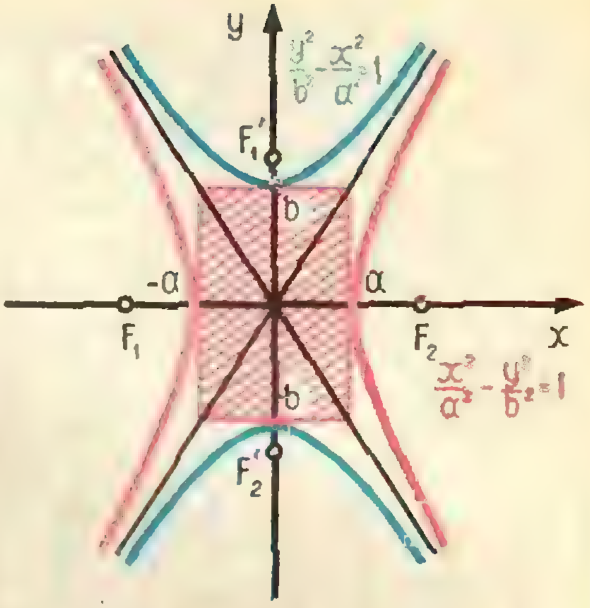

y
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
F_1'
b
-a
a
F_1
F_2
x
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
-b
F_2'

Рис. 3.

как бы сделать малую полуось мнимой $((ib)^2 = -b)^2$. Поэтому a у гиперболы называют так же, как и у эллипса, большой полуосью или действительной полуосью, а b называют мнимой полуосью.

Для сравнения на рисунке 4 изображены два сопряженных эллипса и написаны их уравнения. Напомним, что эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний от кото-

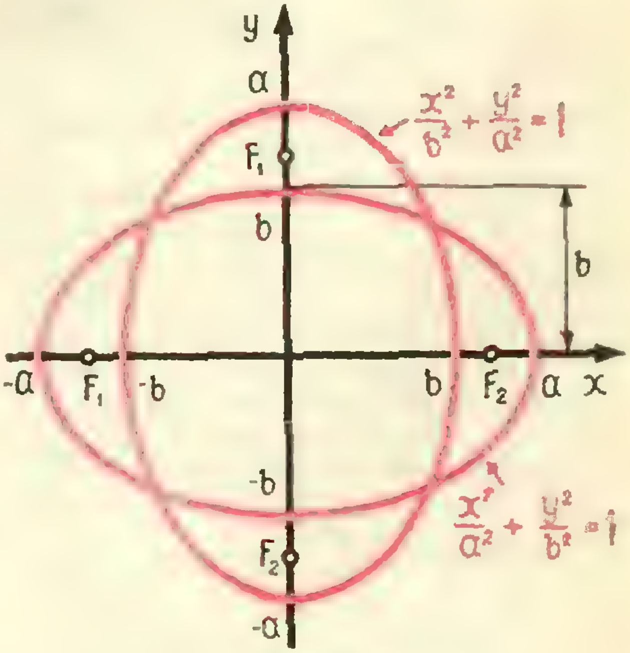

y
a
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
F_1
b
b
-a
F_1
-b
b
F_2
a
x
-b
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
F_2
-a

Рис. 4.

---

*) Доказательство этой теоремы имеется, например, в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия».

рых до двух данных точек (фокусов) постоянна и равна $2a$, а гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек постоянна и равна $2a$.

Косые прямые называют асимптотами гиперболы. Они наклонены к осям так, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ (см. рис. 3 и 5).

Уравнения асимптот $x = \frac{a}{b}y$ и $x = -\frac{a}{b}y$ получаются из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Но вернемся к рисунку 3. Между двумя сопряженными гиперболами можно вписать прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Если расстояние между фокусами гиперболы обозначить $2c$, то мы найдем, что диагональ прямоугольника равна $\sqrt{(2a)^2+(2b)^2} = \sqrt{(2c)^2}$. Это означает, что четыре фокуса и все *вершины вписанного* прямоугольника лежат на одной окружности.

Вычислим длину p перпендикуляра, опущенного из фокуса гиперболы на асимптоту. Из рисунка 5 видно, что

$$p = c\sin\alpha = c\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = c\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b.$$

Таким образом, мнимая полуось гиперболы есть расстояние от фокуса до асимптоты. Если рассматривать асимптоту как касательную к бесконечно далекой точке, то эту точку можно сопоставить с концом малой полуоси эллипса (рис. 4), касательная к которой также проходит на расстоянии b от фокуса.

Если в одном из фокусов зеркального гиперболоида (поверхности, получающейся при вращении гиперболы вокруг оси, проходящей через ее фокусы) поместить точечный источник света, то луч, вышедший из него, после отражения от поверхности гиперболоида будет идти так, как будто он идет из второго фокуса гиперболоида.

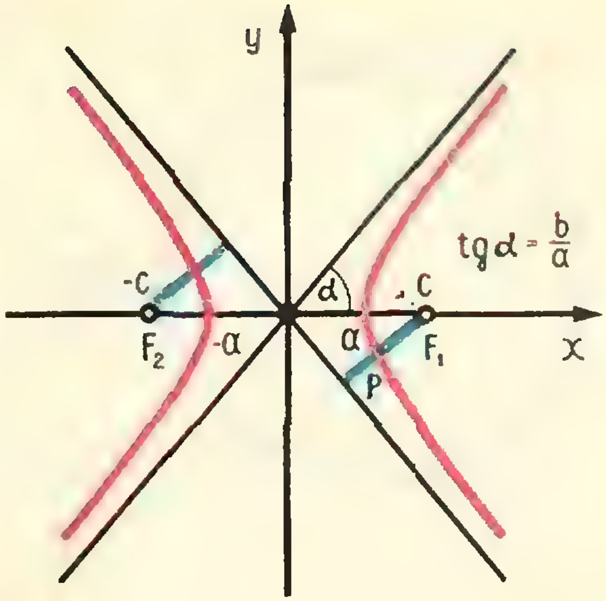


Рис. 5

Открытие атомного ядра

Движением заряженных частиц в поле заряженного атома впервые заинтересовался английский физик Резерфорд, который вывел формулу, носящую теперь его имя. Эту формулу *мы сейчас и получим.*

Резерфорд начал изучать рассеяние α-частиц атомами, чтобы проверить, как распределены в атоме электрические заряды. В начале века физики считали — такую гипотезу предложил Томсон,— что атом представляет собой *положительно* заряженный шар, внутри которого расположены электроны. Проверить эту модель — такую задачу поставил себе Резерфорд. Идея опыта была проста. Если знать прицельный параметр ρ — расстояние от рассеивающего центра, на котором пролетела бы частица, если бы она не взаимодействовала с ним, и скорость v_0 частицы, когда она летит очень далеко от рассеивающего центра, то можно вычислить энергию и угловой момент частицы, а затем, используя известные соотношения для движения по гиперболе,

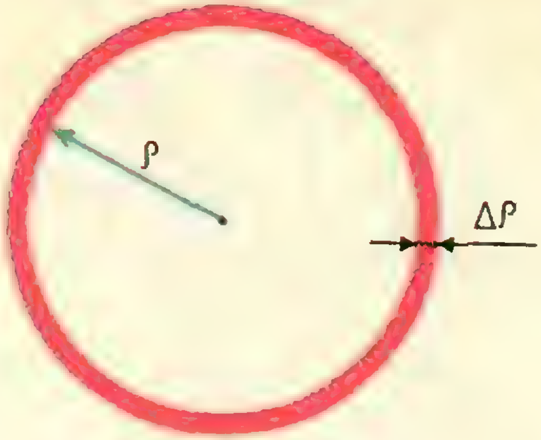


Рис. 6.

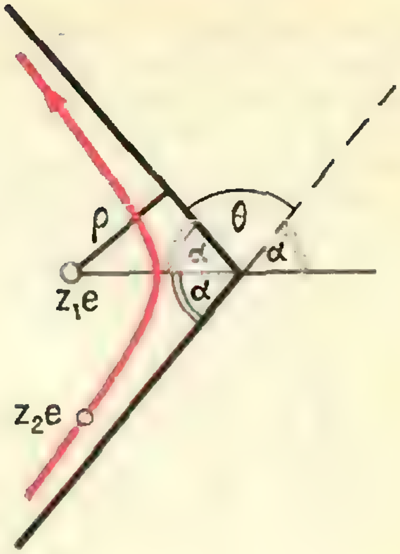


Рис. 7.

найти, на какой угол отклонится α-частица при полете около точечного положительного заряда. Измерив угол отклонения на опыте, можно было бы выяснить, на сколько рассеивающий заряд отличается от точечного. На практике дело обстоит несколько сложнее.

На самом деле, конечно, нельзя определить траекторию отдельной частицы, а можно изучать рассеяние пучка частиц.

Рассмотрим такой пучок частиц, в котором через каждый 1 *см*² его сечения проходит 1 частица в секунду. Когда такой пучок падает на ядро, то частицы, проходящие на разных расстояниях от ядра, будут отклоняться на разные углы. Из рисунка 6 видно, что число частиц, пролетающих мимо ядра (оно расположено в центре) на расстояниях в интервале между ρ и $\rho+\Delta\rho$ равно $2\pi\rho\Delta\rho$. Если частица имеет прицельный параметр ρ, то она рассеивается на угол θ, определяемый формулой

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \rho\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

θ — угол между асимптотами гиперболы.

Эта формула выводится так.

Так как θ есть полное изменение угла при рассеянии (угол между скоростями до рассеяния и после рассеяния), то он связан с углом α, который составляют асимптоты с осью x (рис. 7):

$$\theta = \pi - 2\alpha.$$

Тогда, используя формулы (8) и (9), найдем

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} = \frac{L}{a\sqrt{2mE}}.$$

(Поскольку асимптота — это касательная к бесконечно далекой точке гиперболы, то $\rho\cdot$ равно просто p_1 (или p_2) из формулы (9) для бесконечно далекой точки и всегда $p_1p_2 = \rho^2$.)

Если скорость частицы на бесконечности равна v_0, то $L = mv_0\rho$, а

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mv_0\rho}{\sqrt{2mE}}\cdot\frac{2E}{z_1z_2e^2} = \rho\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

Частицы, для которых ρ лежит в закрашенном интервале, рассеются в некотором интервале углов от θ до $\theta+\Delta\theta$. Величину $\Delta\theta$ нетрудно вычислить *). Напишем формулу для «наружного» края кольца:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta+\Delta\theta}{2} = (\rho+\Delta\rho)\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

---

*) Те, кто умеют дифференцировать, поймут, что дальше мы просто вычислим производную $d\rho/d\theta$.

Возьмем разность обеих формул и попробуем вычислить $\Delta\theta$ (помня, что $\Delta\theta$ тоже очень мало: $\Delta\theta \ll \theta$):

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta+\Delta\theta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\Delta\rho\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta+\Delta\theta}{2}}{\sin\frac{\theta+\Delta\theta}{2}}-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю, а затем используем формулы для косинуса суммы и синуса суммы:

$$\Delta\rho=\frac{-z_1z_2e^2}{mv_0^2}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\Delta\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\Delta\theta}{2}}.$$

Полагая ($\Delta\theta$ мало!)

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}=\frac{\Delta\theta}{2} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Delta\theta}{2}=1,$$

получим, отбрасывая малое слагаемое в знаменателе:

$$\Delta\rho=-\frac{z_1z_2e^2}{2mv_0^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\Delta\theta.$$

Знак «—» указывает на то, что с ростом прицельного параметра ρ угол рассеяния θ уменьшается.

Вот теперь мы можем сказать, что все частицы, пролетевшие через красное кольцо, улетят в интервале углов $\theta \rightarrow \theta+\Delta\theta$. Всего же в этом интервале улетит частиц

$$2\pi\rho\Delta\rho=\pi\left(\frac{z_1z_2e^2}{mv_0^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\Delta\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{z_1z_2e^2}{mv_0^2}\right)^2\frac{\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\Delta\theta.$$

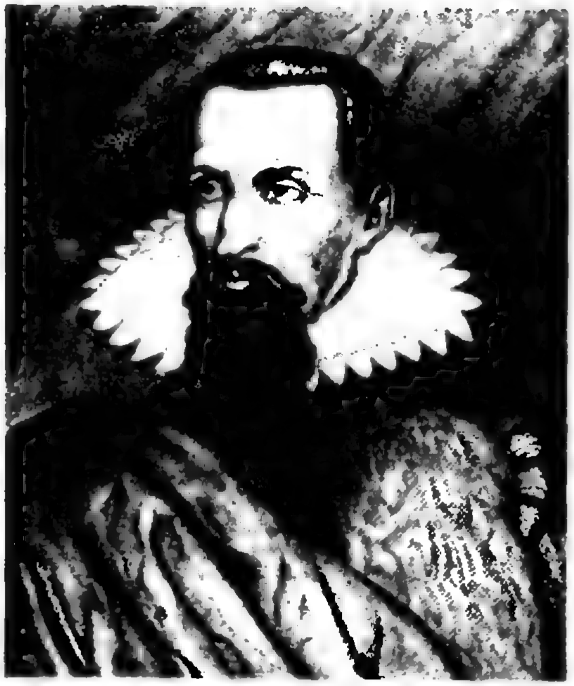
Это и есть знаменитая формула Резерфорда. Нетрудно видеть, что величина, которую она определяет, измеряется в квадратных сантиметрах, то есть что она имеет размерность площади. Ее называют поэтому «эффективным сечением». Размерность площади получилась из-за того, что «эффективное сечение» определяет число частиц, рассеянных на угол θ (при потоке частиц плотностью 1 частица на 1 *см*^{2}).

В опытах, которые проводил в 1912 году Резерфорд вместе со своими сотрудниками, α-частицы ($z_2=2$) рассеивались на ядрах углерода ($z_1=12$). В *этих* опытах неожиданно обнаружилось, что формула хорошо описывает их результаты даже тогда, когда прицельный параметр становится меньше размеров атома. α-частица должна была бы проникать внутрь положительно заряженной сферы (по модели Томсона). Но зато, когда прицельные параметры становились меньше, чем 10^{-12} *см*, рассеяние оказывалось на самом деле значительно больше, чем это следовало из теории. Отсюда Резерфорд заключил, что модель Томсона неверна, внутри атома поле сильно отличается от кулоновского и частица не может проникнуть внутрь атома на расстояния, меньшие 10^{-12} *см*. Это и было открытие атомного ядра.

Читатель может спросить, нет ли во всем сказанном грубой ошибки? Ведь взаимодействие частиц в ядре надо, вероятно, рассчитывать по формулам квантовой механики, а не по старым классическим, по которым считают движение спутников и комет. Это замечание, конечно, справедливо, но для рассеяния на заряженном центре квантовая механика дает тот же результат, что и классическая механика.

А. ЭЙНШТЕЙН

Иоганн Кеплер



27 декабря исполняется 400 лет со дня рождения Иоганна Кеплера (1571—1630). Имя Кеплера прочно вошло в историю физики и астрономии. В первую очередь оно связывается с тремя широко известными законами, которые легли в основу небесной механики.

Основываясь на наблюдениях знаменитого астронома Тихо Браге, Кеплер смог найти общие закономерности движения планет.

До Коперника в науке господствовала геоцентрическая система мира, по которой планеты и Солнце обращаются вокруг Земли. В первой половине XVI века великий польский ученый Николай Коперник предложил гелиоцентрическую систему мира, по которой Солнце находится в центре Вселенной, а вокруг него по окружностям движутся планеты.

Кеплер с самого начала считал правильной гелиоцентрическую систему строения мира. Он был уверен, что причиной движения планет является Солнце. Дальнодействие (как мы говорим сейчас) он первый считал не только возможным, но и необходимым. Но концентрические окружности планетных орбит не согласовывались с наблюдениями. Кеплер предположил, что траектории планет овальные, а затем пришел к выводу об эллиптических орбитах.

Три закона, положившие начало небесной механике, — самая значительная, но далеко не единственная работа Кеплера. Широко известны его работы о преломлении световых лучей. Исследование преломления привело Кеплера к открытию полного внутреннего отражения. Кеплер описал получение изображения на сетчатке глаза, занимался исследованием отражения от зеркала, природой света и цвета, объяснил действие зрительной трубы.

В своих исследованиях Кеплер исходил из убеждения, что законы природы должны быть просты и красивы. Задача — найти эти законы — стояла перед ним в течение всей жизни. Несмотря на постоянную нужду, отсутствие всякой помощи, религиозную борьбу, семейные несчастья, ему удалось выполнить эту задачу. Он мог сказать: «То, чему я посвятил большую и лучшую часть своей жизни, теперь найдено».

Ниже мы помещаем статью А. Эйнштейна о Кеплере, взятую из «Собрания научных трудов» Эйнштейна.

В наше беспокойное и полное забот время особенно приятно вспомнить о таком спокойном человеке, каким был великий Кеплер. Он жил в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании некоторой общей закономерности для всех явлений природы. Какой глубокой была у него вера в такую закономерность, если, работая в одиночестве, никем не поддерживаемый и непонятый, он на протяжении многих десятков лет черпал в ней силы для трудного и кропотливого эмпирического исследования движения планет и математических законов этого движения! Достойно сохранить память о нем — это значит возможно яснее представить себе поставленную им задачу и этапы ее решения.

Коперник раскрыл глаза выдающимся умам, показав, что наилучший способ получить ясное представление о кажущихся движениях планет на небе состоит в рассмотрении этого движения как обращения вокруг предполагаемого неподвижным Солнца. Если бы планеты двигались равномерно по окружностям вокруг Солнца как центра, то было бы сравнительно легко определить, как эти движения должны выглядеть с Земли. Но так как при этом мы имеем дело с более сложными явлениями, то и задача была намного труднее. Вначале нужно было определить эти движения эмпирически, из наблюдений Тихо Браге. Только после этого можно было думать об установлении общих законов, которым подчиняются эти движения. Чтобы постигнуть, какой сложной была уже задача определения истинного вращения, нужно хорошо уяснить себе следующее обстоятельство: мы всегда наблюдаем не истинное положение планеты в определенный момент времени, а только направление, в котором она видна с Земли, совершающей, в свою очередь, неизвестного рода движение вокруг Солнца. Трудности казались почти непреодолимыми. Кеплер должен был найти способ приведения в порядок этого хаоса. Он отдавал себе отчет в том, что прежде всего нужно попытаться определить движение самой Земли.

Это было бы просто невозможно сделать, если бы кроме Солнца, Земли и неподвижных звезд не существовало других планет. Если бы последних не было, то из опытов можно было бы определить только годичное изменение направления Солнце — Земля (т. е. видимое движение Солнца относительно неподвижных звезд). Можно было бы установить, что это направление всегда лежит в неизменной по отношению к неподвижным звездам плоскости, по крайней мере с достигаемой тогда точностью наблюдений, производимых без применения телескопа. Можно было также определить, каким образом прямая Солнце — Земля вращается вокруг Солнца. Было установлено, что угловая скорость этого движения в течение года меняется по определенному закону.

Но этого было недостаточно, так как оставался неизвестным закон годичного изменения расстояния Солнце — Земля. Только после установления этого закона можно было найти истинную орбиту Земли и способ ее прохождения.

Кеплер нашел замечательный выход из этой дилеммы. Наблюдая Солнце, можно было установить, что, хотя видимый путь этого светила на фоне неподвижных звезд обладает в разные времена различной скоростью, угловая скорость этого движения в одни и те же моменты астрономического года всегда одинакова. Следовательно, скорость вращения линии Земля — Солнце имела одно и то же значение и была направлена в одну и ту же область неба неподвижных звезд. Это вовсе не было очевидно априори. Но сторонники системы Коперника были почти убеждены, что такое утверждение остается справедливым и для орбит других планет.

Это облегчало задачу. Но как определить действительную форму орбиты Земли? Представим себе, что где-то в плоскости этой орбиты расположен ярко светящийся фонарь M, о котором известно, что он длительное время сохраняет свое положение неизменным. Такой фонарь может служить своеобразной фиксированной точкой, так как жители Земли могут наблюдать его в любое время года. Фонарь M расположен от Солнца дальше, чем Земля. С помощью такого фонаря можно определить орбиту Земли следующим способом.

Ежегодно в определенный момент времени Земля E находится точно на прямой, соединяющей Солнце S с фонарем M. Если в этот момент визировать с Земли направление на фонарь M, то получим направление SM (Солнце — фонарь) (рис. 1). Допустим, что это направление отмечено на небесном своде. Представим себе теперь положение Земли в другой момент. Если и Солнце S, и фонарь M видны с Земли E, то в треугольнике SEM (рис. 2) известен угол E. Раньше мы раз и навсегда определили направление прямой SM относительно неподвижных звезд. Теперь прямым наблюдением Солнца можно определить направление SE относительно неподвижных звезд. Таким образом, в треугольнике SEM становится известным и угол S. Следовательно, взяв произвольную величину основания SM, можно строить на бумаге треугольник SEM по двум известным углам. Это построение можно повторить в течение года несколько раз. На рисунке всякий раз получим соответствующее определенной дате местоположение Земли E относительно раз и навсегда заданного базиса SM. Орбита определяется, таким образом, эмпирически, конечно, с точностью до произвольной абсолютной величины.

Но откуда — спросите вы — Кеплер взял фонарь M? Тут ему помогли его гений и добрая воля природы. Существует, например, планета Марс, для которой была известна продолжительность года, т. е. время обращения вокруг Солнца. В некоторый момент Солнце, Земля и Марс располагаются точно на одной прямой. Это же положение Марса повторяется через один, два и т. д. марсианских года, потому что Марс описывает замкнутый путь. В эти известные моменты SM всегда одинаково, тогда как Земля находится каждый раз в другой точке своей орбиты (рис. 3). Следовательно, наблюдения Солнца и Марса в эти моменты дают способ определения истинной орбиты Земли, причем в эти моменты Марс играет роль указанного выше фонаря! Так Кеплер нашел истинную форму орбиты Земли и характер движения Земли по этой орбите. Все мы, кто родились позже, должны ему поклоняться и воздавать хвалу.

Как только орбита Земли была эмпирически найдена, стало возможным определить истинное положение и величину отрезка SE. В принципе для Кеплера уже не представляло труда установить по наблюдениям планетных орбит и движения планет.

(Окончание см на стр. 27)

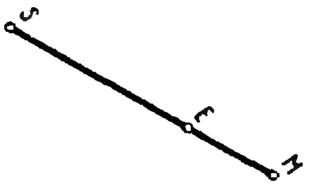


Рис. 1

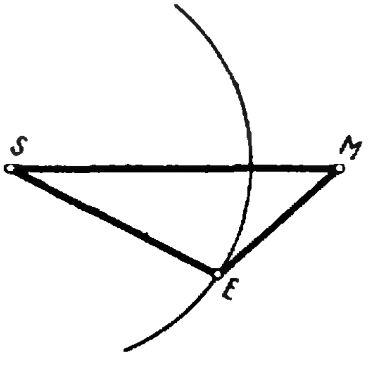


Рис. 2.

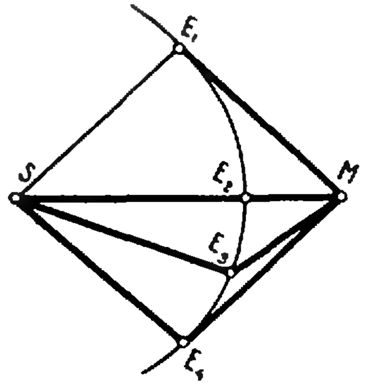


Рис 3.

В. В. Раскин

Еще раз о машинном переводе

Мы уже писали о тех затруднениях, которые возникают при машинном переводе *). В результате долгих и хитроумных усилий машину, в общем-то, научили справляться с большинством из них.

Однако есть еще целые «пласты» гораздо более существенных трудностей, о которых мы расскажем в этой статье. И все они связаны с таинственным словом «семантика».

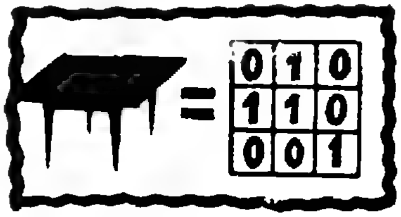
Семантика — наука о значении слов

Первая семантическая трудность заключается в том, что одно и то же слово может обозначать разные вещи, причем в разных языках по-разному: различные значения, закрепленные за словами, не совпадают. Русское слово *«стол»* чаще всего нужно переводить английским *«table»*, но иногда оно означает *«food»* («еду́»), а в свою очередь английское *«table»* иногда следует переводить русским словом «таблица».

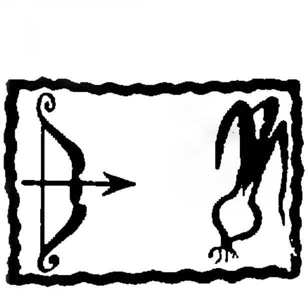
Кроме того, во всех языках встречаются так называемые омонимы — слова, которые пишутся одинаково, но имеют разные значения:

«Дайте мне лук!» —

а для чего — для стрельбы или для супа?

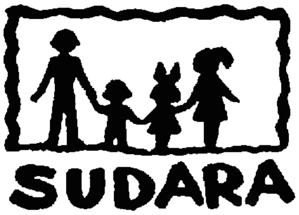


Далее, в разных языках слова наделены различной эмоциональной нагрузкой и обладают различной способностью употребляться в переносном смысле. В русском языке и во многих других европейских языках слово *«сердце»* обозначает, кроме всего прочего, орган, который народное сознание издавна считает главным и наделяет способностью чувствовать, переживать. А вот в языке каббалака (Западная Африка) эту функцию выполняет слово *«печень»*, в языке же хоноб (разновидность языка майя в Гватемале) в этом смысле употребляется слово, обозначающее брюшную полость. Представьте себе, что



---

*) См. «Квант» № 9, 1971 г.



машина переводит с языка каббалака на русский и выдает вам такую фразу: «*У нее такая добрая печень*».

Следующая неприятность. В разных языках не совпадают «объемы значения», закрепленные за данным словом. Возьмем, например, понятия «*брат*» и «*сестра*» и сопоставим их с понятиями «*старший*» и «*младший*». Получим следующую таблицу:

Понятия	Венгерский язык	Русский язык	Малайский язык
старший брат	*bâtya*	*брат*	*sudara*
младший брат	*öccs*		
старшая сестра	*néne*	*сестра*	
младшая сестра	*húg*		

Венгерский язык выражает каждое из четырех понятий отдельным словом, русский — «склеивает» их по два, а малайский — покрывает все понятия одним словом. Легко переводить эти слова с венгерского языка на малайский и вообще в направлении слева направо по таблице. А если нужно, наоборот, перевести слово «*sudara*» с малайского языка на венгерский? Человек-переводчик обратится здесь к контексту и попытается выяснить пол и возраст обозначаемого этим словом лица, а затем выберет нужный венгерский эквивалент. Но как научить этой непростой операции машину?

«Необычные» и затрудняющие перевод значения могут иметь и такие, казалось бы, «одинаковые» для всех языков слова, как личные местоимения. Вы сейчас убедитесь в этом.

Задача 1. В языке ханунoo (один из языков Филиппин) имеются следующие личные местоимения (и только они):

dah — *они*
kuh — *я*
mih — *мы* (без *тебя*)
muh — *ты*
tah — *я* и *ты*
tam — *мы* (включая *тебя*)
yah — *он*, *она*
yuh — *вы*

По каким признакам следует классифицировать эти местоимения по смыслу? Русские местоимения классифицируются по следующим признакам: *число* (этот признак имеет два значения: единственное и множественное), *род* (три значения: мужской, женский и средний), *лицо* (три значения).

Система этих признаков не подходит для классификации местоимений языка ханунoo, так как по роду приведенные местоимения не отличаются (русским «*он*» и «*она*» соответствует одно и то же местоимение «*yah*»); что же касается лица и числа, то в языке ханунoo улавливаются более тонкие различия, чем в русском (так, вместо одного русского местоимения первого лица множественного числа имеется три).

В данном случае можно найти более подходящие признаки для классификации, которые уловят все смысловые различия приведенных местоимений.

Задание. Подберите такие смысловые признаки (причем их должно быть минимальное количество, и каждый ровно с двумя значениями), чтобы приведенные местоимения представляли собой все возможные комбинации значений и чтобы при этом никакие две комбинации не повторялись.

Но и это еще не все. В каждом языке есть устойчивые словосочетания, которые обозначают не совсем то, или даже совсем не то, что значат составляющие их слова по отдельности. Это так называемые фразеологические обороты: *«бить баклуши»*, *« в ус не дуть»*, *«валять дурака»* и т. п.

Вообразим чудо: мы научили машину преодолевать все описанные выше трудности. Берем английскую фразу:

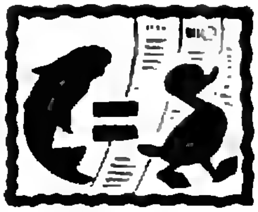
«The President said that the article was red herring».

Счастливые, ждем перевод. И получаем:

«Президент сказал: что статья является красной селедкой».

Гм... Понятно? Не очень. Но спросите любого переводчика, и он мгновенно рассеет ваше недоумение, потому что фраза на самом деле переводится так:

«Президент сказал, что эта статья —
утка (ложь, ерунда)».



Сразу все стало на свои места. Значит, добавляем в машину еще одно правило (сколько их там уже записано?!): словосочетание *«красная селедка»* заменить словом *«утка»* (а еще лучше — поскольку утки бывают не только газетные, но и жареные — *«ложь»* или *«ерунда»*). Но фразеологических оборотов много, неужели писать на каждое свое правило? А ведь человек, знающий язык, переводит так легко и просто!.

Чтобы преодолеть эти и другие семантические (да и не только семантические) трудности, чтобы правильно выбрать слово-эквивалент в выходном языке, то есть, чтобы выполнить перевод, машина должна понимать *смысл* слов. Один из виднейших специалистов по машинному переводу американский лингвист В. Ингве пишет:

«Работа по машинному переводу натолкнулась на семантический барьер. Нам пришлось осознать, что мы получим адекватный автоматический перевод только тогда, когда машина сможет «понимать», что она переводит, а это действительно трудная задача».

А для того чтобы машина понимала, что она переводит, лингвист должен ввести в нее информацию о *смысле* слов, дать точную, формальную и ясную смысловую запись, с которой машина сможет обращаться так же запросто, как со словарем и правилами обработки. Машинный перевод настойчиво требует от лингвистики такой записи. Но ...лингвисты пока не в состоянии заплатить по этому счету.

Одной из интересных попыток формального изучения семантики языка и внедрения результатов такого изучения в машинный перевод было выделение так называемых *семантических множителей*. При этом подходе выделяются такие абстрактные признаки значения (семантические множители), что значение каждого слова представляет собой их комбинацию (подобно тому, как натуральное число разлагается на простые сомножители или вектор задается своими координатами). Эта идея иллюстрируется следующей задачей.

Задача 2. *Даны 4 множества слов, каждое из которых разделено на два подмножества* *а* и *б*:

1*а*) Зверь, червь, инфузория, трава, поэт;
б) стол, земля, книга, самолет, пальто.

2*а*) Кит, ласточка, окунь, тигр, муравей;
б) женщина, начальник, парикмахер, муж, кассир.

3*а*) Воробей, самолет, баба-яга, муха, ракета;
б) книга, туннель, уж, колодец, телефон.

4*а*) Собака, лошадь, голубь, осел, мул;
б) медведь, кенгуру, змея, тигр, окунь.

Все слова из подмножества 1*а* обладают некоторым общим смысловым признаком, которым не обладает ни одно слово из подмножества 1*б*; назовем этот признак *первым*. Аналогично выделяем *второй* признак (им обладают слова из 2*а* и не обладают слова из 2*б*), *третий* и *четвертый*.

Задание 1. Выделите и перечислите по порядку все четыре признака.

Задание 2. Найдите среди представленных слов одно слово, обладающее всеми четырьмя признаками одновременно.

Задание 3. Попытайтесь (хотя бы в общих словах) дать определения «зависимости» и «независимости» таких смысловых признаков. Что вы можете сказать о зависимости или независимости данных четырех признаков? Нельзя ли охарактеризовать слово из задания 2 меньшим числом «множителей»?

Многовато, пожалуй, заданий, но все же — еще вопрос: не напоминает ли вам эта задача задачу 1? Если да, то чем же именно?

Семантика — самая молодая область лингвистики. Ей всего около сотни лет, а лингвистике — тысячи... Интерес к семантике усилился в последние десятилетия, в частности, под влиянием прикладных проблем. Сейчас семантика вышла на центральное место среди лингвистических дисциплин. Предстоит большая и сложная работа по изучению смысловой стороны языка. Человеку пришла пора понять, что́ именно он понимает, когда он что-то понимает. Например, понять, что, собственно, значит слово «*стол*»? — Предмет ме́бели? (а *шкаф*?), с четырьмя ножками? (а с тремя не бывает?), для еды? (а письменный стол?), квадратный? (а если круглый?) — оказывается, очень и очень нелегко. А понять, что такое «*хорошо*» и что такое «*плохо*»?!... Пока семантика не накопит соответствующих знаний и не представит их в точном и понятном машине виде, прыжок через семантический барьер будет, по всей видимости, невозможен.

А пока у специалистов по машинному переводу образовался свой фольклор. Перед семантическим барьером в ожидании прыжка собираются лингвисты и рассказывают друг другу грустные анекдоты. Однажды, говорят, в машину ввели английскую поговорку «*Out of sight, out of mind*», которая примерно соответствует русской «*С глаз долой — из сердца вон*». Буквально же она может быть переведена как «*Из вида, из ума*». Машина перевела эту фразу на японский язык. Затем для контроля ее заставили перевести эту фразу снова на английский. Ответ был такой: «*Blind idiot*» — «*Слепой идиот*»! Конечно, это забавно — но не в большей степени, чем всем известные анекдоты об обычном «человеческом» переводе «Полтавы» с русского на немецкий и обратно. Так что и людям ничего особенно зазнаваться и требовать от машины больше, чем они сами умеют ...

...Как знать, если бы не машинный перевод, поняли бы лингвисты, что именно семантика у них самый отстающий участок?

Немного бухгалтерии

В 1964 году американских ученых заинтересовало, как продвигаются исследования по машинному переводу в Америке, каковы перспективы и (американцы — люди практичные) стоит ли продолжать тратить на него деньги. С этой целью был создан «Совещательный комитет по автоматическому переводу». В него вошли видные специалисты от разных университетов и научных центров. Почти два года комитет изучал, опрашивал, обсуждал, советовался. В 1966 году он опубликовал свой отчет под названием «Язык и машины. Вычислительные машины в переводе и в лингвистике». Черная обложка этой книги (к сожалению, не только она) послужила поводом к тому, что ее стали называть «Черной книгой машинного перевода».

«Машинный перевод должен означать выполнение определенного алгоритма обработки, начиная с машинного чтения входного текста и кончая выдачей осмысленного выходного текста, без участия человека в качестве переводчика или редактора». Это определение дается в книге для того, чтобы показать, что машинного перевода в этом смысле вообще не существует. Текст, который выдает машина, настолько неудобоварим и труднопонимаем, что его приходится подвергать «постредактированию», то есть последующему редактированию его человеком. 11% времени при машинном переводе уходит на ввод материала в машину, 40% — на перекомпозицию выходных фраз, 31% — на постредактирование и только 18% времени остается на сам перевод. Оценка качества перевода (опрос экспертов) по следующим трем параметрам: точность перевода, скорость чтения, легкость понимания,— дала следующие суммарные оценки (показатели по переводу, выполненному человеком, приравнены нулю; вопрос же о том, что означают все эти «показатели» и как их выбирали эксперты, не имеет, к счастью, никакого отношения к делу):

	Машинный перевод		Перевод, выполненный человеком
	«сырой»	постредактированный	
Точность	—16%	—5%	0
Скорость	—21%	—11%	0
Понимание	—25%	—23%	0

Главную трудность, снижающую все три параметра, представляют в «сыром» машинном переводе неестественные синтаксические конструкции и порядок слов, а также множественность вариантов перевода для одного слова. Теперь небольшой подсчет. Обозначим через

$Ц_ч$ — цену перевода, выполненного человеком;
$Ц_м$ — » » » машиной ;
P — полные расходы на содержание потребителей перевода;
$В_ч$ — время чтения перевода, выполненного человеком;
$В_м$ — время чтения перевода, выполненного машиной;
N — число людей, читающих перевод (потребителей);
$Э$ — экономию при машинном переводе (доллары/1000 слов).

Тогда

$$Э = Ц_ч - Ц_м - N \cdot P\,(В_м - В_ч).$$

Готовый перевод предназначен для специалистов, которые тратят время на его чтение, а время — это деньги (зарплата!), поэтому в формулу входит величина P. Рассчитаем значения $Э$ и N при средних статистических данных.

Из-за того, что «сырой» перевод читается дольше, получаем удивительную закономерность:

N	1	10	15	17	18	20	80	175
$Э$	13,17	5,97	1,97	0,37	—0,43	—2,03	—40,13	—127,03

Чем большее число людей читает текст, переведенный машиной и нередактированный, тем больше убытки, и никакой экономии! Экономия исчезает, когда это число читателей превосходит 17. Но ведь переводить как раз имеет смысл именно то, что пользуется массовым спросом у специалистов!

Еще одна (последняя) таблица. Поясняем последний столбец: по статистическим данным именно 11 млн. русских слов составляет годовую потребность США в переводе с русского языка.

Тип перевода	Качество	Стоимость (в долларах) перевода 11 млн. русских слов
Штатный письменный перевод	Хорошее	440 000
Нештатный письменный перевод	Приличное	350 000
Штатный устный перевод в (диктофон)	Хорошее	440 000
Коммерческая фирма перевода	Среднее	240 000
«Сырой» машинный перевод	Плохое	80 000
Постредактированный машинный перевод	Среднее	400 000
Перевод «с помощью машины»	Отличное	310 000
Специалист, знающий язык	—	0

Хороший перевод дорог, «сырой» машинный перевод дешев, но «сердит». Нужно искать компромисс. Наш взгляд падает на предпоследнюю строку. Что такое «перевод с помощью машины» и чем он отличается от машинного перевода? Это — умное распределение обязанностей между человеком и машиной. Машине поручается делать то, что она умеет делать хорошо и быстро. Человек делает остальное. Практически это осуществляется следующим образом. Переводчик читает текст, который он должен переводить, и помечает непонятные слова. Их вводят в машину. Она дает их переводы. Все это ей просто. Остальные операции, которым, как мы видели, машину научить непросто, выполняет человек. Качество перевода — отличное. Стоимость — меньше не только «хороших», но и «приличных» переводов.

На исследования по машинному переводу во многих странах истрачены большие средства, и все же можно с уверенностью сказать, что основная их часть потрачена не впустую. Во-первых, в результате этих исследований мы больше знаем о языке. Во-вторых, — и это главное — машинный перевод «породил» современную прикладную лингвистику.

Машинный перевод и прикладная лингвистика

Прикладная лингвистика — это, как и следует из ее названия, приложение лингвистических знаний на практике. Одно из них—информационный поиск.

Подсчитано, что количество печатной информации, накапливаемой во всем мире, удваивается каждые десять лет. В 1961 году ее было вдвое меньше, чем сейчас, в 1981 — ее будет вдвое больше, чем накоплено с начала накопления до настоящего момента. Иными словами, в период с 1971 по 1981 год будет накоплено столько же книг и статей, сколько их было создано с древних времен до нашего времени. Ни один самый квалифицированный и опытный библиотекарь не в состоянии составить систематический каталог так, чтобы удовлетворить специалиста — ведь для этого он должен знать все! Ни один специалист не в состоянии прочесть всю интересующую его литературу по своей специальности.

Рассказывают, будто американские специалисты подсчитали, что если планируемое исследование стоит меньше 100 000 долларов, причем точно известно, что подобное исследование уже было выполнено и где-то имеются готовые результаты, но неизвестно, где их искать, то дешевле проделать все заново, чем разыскивать нужную работу!

Проблему информационного поиска нужно решать немедленно. Как же она решается? В начале 1967 года было принято постановление Совета Министров СССР о расширении и улучшении информационного дела по всей стране. Постановление выполняют люди и ...машины. Машинам уготовано здесь большое будущее. Ведь если машина сможет прочесть текст, извлечь из него «суть» и запомнить вместе с «адресом» текста «выходные данные» этой работы, то потом она сможет ответить на запросы специалистов.

Машинный перевод научил лингвистов многому; в своих многочисленных и часто весьма остроумных попытках обойти семантический барьер они научились многим тонкостям машинного обращения с языком, накопили огромное количество практических знаний не только о чисто формальных методах описания языка, но и вообще о языке. Машинный перевод был одной из причин, стимулировавших внедрение точных методов изучения языка. К оптимистическому выводу приходит и «черная книга»: «Самым важным результатом работы по машинному переводу является ее влияние на лингвистику. Воцарение кибернетической техники в лингвистике обещает революцию в изучении естественных языков».

Именно прикладной лингвистикой занимаются сейчас практически все, кто начинал с проблем машинного перевода.

В этих многочисленных «выходах» в теоретическую и прикладную лингвистику и заключается главная ценность машинного перевода для современной науки.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ

Составные числа

Доказать, что каждое из чисел

$$1971^{1971}+1,\quad 1971^{1971}-1,\quad 1972^{1972}-1$$

составное.

А. В. Зубик

Натуральные числа

Доказать, что для любых натуральных чисел n и k найдутся такие натуральные числа p и q, что будет выполняться равенство

$$np+1=q^k$$

А. А. Скоблин

Пилка бревен

На лесопилке имеются бревна длины 6 и 7 метров. Рабочим надо напилить некоторое количество чурбаков длины 1 метр. Какие бревна им выгоднее пилить?

Л. М. Кулеш

Шифровка

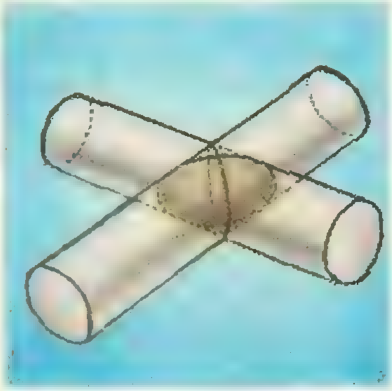
В этом примере на умножение разным буквам соответствуют разные цифры. Расшифруйте!

$$\begin{array}{r}\times\ \text{два}\\ \text{два}\\ \hline \text{дебе}\\ \text{ччав}\phantom{\text{д}}\\ \text{ербы}\phantom{\text{дд}}\\ \hline \text{четыре}\end{array}$$

В. С. Максимов

Задача о цилиндрах

Два цилиндра одинакового радиуса R пересекаются под прямым углом (см. рисунок). Найти объем их общей части.



Модели молекул

А. И. КИТАЙГОРОДСКИЙ

Полезно помнить, что слова выдуманы человеком.

Слова, которыми пользуются в жизни, имеют часто расплывчатый характер. Не все понимают одинаково слова сила и красота, энергия и напряжение. Да и «хорошая» погода разная для разных людей.

В науке такое положение дел не имеет места, во всяком случае не должно иметь. В особенности нетерпимо относятся к неточному использованию слов в физике.

Простейшие физические понятия придумывались для описания свойств и поведения предметов и тел, среди которых идет наша жизнь, короче говоря, для «больших» тел или, как еще мы говорим, для тел макроскопических.

Какие понятия, заимствованные из макромира, можно применять к молекулам? Все или некоторые? Истина лежит посредине.

А как обстоит дело с геометрическими и механическими понятиями? Можно ли говорить о форме молекулы, о ее упругости, о модуле изгиба и кручения, наконец, о пластичности молекул? Имеют ли смысл, и какой, понятия внутримолекулярных и межмолекулярных сил?

Цель этой статьи — показать, что с известными оговорками перенос на молекулу геометрических и механических понятий не только возможен, но и целесообразен.

Эта фраза означает следующее. В ряде случаев о молекуле можно говорить как о большом теле.

Тело, которому данную молекулу можно уподобить, назовем механической моделью молекулы.

Наша задача — рассказать, как эта модель строится и как используется для решения различных физических проблем.

Механическая модель молекулы получила в последнее время широкое распространение в связи с интересом к громадным (по сравнению с атомом) молекулам, из которых построены синтетические полимеры — капрон, найлон, полиэтилен (эти названия известны теперь каждому), а также важнейшие для жизнедеятельности животных и растений вещества — белки, нуклеиновые кислоты и так далее.

Всякое «изображение» молекулы должно состоять из описания взаимного расположения атомных ядер и характеристики движущихся около этих ядер электронов.

Химический опыт позволяет установить атомное строение молекулы (построить ее атомную модель), то есть указать, из каких атомов и как связанных друг с другом состоит молекула. Часть электронов тесно связана с определенными атомами, другая часть «обобществлена». Про эти электроны химики говорят — «они осуществляют химическую связь».

Конечно, атомная модель молекулы значительно проще электронно-ядерной. Но эта простота достигается за счет существенной потери. Теряется знание закона взаимодействия «строительных» частиц.

В электронно-ядерной модели взаимодействие между частицами, обеспечивающее структуру и свойства молекулы,— это электрическое взаимодействие между электронами и ядрами. Оно описывается законом Кулона: энергия взаимодействия электрона и ядра (или двух электронов, или двух ядер) равна $\frac{e_1e_2}{r}$ (r — мгновенное расстояние между частичками.)

Что же касается закона взаимодействия атомов, то он более сложен.

Может быть, испугаться этой трудности и предпочесть ясную электронно-ядерную картину молекулы? Нет, это было бы неверно. Правдивость самой картины отнюдь не является ее главным достоинством. Важно, чтобы наша модель молекулы хорошо «работала». А «хорошо работать» — это значит быстро и надежно предсказывать. Как бы точна ни была модель, но если «работать» с ней трудно, то мы задумаемся о другой, пусть более грубой, но зато более «работоспособной» модели.

Именно поэтому при изучении геометрии и механики молекулы мы отдаем предпочтение атомной модели. Сделать расчеты с помощью электронно-ядерной модели молекулы оказывается в этом случае нереалистичным, когда речь идет об интересующих нас проблемах: слишком много взаимодействующих частиц.

В то же время атомная модель молекулы позволяет истолковать и предсказать большую совокупность явлений.

В механической модели молекулы мы «забываем» про электроны и рассматриваем атом как кирпич мироздания. В механической модели за структуру и свойства молекулы отвечают взаимодействия атомов.

Модель молекулы можно нарисовать на бумаге, изготовить из проволоки, из шариков на пружинках... Существует множество типов моделей. Подходящим масштабом является сто миллионов. Размеры молекул указывают обычно в ангстремах. Один ангстрем — это стомиллионная доля сантиметра. Расстояния между центрами атомов лежат в границах 1—2 ангстрема. Поэтому и удобен стомиллионный масштаб: расположив центры «атомов» на расстояниях один-два сантиметра, мы легко разглядим детали строения, да и изготовлять шарики и срезы шариков (зачем нужны срезы, мы скажем ниже) такого размера вполне удобно.

В зависимости от целей и от личных вкусов используют те или иные модели. Пока что остановимся на скелетных моделях, то есть таких, в которых показаны (стерженьками) силы, соединяющие атомы в молекулу. Эти силы называют химическими, или валентными. О том, какие атомы с какими связаны, химики научились судить по химическим реакциям еще задолго до того, как физики научились устанавливать структуру молекулы своими методами.

Итак, обратившись за указанием к химику, мы получаем от него сведения о том, как атомы присоединены друг к другу. Скажем, формула молекулы этилового спирта C_2H_6O еще ничего не говорит о том, как соединены атомы между собой. Эта формула — так называемая брутто формула — сообщает лишь сведения о составе. Разъясняя строение молекулы химик укажет нам: три атома водорода (рис. 1) соедините черточками

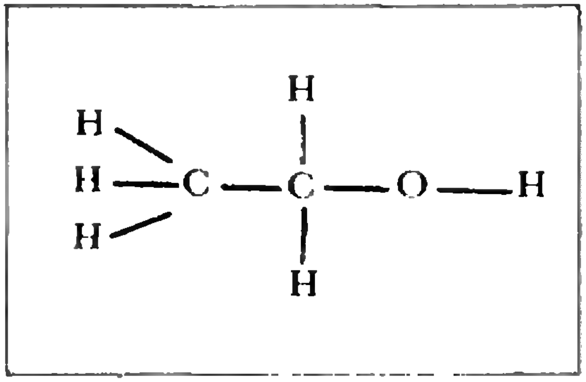


Рис. 1

с атомом углерода. (Эта группа атомов называется метильной.) Теперь, пожалуйста, соедините валентной черточкой атом углерода этой группы со вторым атомом углерода. Этот второй атом, кроме того, надо связать с парой атомов водорода, а четвертую черточку (раз четыре черточки от одного атома, значит, он четырехвалентный) проведите к атому кислорода. Оставшийся атом водорода следует присоединить к атому кислорода.

Физик сразу же задаст вопрос. А на каком расстоянии атомы, под какими углами друг к другу идут валентные черточки? На подобные вопросы ответы могут быть получены физическими исследованиями. Оставим пока что в стороне вопрос о том, каким образом устанавливается физическими опытами геометрия молекулы. Обширные данные собраны в толстые справочники. В них можно найти сведения о том, на каких расстояниях находятся химически связанные атомы и какие углы (их называют валентными углами) образуют между собой «стерженьки», символизирующие химические валентные силы. Если не очень придираться к тонким различиям, то окажется, что расстояния между атомами одного сорта достаточно универсальны, правда, валентные углы более переменчивы. Поэтому предсказать структуру молекулы не всегда просто. Но об этом речь будет впереди.

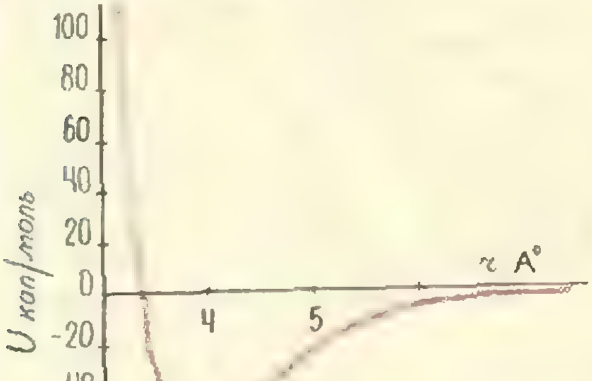


Рис. 2.

Теперь мы можем обратиться к проблеме межмолекулярных сил.

То, что между молекулами действуют силы, очевидно из самых элементарных соображений. Пар любого вещества при подходящих условиях сгущается в каплю. Если так, то молекулы несомненно притягиваются. Вещество сопротивляется сжатию. Значит, находясь на малых расстояниях, молекулы отталкиваются друг от друга. Если на больших расстояниях существует притяжение, а на малых отталкивание, значит, есть и равновесное расстояние, когда эти силы уравновешиваются.

Вместо сил взаимодействия гораздо удобнее говорить об энергии взаимодействия *). Энергию взаимодействия и мерить легче, и понятие это более простое и ясное, чем сила **). Энергией взаимодействия молекул (или атомов, или любых других частиц или тел) называется работа, которую нужно затратить для того, чтобы развести частицы далеко друг от друга—так, чтобы взаимодействие прекратилось. Математик скажет — отдалить на бесконечно большое расстояние. Чем ближе частицы, тем больше работа, необходимая для того, чтобы их оторвать друг от друга. Максимального значения эта работа достигает тогда, когда частицы находятся на равновесном расстоянии друг от друга. Эту работу называют энергией связи. Если частицы сжаты и отталкиваются, то есть находятся на расстоянии меньше равновесного, то работа разрыва станет, конечно, меньше.

Типичная кривая энергии взаимодействия показана на рисунке 2. Все кривые имеют такой характер. Но для конкретных целей надо знать параметры кривой. Прежде всего важна глубина ямы и ее абсцисса — равновесное расстояние. Но в ряде случаев нужны и более подробные сведения о крутизне кривой слева и справа от положения равновесия. Все сведения о веществе таятся в кривой взаимодействия частиц. Зная вид этой кривой, можно рассчитать тепловые и механические свойства вещества.

---

*) См. статью Г. Я. Мякишева «Взаимодействие атомов и молекул», «Квант» № 11, 1971 г.

**) По кривой энергии взаимодействия можно найти и силу: она численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой энергии взаимодействия.

Кривая энергии взаимодействия, с которой мы вас познакомили, есть зависимость энергии от расстояния. Но о каком расстоянии идет речь? Если нас интересует газообразное состояние вещества, то картина ясна. Молекулы находятся на расстояниях много больше их собственных размеров. Поэтому можно считать, что энергия зависит только от расстояния *между центрами молекул. Но в жид*костях и твердых телах дело обстоит совсем не так просто. Здесь расстояние между центрами молекул примерно равно размеру молекулы. В этом случае энергия взаимодействия будет зависеть от взаимной ориентации молекул. Наша кривая энергии теряет физический смысл, если под расстоянием понимать расстояние между центрами молекул.

До самого последнего времени положение дела казалось безвыходным.

Больше четверти века тому назад, рассматривая взаимное расположение молекул в кристаллах, автор обратил внимание на то, что центр каждого атома стремится расположиться между центрами атомов соседней молекулы. Оказалось также, что взаимное расположение атомов молекулы по отношению к атомам соседней молекулы не зависит от того, в какую молекулу эти атомы входят. Короче говоря, создавалось впечатление, что атомы молекулы ведут себя индивидуально, так сказать, не обращая внимания на своих соседей в своей же молекуле. Эти наблюдения позволили высказать гипотезу: энергия взаимодействия молекул равняется энергии взаимодействия всех пар атомов этих молекул. Или, как принято говорить в физике, энергия взаимодействия молекулы аддитивно складывается из *энергии взаимодействия атомов*, составляющих молекулу.

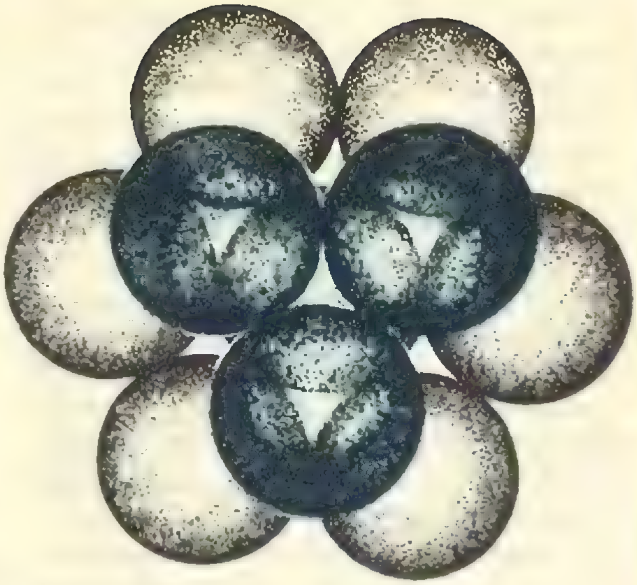


Рис. 3.

Проверить это предположение оказалось возможным лишь тогда, когда в обиход вошли электронно-счетные машины.

Возьмем относительно небольшую молекулу, состоящую, скажем, из двадцати атомов. В соседней молекуле тоже двадцать атомов. Значит, взаимодействие только этих двух молекул есть сумма из $20 \times 20 = 400$ слагаемых. Но ближайших соседей несколько. Если молекула более или менее шаровидна, то ближайших соседей будет 12 (столько, сколько соседей у каждого шара в плотной упаковке шаров (рис. 3): в одном слое у шара шесть соседей, да по три шара можно положить на этот слой сверху и снизу), а значит, число взаимодействий молекулы только с ближайшими соседями будет измеряться многими тысячами. Каждое слагаемое надо оценивать по кривой энергии, которая теперь приобретает смысл кривой взаимодействия атомов, а не молекул.

Для каждой пары атомов надо знать кривую энергии взаимодействия. Для огромного класса углеводородов — веществ, состоящих из атомов двух сортов — углерода и водорода,— надо знать три кривые взаимодействия: углерод — углерод, водород — водород и углерод — водород.

Откуда взять сведения об этих кривых? К сожалению, нет никаких теоретических способов их вывода. Кривые энергии приходится определять из опыта. Так как подбор нужных кривых — операция весьма типичная для многих областей физики, то мы опишем эту интересную работу подробней.

Исследователь, начиная на пустом месте, должен прежде всего прикинуть хотя бы грубо параметры кривых. Из опыта известны ближайшие расстояния, на которые подходят друг к другу атомы соседних молекул. Внимательно просматривая эти данные, мы выясним, что два атома водорода не бывают ближе друг к другу, чем на расстоянии 2—3 ангстрема, два атома углерода разных молекул не приблизятся друг к другу ближе, чем на 3—4 ангстрема и т. д. Эти данные взяты из исследований твердых тел. Молекулы в твердом теле несколько сжаты силами взаимодействия. Поэтому мы думаем, что равновесные расстояния на соответствующих кривых атом-атомного взаимодействия должны быть несколько больше приведенных выше цифр. По ряду косвенных соображений ясно, что это превышение должно быть процентов на десять. Поэтому для начала можно выбрать абсциссы минимумов на кривых, которые мы обсуждаем в качестве примера, в точках 2,6 и 3,8 ангстрема.

Сведения об энергии связи, то есть о глубине ямы кривой энергии, надо «вытянуть» из данных по теплотам испарения. Напомним, что при малых давлениях твердое вещество испаряется. Теплота этого фазового превращения может быть достаточно точно измерена. Затраченная на испарение кристалла теплота пошла на то, чтобы развести его молекулы на далекое расстояние. С некоторыми поправками, на которых мы не станем задерживаться, измерение теплоты испарения приводит нас к величине энергии взаимодействия всех молекул.

Конечно, положение дел не очень простое — измеряется суммарная величина, а судить надо о слагаемых. Углеводородные вещества, состоящие из молекул, содержащих 10—20 атомов, имеют теплоты испарения порядка 10—20 *ккал/моль*. Если полагать, что в основном играет роль взаимодействие соседних молекул, то эта цифра складывается из тысячи атом-атомных взаимодействий. Значит, глубины ям на кривых энергии должны быть порядка 0,01 *ккал/моль*.

Таким образом приходят к примерным оценкам параметров энергетических кривых атом-атомного взаимодействия и с их помощью конструируют кривые первого приближения; далее рассчитывают (вот здесь-то и нужны ЭВМ) свойства большого числа веществ и сравнивают результаты расчета с опытом. Становится очевидной необходимость тех или иных поправок. Действуя последовательно, пробуя и ошибаясь (физики так и говорят — работать методом проб и ошибок), в конце концов приходим к оптимальным кривым атом-атомного взаимодействия для многих пар атомов.

В общем расчет громоздкий и исследование гипотезы аддитивности было проведено лишь недавно. Результат оказался весьма утешительным. Оказалось, что предположение выполняется с хорошей точностью.

Заранее не очевиден успех этой работы. Если бы гипотеза была несправедлива, не работал бы принцип аддитивности, не вели бы себя одинаково атомы одного химического сорта, входящие в разные молекулы, то ЭВМ сообщила бы нам, что не может подобрать кривые так, чтобы они давали цифры, хотя бы сносно совпадающие с опытом. Напротив, успех работы по подбору кривых показывает, что гипотезы, положенные в основу расчета, справедливы.

Доказав справедливость аддитивного представления энергии взаимодействия молекул, мы подводим базу под понятие формы молекулы.

Построив по опытным данным «скелет» молекулы, мы можем «одеть» его

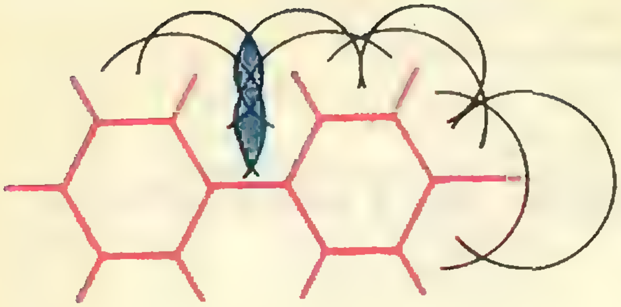


Рис. 4.

плотью» с помощью так называемых межмолекулярных радиусов. Если на кривой атом-атомного взаимодействия водорода минимум лежит при 2,6 ангстрема, то межмолекулярный радиус водорода надо взять равным 1,3 ангстрема.

Выяснив значения радиусов, мы можем приступить к окантовке молекулы так, как это показано на рисунке 4. Межмолекулярные радиусы больше межатомных расстояний. Поэтому сферы, проведенные межмолекулярными радиусами, будут пересекаться. Части сферических поверхностей, проходящие внутри соседних сфер, нас не интересуют. Внешние же части образуют поверхность молекулы (рис. 5). Если надо собрать объемную модель молекулы, то целесообразно сделать это при помощи участков срезанных сфер. Каждая сфера срезается в соответствии с валентностью. Из таких срезанных сфер можно быстро собрать модель любой молекулы.

Конструирование модели молекулы и исследование межмолекулярных сил сильно упрощается в том случае, если молекулу можно считать жесткой. Однако такое приближение годится далеко не всегда.

Целый ряд замечательных свойств вещества определяется гибкостью молекулы. Чтобы понять, в каком смысле молекула гибка, надо продолжить рассуждения об атом-атомных взаимодействиях, распространив их на внутримолекулярные взаимодействия. Это очень важная проблема. Но ей нужно посвятить отдельную статью.

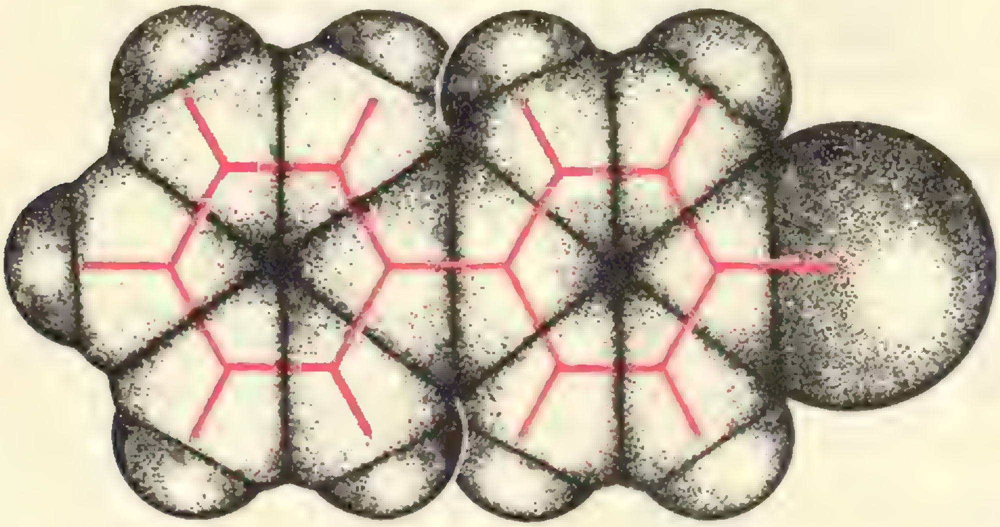


Рис. 5.

Ответы на кроссворд, опубликованный в № 11 (1971 г.)

По горизонтали: 4. Материя. 7. Вероятность. 10. Явление. 11. Регресс. *12. Эрбий. 13. Копал. 16. Телефон, 17. Федоров, 18. Физик. 19. Химия. 21. Лебедев.*
По вертикали: 1. Калория. 2. Центр. 3. Рикошет. 5. Телевидение. 6. Стереофония. 8. Квартет. 9. Остаток. 14. Полимер. 15. Децибел. 20. Лед.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Задача о числах в таблице

М. Л. Гервер

В «Кванте» № 7 за 1971 год на странице 21 была сформулирована следующая задача.

В квадратной таблице 6×6 *произвольно расставлены числа* 1, 2, 3, ..., 36. *Доказать, что среди них найдутся два числа* a *и* b, *стоящие в соседних клетках, такие, что* $a-b\geqslant 5$.

Несколько лет тому назад аналогичная задача предлагалась на московской математической олимпиаде: *доказать, что в таблице* 9×9, *заполненной попарно различными целыми числами, найдутся два соседних числа с разностью, большей или равной* 6.

Ниже мы решим общую задачу для таблицы $n\times n$, причем получим для максимальной разности между соседними числами точную (неулучшаемую) оценку.

Формулировка задачи

В таблице $n\times n$ *произвольно расставлены числа* $1, 2, \ldots, n^2$. *Доказать, что найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше* n.

Пояснение. Уточним термин «соседние числа». Мы называем два числа соседними, если клетки таблицы, в которых они стоят, имеют общую сторону.

Предварительные замечания

Легко расставить числа $1, \ldots, n^2$ в таблице $n\times n$ так, чтобы разность любых двух соседних не превосходила n. Примеры такой расстановки при $n=5$ приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Таблица 2.

1	3	6	10	15
2	5	9	14	19
4	8	13	18	22
7	12	17	21	24
11	16	20	23	25

Из таблицы 1 можно (меняя местами столбцы) получить еще $119=5!-1$ таблиц, в которых разности между соседними числами не превосходят 5. В таблице 2 можно, не увеличивая максимума разности между соседними числами, переставлять числа, стоящие далеко от диагонали, идущей из левого нижнего в правый верхний угол таблицы; например, можно поменять местами 1 и 2 или 23 и 24 и т. д. Совершенно аналогичные примеры строятся при любом n.

Существует много способов расставить числа $1, \ldots, n^2$ в таблице $n\times n$ так, чтобы максимальная разность между соседними числами равнялась n. Спрашивается, а нельзя ли расставить числа так, чтобы максимальная разность была меньше n?

Оказывается, этого сделать нельзя — именно это мы и собираемся доказать.

Таблица 3.

1	2	*	
3	*		
*			*
		*	4

Решение задачи для $n = 4$

Идею, на которой основано решение, особенно просто изложить при маленьких n. Возьмем таблицу 4×4, выберем в ней 4 клетки, в которых стоят числа 1, 2, 3 и 4. Поставим звездочки в те из оставшихся клеток таблицы, которые являются соседними для выбранных (таблица 3). Заметим, что даже если выбранные клетки находятся на краю или в углу таблицы, то звездочек будет не меньше, чем четыре (проверьте это самостоятельно). Теперь, как бы мы ни расставляли в таблице числа 5, 6, ..., 16, в одну из клеток со звездочкой попадет число a, большее или равное 8 (поскольку звездочек минимум 4, а чисел, меньших 8, осталось всего три: 5, 6 и 7). Эта клетка является соседней по крайней мере для одной из клеток, в которых стоят числа 1, 2, 3 и 4. Итак, число $a\geqslant 8$ соседствует с некоторым числом $b\leqslant 4$. Тем самым $a-b\geqslant 4$.

Мы доказали, что при любом расположении чисел 1, 2, 3, 4, ..., 16 в таблице 4×4 найдутся два соседних числа a и b таких, что $a-b\geqslant 4$.

Что дальше?

Изложенное выше может привести к следующему поспешному выводу.

Выберем в таблице $n\times n$ клетки, в которых стоят числа 1, 2, ..., n. Поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с выбранными. *Звездочек окажется минимум n.* Поэтому, как ни ставить в таблицу числа $n+1$, ..., n^2, найдется число $a\geqslant 2n$, которое попадет в клетку со звездочкой и окажется соседним для некоторого числа $b\leqslant n$. Разность чисел $a-b$, очевидно, больше или равна n.

В приведенном рассуждении имеется одна ошибка: неверно утверждение, напечатанное курсивом. Неверно оно уже при $n=5$: если мы расставим числа 1, ..., 5 так, как это сделано в таблице 2, то звездочек будет только 4, а вовсе не 5. Оказывается, что положение можно исправить, надо лишь выбирать не n, а некоторое другое число клеток.

Лемма. *Пусть в таблице $n\times n$ расставлены числа 1, ..., n^2. Тогда существует число m ($1<m<n^2$), обладающее следующим свойством: если мы отметим клетки таблицы, в которых стоят числа 1, ..., m, и поставим по звездочке в те из оставшихся клеток (содержащих числа $m+1$, ..., n^2), которые соседствуют с отмеченными, то звездочек в таблице окажется не менее чем n.*

Доказательство леммы. Пусть числа 1, ..., n^2 как-то расставлены в таблице $n\times n$. Обозначим через k наименьшее число, обладающее следующим свойством: *в каждой строке и в каждом столбце имеется число, не превосходящее k* (в таблицах 1, 2 и 4 число k равно соответственно 21, 15 и 9). Так как k — наименьшее число, обладающее указанным свойством, то число $k-1$ этим свойством не обладает. Другими словами, найдется либо строка, либо столбец, не содержащие ни одного из чисел 1, ..., $k-1$. Рассмотрим три случая.

Таблица 4.

1	2	4	6	8
3				
5				
7				
9				

1 случай. В каждом столбце имеется число, не превосходящее $k-1$, но существует строка, не содержащая ни одного из чисел 1, ..., $k-1$.

Таблица 5.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	81	19	20
*	*	*	*	*

Таблица 6.

1	2	4	6	8
3	*	*	*	*
5	*			
7	*			
*				

Таблица 6′

1	3	5	7	*
2	*	*	*	
4	*			
6	*			
8	*			

В этом случае положим $m=k-1$ (например, $m=20$ в таблице 1 и $m=8$ в таблице 4).

Покажем, что m удовлетворяет требованиям леммы.

Отметим клетки, содержащие числа $1, \ldots, m=k-1$, и поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными (таблицы 5, 6).

Каждый столбец содержит отмеченные клетки. Кроме того, в каждом столбце есть хоть одна неотмеченная клетка (так как целая строка не содержит отмеченных клеток). Поэтому в каждом столбце найдется хоть одна звездочка. Всего столбцов n; значит, и звездочек — минимум n.

II случай. В каждой строке имеется число, не превосходящее $k-1$, но существует столбец, не содержащий ни одного из чисел $1, \ldots, k-1$.

Этот случай сводится к уже разобранному: достаточно отразить таблицу относительно главной диагонали (эта операция называется *транспонированием*; например, из таблицы 6 получается таблица 6′), тогда строки перейдут в столбцы, а столбцы — в строки. Поэтому и здесь положим $m=k-1$.

III случай. Существуют одна строка и один столбец, не содержащие чисел $1, \ldots, k-1$; число k стоит в центре «креста», образуемого этой строкой и этим столбцом (таблица 7).

В этом случае положим $m=k$.

Пусть число $m=k$ стоит в клетке a_{ij} на пересечении строки с номером i и столбца с номером j (в таблице 7 $i=j=4$). Отметим клетки, содержащие числа $1, \ldots, m$. Проверим, что в каждой строке имеются как отмеченные, так и неотмеченные клетки. Согласно определению числа k, в каждой строке имеется число, не превосходящее k. А так как $m=k$, то в каждой строке имеется отмеченная клетка. В i-й строке все клетки, кроме a_{ij}, не отмечены. Наоборот,

Таблица 7.

1	2	3	*	
4	5	*		
6	*		*	
*		*	8	*
			*	7

при $l \neq i$ в l-той строке не отмечена клетка a_{lj}.

Итак, каждая строка содержит как отмеченные, так и неотмеченные клетки, а значит, содержит хоть одну звездочку. Следовательно, и в этом случае имеется минимум n звездочек.

Так как случаи I, II и III исчерпывают все возможности, то лемма доказана.

Решение задачи для произвольного n

Пусть в таблице $n \times n$ расставлены числа $1, \ldots, n^2$. Выберем в соответствии с леммой число m. Отметим клетки, содержащие $1, \ldots, m$, и поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными. По лемме звездочек окажется не меньше чем n. Все числа в клетках со звездочками больше m. Значит, наибольшее из них $a \geqslant m+n$. Клетка, содержащая число a, соседствует с некоторой отмеченной клеткой, в которой стоит число $b \leqslant m$. Так как $a \geqslant m+n$, $b \leqslant m$, то $a-b \geqslant n$. Итак, мы указали два соседних числа a и b, разность между которыми больше или равна n. Тем самым наша задача полностью решена.

Упражнения

1. В прямоугольной таблице $m \times n$ произвольно расставлено mn попарно различных целых чисел. Точно оценить максимальную разность между соседними числами.

2. Выше мы называли две клетки таблицы соседними, если они имели общую сторону. Дадим новое определение «соседства»: будем теперь называть две клетки соседними, если они имеют либо общую сторону, либо общую вершину (раньше у клетки, стоящей не на краю таблицы, было четыре соседних, теперь — восемь). Как изменится оценка максимума разности между соседними числами при новом понимании термина «соседний»?

3. Последний вопрос относится не ко всей задаче с таблицей, а только к лемме

В таблице $n \times n$ отмечены $\frac{n(n-1)}{2}$ клеток. В те из оставшихся клеток, которые имеют общие стороны с отмеченными, поставлено по звездочке. Верно ли, что найдется не менее чем n звездочек?

(Окончание. Начало см. на стр. 8).

Но это был все-таки колоссальный труд, особенно если учесть состояние математики того времени. Нужно было решить вторую часть задачи: орбиты известны из наблюдений, теперь надо найти их законы по результатам опытов. То есть делать определенное допущение о виде орбитальных кривых, а затем проверять его на огромном эмпирическом материале! Если результаты не совпадали, то выдумывать новую гипотезу и вновь проверять! После бесчисленных попыток Кеплер пришел к следующему выводу: орбита представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Он нашел и закон, по которому меняется скорость в течение одного года: отрезок Солнце — планета в равные промежутки времени описывает равные площади. Наконец, он нашел, что квадраты времен обращения относятся как кубы осей эллипсов. На решение этих задач ушла вся жизнь Кеплера.

К восхищению перед этим замечательным человеком добавляется еще чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которая нас породила. Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением.

Представляется, что человеческий разум должен свободно строить гипотезы, прежде чем подтвердится их действительное существование. Замечательное произведение всей жизни Кеплера особенно ярко показывает, что познание не может расцвести из голой практики. Такой расцвет возможен только из сравнения того, что придумано, с тем, что наблюдено.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Р. Вуд

Вихревые кольца

В опыты, подготовленные для лекции по вихревым кольцам, я ввел интересные изменения.

Обычный ящик для демонстрации вихрей хорошо известен и не требует подробного описания *). Наше устройство значительно больше тех, что обычно используются. Это кубический деревянный ящик со стороной около метра; одна из стенок сделана из тонкой клеенки, свободно подвешенной, с двумя диагоналями из резиновых трубок, крепко привязанных по углам. Резиновые трубки нужны для того, чтобы обеспечить возвращение клеенки в первоначальное положение.

Такой ящик выбрасывает воздушные вихри большой силы, причем удар кольца о стену лекционного зала отчетливо слышен и похож на звук от легкого удара полотенцем. Аудитория может получить представление о «твердости» вращающегося воздушного вихря, если последовательно выпускать невидимые кольца в зал. Удар кольца в лицо человека ощущается как мягкий толчок пуховой подушкой.

Для того чтобы сделать кольца видимыми, нужно наполнить ящик смесью аммиака и хлористого водорода при помощи резиновых трубок, подсоединенных к двум колбам, в которых кипят NH_4OH и HCl. Этот способ дает хорошие результаты. Рисунок 1 сделан с фотографии больших колец, полученных таким способом. Вид сбоку представляет особый интерес: он показывает хвост (похожий на хвост кометы), который образуется из-за трения внешних участков кольца об атмосферу при движении вперед.

Силу воздушных колец можно показать таким образом. Направим их на плоский картонный ящик, стоящий на некотором расстоянии от установки. При этом ящик сразу же переворачивается или даже падает на пол. Ударом вихревого кольца можно погасить пламя газовой горелки. После некоторой тренировки можно научиться выпускать два кольца быстрой очередью, причем так, чтобы второе летело с несколько

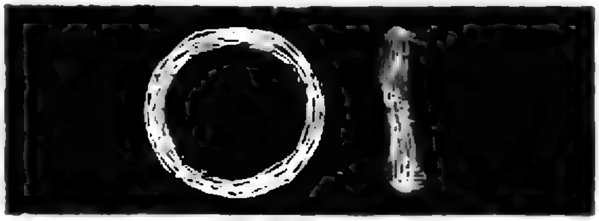


Рис. 1.

---

*) См. статью Н. Е. Жуковского «Основы теории вихрей» в «Кванте» № 4, 1971 г.

большей скоростью, чем первое. Тогда второе кольцо нагоняет первое, ударяется об него и отскакивает; оба кольца остаются целы и превращаются в вибрирующие эллипсы. Это показывает, что газовый вихрь обладает упругостью. Все опыты, которые я проделал с двумя ящиками, дали неудовлетворительные результаты.

Хотя большие вихри, полученные с помощью описанной установки, лучше всего подходят для демонстрации на лекции, я считаю, что гораздо более красивые и симметричные кольца можно получить, выпуская дым из бумажной или стеклянной трубки диаметром 2,5 *см* *). Если смотреть сбоку на выдуваемые кольца в неподвижном воздухе около лампы или при солнечном свете, то видны очень *красивые спиральные линии тока*. Мне удалось сфотографировать одно из этих колец следующим образом. Моментальный затвор был установлен на двери темной комнаты, а дуговая лампа фокусировалась на его щель с помощью большого вогнутого зеркала. Фотопластинка устанавливалась в темной комнате так, чтобы ее освещал расходящийся пучок лучей, идущий от отражения дуги в зеркале (когда затвор открыт). Перед пластинкой помещалась красная лампа, а затем кольца выдувались из трубки. Как только кольцо, симметричное по форме и двигающееся не слишком быстро, оказывалось перед пластинкой, мы дергали за шнурок, ведущий к затвору, и пластинка освещалась ослепительной вспышкой. От кольца падала четкая тень благодаря небольшому размеру и отдаленности источника света. Рисунок 2 сделан с полученной фотографии. Видно, что кольцо состоит из слоя дыма и слоя воздуха, образующих спираль из нескольких законченных витков.

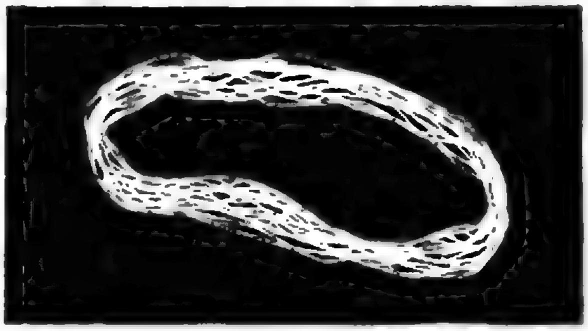


Рис. 2.

По-видимому, угловая скорость вращения увеличивается по мере приближения к центру кольца, причем внутренние участки защищены от трения (если можно применить этот термин) прилегающими вращающимися слоями. Это легко можно показать, видоизменив опыт, например, создавая воздушное кольцо с ядром из дыма. Если мы сделаем маленький вихревой ящик с отверстием диаметром, скажем, 2 *см*, наполним его дымом и слегка ударим по стенке, по-видимому, появится толстое кольцо, вращающееся очень медленно. Однако если мы очистим воздух от дыма, вольем в ящик несколько капель аммиака и смажем концентрированной HCl нижнюю часть отверстия ящика, тогда дым образует тонкий слой у нижней части отверстия. После легкого удара о стенку дым переходил в ядро кольца, а остальная часть кольца оставалась невидимой. Видимая же часть вихря вращалась с удивительно большой скоростью. Нужна большая ловкость, чтобы создать такие, похожие на полумесяц, тонкие вихри. Лучшие результаты обычно получались после нескольких попыток. Вид одного такого ядра из дыма показан на рисунке 3. Действительный размер вихря отме-

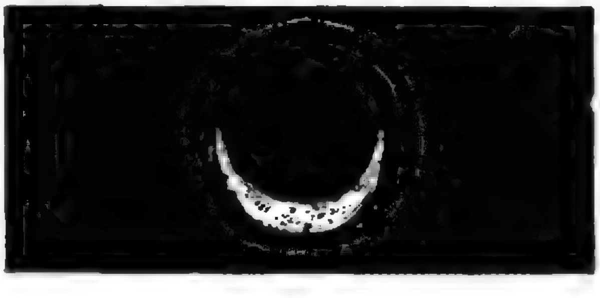


Рис. 3.

---

*) Дым можно получить, например, положив в закрытую коробочку тлеющую бумагу.

чен пунктирными линиями. Этот опыт не получается в большом масштабе, хотя я достиг некоторого успеха, распыляя нашатырь у верхнего края отверстия с помощью зигзагообразной железной проволоки, нагреваемой током.

Принимая некоторые меры предосторожности, можно получить дымовое полукольцо такое, как на рисунке 4. Это блестящая иллюстрация того, что образование колец никоим образом не зависит от наличия дыма. Лучший способ получить полукольца состоит в том, чтобы очень легко выдохнуть дым в бумажную трубку, позволяя ему течь по дну трубки, пока он не достигнет конца. Тогда кольцо выталкивается легким выдохом. Возможно, лучше проводить опыт в большой аэродинамической трубе с отверстием на дне, так как в этом случае можно наблюдать явления, происходящие внутри. Достаточно легко получить кольцо, в котором бóльшая часть дыма сосредоточена в нижней половине; но получение кольца, одна половина которого полностью невидима, и такого, чтобы граница дыма была резко очерчена (как показано на рисунке 4), требует большой практики. Я перепробовал различные схемы, чтобы получить эти полукольца в большом масштабе, но ни одна из них не дала результатов, достойных упоминания. Казалось, что применение раскаленной проволоки с нашатырем является самым многообещающим методом, однако резко очерченной границы дыма я так и не получил, а именно это отличает маленькие кольца, полученные с помощью трубки.

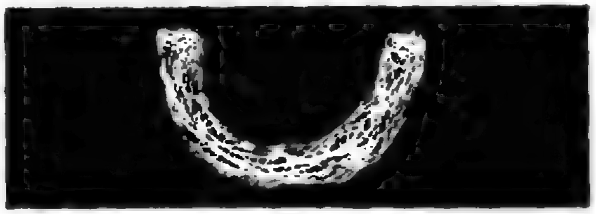


Рис. 4.

Объясняя образование вихревых колец, вращательное движение часто приписывают трению между вытекающими воздушными струями и краем отверстия. Однако большей частью образование вихрей обусловливает трение с атмосферным воздухом. Чтобы проиллюстрировать эту точку зрения, я придумал вихревой ящик, в котором трение с краем отверстия отсутствует или, правильнее сказать, компенсируется уравниванием его по всему поперечному сечению выходящей струи.

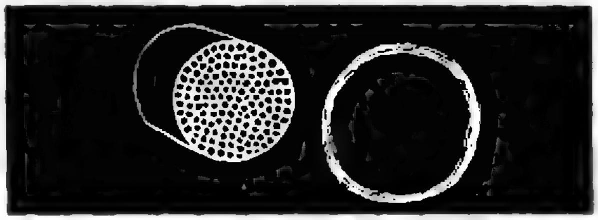


Рис. 5.

В дне цилиндрического оловянного ящика просверливается приблизительно 200 отверстий диаметром 1,7 *мм* каждое (рис. 5). Если ящик наполнить дымом и выпустить сильную струю воздуха, от поверхности, похожей на сито, отделяется красивое вихревое кольцо. Можно просто покрыть конец бумажной трубки куском туго натянутой льняной ткани и выдуть дымовое кольцо через нее.

При опытах с ящиком, снабженным двумя круглыми отверстиями, я наблюдал слияние двух колец, двигающихся рядом, в одно большое кольцо. Если кольца имеют большую скорость вращения, они отскакивают друг от друга, но если кольца вращаются медленно, они соединяются. В момент соединения форма вихря очень неустойчива. Соединенные кольца скачком меняют горизонтальное положение на вертикальное так быстро, что это трудно заметить, а затем медленно приобретают форму кольца. То же самое можно показать с помощью двух бумажных трубок, держа их в разных углах рта и почти параллельно друг другу. В любом случае воздух в комнате должен быть практически неподвижен.

Статья была опубликована в журнале «Nature» за 1901 г. Публикация подготовлена Л. А. Савиной

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М116. Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника M (рис. 1), то у полученного многоугольника

а) периметр не меньше половины периметра M ($n\geqslant 3$);

б) площадь не меньше половины площади M ($n\geqslant 4$).

Г. А. Гальперин

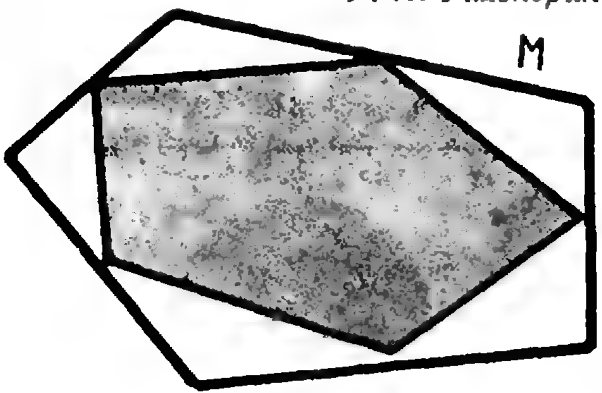


Рис. 1.

М117. Несколько человек в течение t минут наблюдало за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?

Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений t, например для $t=2{,}5$.

Н. Н. Константинов

М118. С четырех сторон шахматной доски размером $n\times n$ построена кайма шириной в два поля. Доказать, что эту кайму можно обойти шахматным конем, побывав на каждом поле один и только один раз, в том и только в том случае, когда $n-1$ кратно 4.

Ю. И. и Ю. Ю. Соркины

М119. Докажите, что если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки вектор, который направлен перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону и длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов будет равна нулю.

Н. Б. Васильев

М120. В некотором множестве введена операция $*$, которая каждым двум элементам a и b этого множества ставит в соответствие элемент $a*b$ из этого множества. Известно, что

1) для любых трех элементов a, b и c

$$a*(b*c)=b*(c*a);$$

2) если $a*b=a*c$, то $b=c$;

3) если $a*c=b*c$, то $a=b$.

Докажите, что операция $*$

а) коммутативна, то есть для любых двух элементов a и b

$$a*b=b*a;$$

б) ассоциативна, то есть для любых трех элементов a, b и c

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

С. А. Яновская

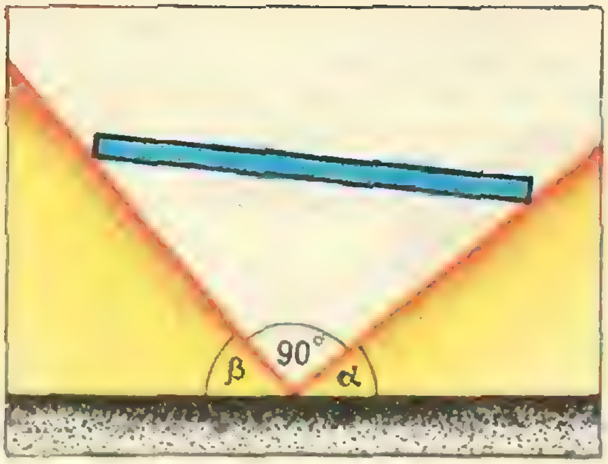


Рис. 2.

Ф128. Тонкую однородную палочку кладут так, что она опирается на две плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β; угол между плоскостями равен 90° (рис. 2). Что будет происходить с палочкой? Каким будет ее окончательное положение, если трение между палочкой и плоскостями очень мало?

Б. Б. Буховцев

Ф129. Тело находится в точке A внутри неподвижной полой сферы. В каком случае тело скорее достигнет нижней точки B сферы: если оно будет скользить по поверхности сферы или если оно будет скользить вдоль прямой AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю и расстояние AB много меньше радиуса сферы.

Г. Л. Коткин

Ф130. Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы d, заряд шарика q, его масса m.

Г. Л. Коткин

Ф131. Легкая стеклянная трубка длины l и поперечного сечения s, заполненная целиком ртутью и запаянная с одного конца, расположена горизонтально в резервуаре со ртутью вблизи поверхности ртути. Какую минимальную работу надо совершить для того, чтобы перевести трубку в вертикальное положение, в котором она будет касаться открытым концом поверхности ртути?

Ф132. Цилиндр массы m раскрутили и поместили между двумя закрепленными плоскостями, расположенными под углом 2α друг к другу (рис. 3). Зная, что коэффициент трения между цилиндром и плоскостями равен k, определить силы, с которыми цилиндр действует на стенки.

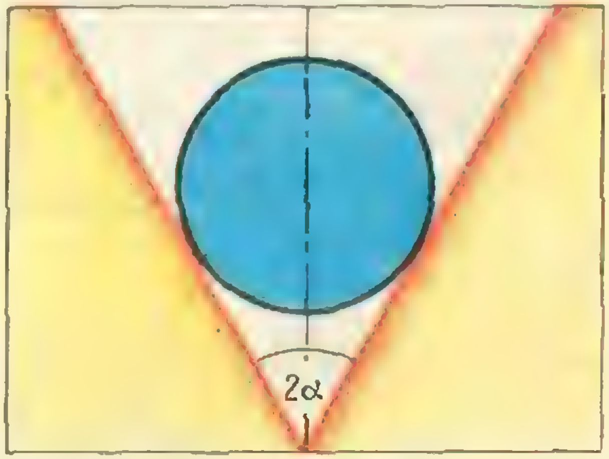


Рис. 3.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М74—М76.

М 74

Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a

$$p(x)=p(a-x).$$

Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. Например, если $p(x)=x^5+(1-x)^5$, то, очевидно, $p(x)=p(1-x)$ и, как нетрудно проверить,

$$p(x)=5y^2+\frac{5}{2}y+\frac{1}{16},$$

где
$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Выразим x через новую переменную $y=x-\frac{a}{2}$. Тогда $x=\frac{a}{2}+y$, $a-x=\frac{a}{2}-y$. Если в многочлен p (x) вместо x подставить $\frac{a}{2}+y$, то получится многочлен от переменной y: $p\left(\frac{a}{2}+y\right)$, который будет удовлетворять условию

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right)=p\left(\frac{a}{2}-y\right). \qquad (1)$$

Пусть

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right)=b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots+b_ny^n. \qquad (2)$$

Тогда $p\left(\frac{a}{2}-y\right)=b_0-b_1y+b_2y^2-b_3y^3+\cdots+b_ny^n$, и равенство (1, после упрощения принимает вид:

$$b_1y+b_3y^3+\ldots=0 \qquad (3)$$

(сюда входят все члены из (2) с y в нечетных степенях и только они).

Теперь «очевидно», что

$$b_1=b_3=\ldots=0, \qquad (4)$$

откуда

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right)=b_0+b_2y^2+b_4y^4+\cdots,$$

$p\left(\frac{a}{2}+y\right)$ представляется как многочлен от y^2, то есть p (x) представляется как многочлен от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. (Мы советуем вам проделать все эти преобразования для многочлена $x^5+(1-x)^5$, упомянутого в условии задачи.)

Решений такого рода нам было прислано довольно много. Но если мы стоим на позициях математической строгости, то должны объяснить, почему «очевидно», что из (3) следует (4).

Для этого уточним, как мы понимаем равенство двух многочленов, например, равенство (3) или (2), или (1), или равенства в условии задачи.

Обычно в школе понимают такое равенство как равенство функций, то есть как равенство левой и правой части при всех числовых значениях переменной. Тогда для обоснования перехода от (3) к (4) нужно сослаться на теорему о многочлене, тождественно равном нулю: *если* $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n=0$ *при всех вещественных значениях* x, *то* $c_0=c_1=\ldots=c_n=0$.

Заметим, что в более современных учебниках алгебры обычно понимают равенство многочленов как равенство соответствующих коэффициентов (после приведения к стандартному виду $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$). Если все равенства в нашей задаче понимать так, то в переходе от (3) к (4) слово «очевидно» нужно заменить словом «по определению». Более подробному разговору о том, что такое многочлен, как точно определить различные операции над многочленами, мы посвятим отдельные заметки в «Кванте» в будущем году.

А. Л. Тоом

М75

а) Доказать, что в любом выпуклом многограннике сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника).

б) Доказать, что для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника найдутся три ломаные, каждая из которых идет по ребрам многогранника из A в B и никакие две не проходят по одному ребру.

в) Доказать, что если в выпуклом многограннике разрезать два ребра, то для любых двух его вершин A и B найдется ломаная, идущая из A в B по оставшимся ребрам.

г) Доказать, что в задаче б) можно выбрать три ломаные, попарно не имеющие общих вершин, за исключением концов A и B.

Очевидно, что из задачи г) следует задача б), из б) следует в) и а)*. Мы приведем набросок коротких доказательств а) и в) и решим г).

а) Пусть AB — диаметр M. Спроектируем все ребра M на AB. Посмотрим, сколько точек проектируется в какую-нибудь точку C, лежащую внутри AB. Если через C провести плоскость P перпендикулярно AB, то P пересечет AB по выпуклому многоугольнику. Вершины этого многоугольника (а их не меньше трех!) суть точки пересечения P с ребрами M и, значит, в каждую внутреннюю точку отрезка AB проектируется не менее трех ребер M. Отсюда легко вывести утверждение задачи а).

При решении задач в) и г) мы будем использовать следующее интуитивно очевидное утверждение: *для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника M существует путь из A в B по ребрам M.* Доказательство мы оставляем читателю.

в) Пусть разрезаны ребра r_1 и r_2. Очевидно, что существует путь L_1, соединяющий концы r_1 и не проходящий через r_2. Действительно, к ребру r_1 прилегают две грани. Ребро r_2 не лежит хотя бы на одной из этих граней, поэтому за L_1 можно взять путь по ее границе. Аналогично, для ребра r_2 существует путь L_2. Рассмотрим теперь две произвольные вершины A и B. Как было сказано выше, существует путь L, идущий из A в B по ребрам M. Заменив в пути L ребро r_1 на путь L_1, а ребро r_2 на путь L_2 (если, конечно, эти ребра встречаются в L), мы получим искомый путь по оставшимся ребрам. Заметим, что этот путь может иметь самопересечения, которые, впрочем, нетрудно устранить.

г) Как было сказано выше, для любых двух вершин A, B выпуклого многогранника найдется путь из A в B, идущий по ребрам. Назовем длиной такого пути число ребер, из которых он состоит, и назовем расстоянием между A и B — обозначим его через $d(A,B)$ — длину кратчайшего (по числу ребер) пути. Для доказательства утверждения задачи мы фиксируем точку A и будем проводить индукцию по расстоянию между точками A и B. Если $d(A,B)=1$, то A и B лежат на одном ребре, и утверждение очевидно, так как можно пройти из A в B по ребру AB и границам двух граней, прилегающих к AB. Предположим, что утверждение доказано для всех вершин, лежащих от A на расстоянии $n-1$. Пусть $d(A,B)=n$. Тогда существует вершина B' такая, что $d(A, B)=n-1$ и $d(B', B)=1$. Рассмотрим все грани, содержащие B'. Множество всех ребер, принадлежащих всем таким граням состоит из «радиусов» (ребер с концом B') и «кольца» (которое образуют остальные ребра). Одной из вершин кольца является точка B. По предположению индукции существуют три пути l_1, l_2, l_3 из A в B', не имеющие попарно общих точек, кроме концов. Очевидно, что каждый из этих трех путей проходит хотя бы через одну вершину кольца. Такие вершины кольца назовем занятыми. Будем теперь двигаться из точки B по кольцу в одном направлении, пока не попадем в первую занятую вершину, а затем в другом направлении. Рассмотрим две полученные занятые вершины A_1 и A_2 (одна из них может быть вершиной B). Возможны два случая.

Случай 1. Занятые вершины A_1 и A_2 принадлежат разным путям, скажем l_1 и l_2. Тогда мы строим три пути из A в B следующим образом. Первый путь: из A в A_1 по l_1, затем из A_1 в B по кольцу (заметим, что по построению точки A_1 на последнем участке мы не пересекаемся с путями l_2 и l_3). Второй путь: из A в A_2 по l_2, затем из A_2 в B по кольцу. Третий путь: из A в B' по l_3, затем по ребру $B'B$. Очевидно, что построенные три пути попарно не имеют общих точек, кроме концов.

Случай 2. Занятые вершины A_1 и A_2 принадлежат одному пути, скажем l_1.

---

*) Заметим еще, что с помощью теоремы Форда—Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе (см. «Квант» № 4, 1970 г., стр. 24, задача 4) легко из в) вывести б); достаточно применить эту теорему к сети, образуемой ребрами многогранника (каждое ребро считается дважды — «туда» и «обратно»).

Посмотрим тогда, какая из этих вершин встречается раньше при движении от A к B^1 по l_1 и возьмем отрезок l_1' пути l_1 от A до первой из этих вершин. После этого рассмотрим три пути l_1', l_2, l_3, рассмотрим множество вершин кольца, занятых путями l_1', l_2, l_3 и проведем снова предыдущие рассуждения применительно к этим трем путям. Если нам встретится случай 1, то мы построим искомые пути описанным выше способом, если же снова встретится случай 2, то мы рассмотрим новую тройку путей l_1'', l_2, l_3. Если и для этой тройки возникнет случай 2, то мы рассмотрим новую тройку и т. д. Поскольку мы при этом отходим по кольцу все дальше и на кольце есть вершины, принадлежащие путям l_2 и l_3, то на некотором шаге мы получим случай 1 и искомые пути из A в B будут построены. Задача г) решена. Верно еще более сильное утверждение: для любых двух вершин A и B можно найти три цепочки граней, не имеющие общих граней и в каждой из которых первая грань содержит вершину A, последняя — вершину B и соседние грани имеют общее ребро.

А. Г. Кушниренко

M76

В компании из n человек каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, и каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. Докажите, что в этой компании каждый знаком с одинаковым числом людей.

Для каждого человека X будем через m_X обозначать число его знакомых.

Пусть A и B знакомы (рис. 1). Обозначим через M_A множество знакомых A, M_B — множество знакомых B. Докажем, что

(1) M_A и M_B не имеют общих элементов,

(2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B, и

(3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A.

Утверждение (1) сразу следует из условия: A и B не могут иметь общих знакомых. Докажем (2); (3) доказывается аналогично. Пусть $X \in M_A$ (эта запись означает «X принадлежит множеству M_A»). Либо X есть B, и тогда, согласно (1), он имеет в M_B только одного знакомого — самого A. Либо $X \neq B$, тогда, согласно (1), X незнаком с B, и, следовательно, X и B должны иметь, кроме A, еще ровно одного общего знакомого, то есть *X имеет ровно одного знакомого в M_B*, что и требуется доказать. Из (2) и (3) следует, что между множествами M_A и M_B можно установить взаимно однозначное соответствие, поэтому $m_A = m_B$.

Итак, если A и B знакомы, то $m_A = m_B$. Если же A и B незнакомы, то у них есть общий знакомый C, и, следовательно, $m_A = m_C = m_B$.

Наиболее четкие решения такого типа прислали нам *А. Зинченко* из Архангельска, *В. Логинов* и *А. Слинкин* из Москвы, *А. Каримов* из Уфы, *К. Радионов* из Иркутска, *В. Пронин* из Одессы, *В. Файтелевич* из Армавира, *С. Григорян* из Баку.

Многие читатели решили задачу иначе. Пусть для каждого человека A через M_A обозначается множество его знакомых, через N_A — множество не знакомых с A. Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком), и нетрудно доказать, что это соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимно однозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании $n = 1 + m_A + \frac{m_A(m_A-1)}{2}$ людей. Это равенство верно для любого человека A. Но уравнение

$$n = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}$$

имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, следовательно, m_A одно и то же для всех A. (Аналогичное решение разобрано в книге А. Лемана «Сборник задач московских математических олимпиад», задача XXIII, 11, 10, 3).

Интересно выяснить, при каких n такие компании действительно существуют. Полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы видели, что $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$, где m — количество знакомых одного человека, но не при любом таком n существует нужная компания. Например, нетрудно доказать,

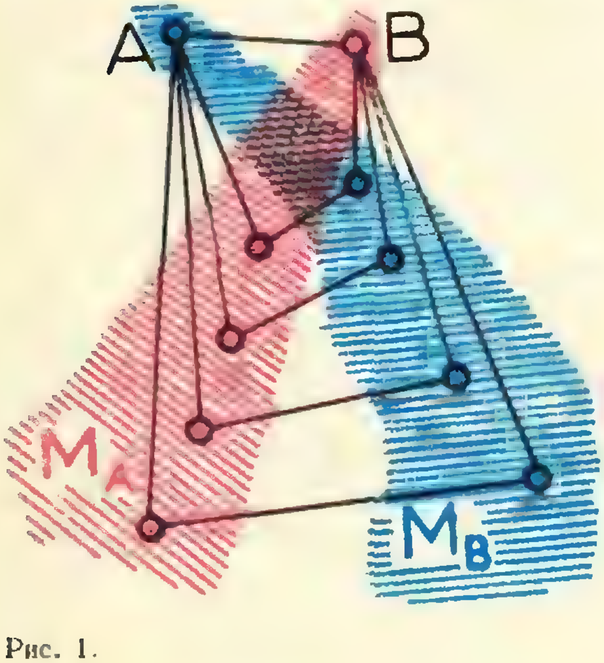


Рис. 1.

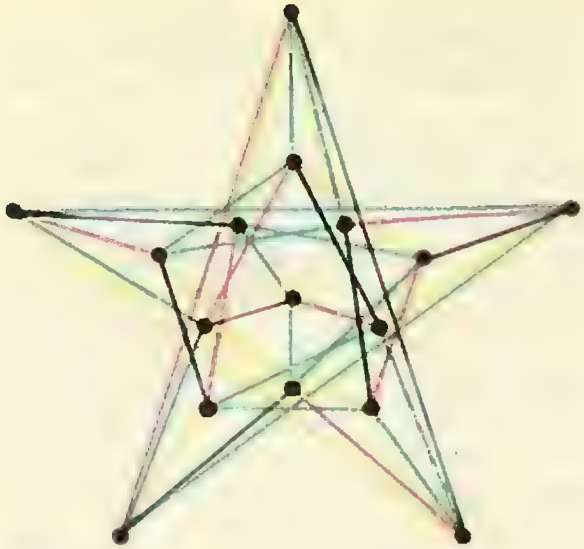


Рис. 2.

что таких компаний не существует при $m = 3$, $m = 4$ и вообще при $m = 4k+3$. Кроме очевидных примеров таких компаний — для $m = 1$, $n = 2$ и $m = 2$, $n = 4$ — мы знаем только один; он изображен на рисунке 2 и — в несколько другом «ракурсе» — на обложке этого номера журнала. Здесь $m = 5$, $n = 16$.

Эту конфигурацию из 16 точек и 40 отрезков можно описать так: множество вершин, ребер и больших диагоналей четырехмерного куба*). Докажите, что ее можно 1920 способами отобразить на себя так, что точки перейдут в точки, а отрезки — в отрезки.

Н. Б. Васильев

---

*) О четырехмерном кубе см., например, в книге И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и А. А. Кириллова «Метод координат», «Наука», 1971 г.

В этом номере мы публикуем решения задач Ф83—Ф88.

Ф83

Доска массы m и длины l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения доски о пол равен k. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть доску в горизонтальной плоскости на малый угол α вокруг одного из концов?

Повернем доску на угол α вокруг одного из концов, а затем на такой же угол вокруг второго конца (рис. 3). В результате доска переместится параллельно самой себе. Все точки доски пройдут при этом одинаковое расстояние $y = l\alpha$. Поэтому работа, затраченная при двух поворотах, такая же, как при перемещении доски на расстояние y: $A_0 = kmgl\alpha$. При одном повороте затрачивается в два раза меньшая работа $A = \frac{1}{2} kmgl\alpha$.

Большинство читателей решало эту задачу более сложным способом. Вот он.

Элемент Δx доски с массой $\Delta m = \frac{\Delta x}{l} m$ при повороте, двигаясь по дуге, проходит расстояние $y_x = x\alpha$ (рис. 4). Поэтому для перемещения этого элемента доски против силы трения $F_{тр} = k(\Delta m) g$ совершается работа $A_1 = k(\Delta m) g y_x$. Полная работа, затрачиваемая при повороте доски, равна $\frac{kmg}{l} \Sigma y_x \Delta x$.

Для того чтобы найти сумму $\Sigma y_x \Delta x$, нарисуем график зависимости y от x (рис. 5).

Произведение $y_x \Delta x$ численно равно площади зачерненной на рисунке 5 трапеции, а $\Sigma y_x \Delta x$ численно равна площади треугольника, который образует график $y(x)$ с осью x. Поэтому

$$A = \frac{1}{2} kmgl\alpha.$$

Правильное решение прислали около 50 читателей журнала.

Ф84

«Черный ящик» (коробка с неизвестной схемой внутри) имеет две пары выводов. Если к выводам I приложить напряжение U, то вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, подсоединенный к выводам II, покажет напряжение $U/2$. Если же подать напряжение U на выводы II, то вольтметр, подсоединенный к выводам I, покажет U. Какая электрическая схема находится в «ящике»?

В ящике находится делитель напряжения (рис. 6).

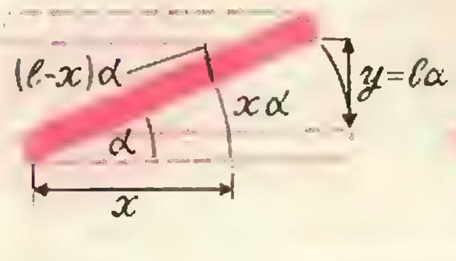


Рис. 3.

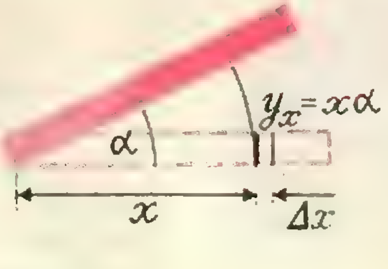


Рис. 4.

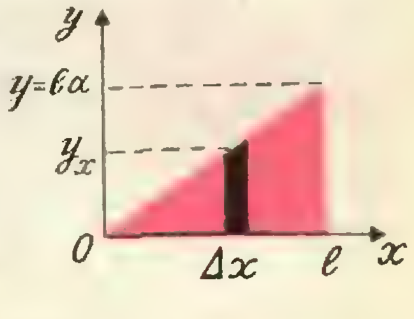


Рис. 5.

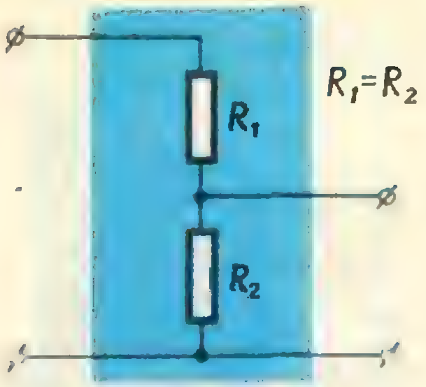


Рис. 6.

Такой ответ прислали *О. Заумыслова* (Зеленоград Московской обл.), *А. Зеленый* (Измаил Одесской обл.), *В. Рожин* (Пермь), *Н. Федин* (Омск), *А. Демидов* (Москва), *А. Жуков* (Кировск Харцизского р-на Донецкой обл.), *В. Ковтун* (Киев), *А. Воробьев* (Торжок Калининской обл.).

Ф85

Можно ли провести с идеальным газом замкнутый процесс (цикл) так, чтобы точки A и E (рис. 7) лежали на одной изотерме?

Температуры T_1 и T_2, которым соответствуют изотермы, проведенные на рисунке, и объем V_1 (или V_3) заданы. Температуры T_1 и T_2 определяют две изотермы:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } pV=\frac{m}{\mu}RT_2$$

(m — масса газа, μ — масса одной его грамм-молекулы, R — газовая постоянная). Так как объем V_1 задан, то мы знаем точки C и E цикла: объем V_1 и V_3 $\left(V_3=V_1\frac{T_2}{T_1}\right)$, температуры T_1 и T_2 и давление $p_2=\frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{V_1}$. Все остальные точки цикла можно определить только тогда, когда мы зададим одну из точек — B или A.

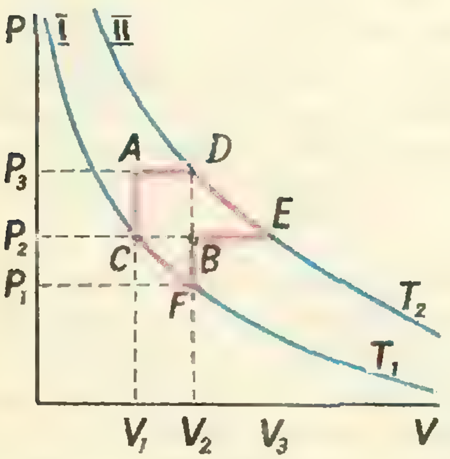


Рис. 7.

Будем считать, что у нас задан объем V_2. Он определяет точку B $\left(p_B=p_2,\ V_B=V_2,\ T_B=T_1\frac{V_2}{V_1}\right)$ и точку D $\left(V_D=V_2,\ T_D=T_2,\ p_D=p_3=\frac{m}{\mu}\frac{RT_2}{V_2}\right)$. Точка A лежит на изохоре AD и на изобаре AC. Поэтому $p_A=p_3=\frac{m}{\mu}\frac{RT_2}{V_2}$, $V_A=V_1$ и $T_A=T_2\frac{V_1}{V_2}$. Температуры газа в точках A и B одинаковы, если V_2 выбрано так, что

$$T_2\frac{V_1}{V_2}=T_1\frac{V_2}{V_1},$$

то есть если $V_2=V_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Температура газа в точках A и B цикла в этом случае равна $T=\frac{p_2V_2\mu}{mR}=\sqrt{T_1T_2}$ $\left(\text{так как } p_2V_2=p_2V_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},\ \text{а } p_2V_1=\frac{m}{\mu}RT_1\right)$.

Правильное решение прислал *Н. Федин* (Омск).

Ф86

В опыте Милликена [illegible] массой [illegible] определяется [illegible] мк. Какова неточность определения скорости?

В силу принципа неопределенности $\Delta p\Delta x\geqslant h$. Поэтому $\Delta v\geqslant\frac{h}{m\Delta x}$. То есть скорость капли не может быть измерена с точностью большей, чем 10^{-16} *см/сек*.

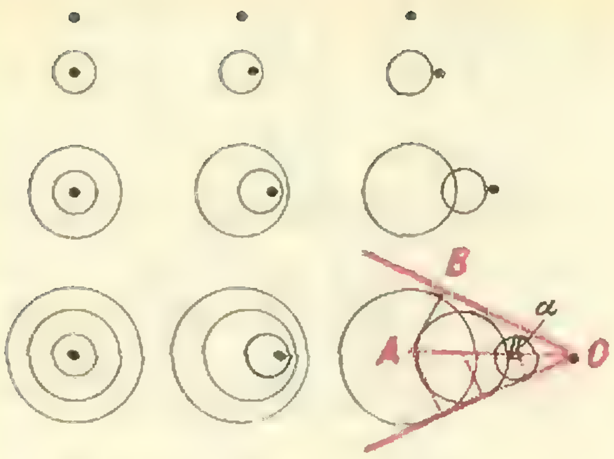
Такой ответ прислали *В. Глуховский* (Свердловск), *В. Ковтун* (Киев) и *А. Злотник* (Жуковский Московской обл.).

И. Ш. Слободецкий

Ф87

Источник сферических волн движется по поверхности воды со скоростью v. Нарисуйте картины волн на поверхности воды, когда скорость волн c больше и меньше скорости источника.

Волны, рождаемые на поверхности воды неподвижным источником, имеют вид концентрических окружностей (рис. 8, *а*). Если источник движется, то волны, которые он порождает в более поздние моменты времени, смещены в направлении движения источника. Пусть скорость источника меньше скорости волн. Тогда фронт волны будет обгонять источник, и картина волн будет такой, как показано на рисунке 8, *б*. Однако если скорость источника больше скорости распространения волн, то фронт волны уже не смо-



а) б) в)

Рис. 8.

жет обогнать источник, и волны будут распространяться внутри угла, образуемого двумя лучами, исходящими из источника (рис. 8, *в*). Величина угла легко находится из рисунка. За то время, за которое источник проходит расстояние AO, фронт волны, испущенной в точке A, проходит расстояние AB, причем $\frac{AB}{AO}=\frac{v}{u}$. Поэтому $\sin\alpha=\frac{v}{u}$.

Правильное решение прислали *А. Злотник* (Жуковский Московской обл.), *В. Ковтун* (Киев), *Н. Федин* (Омск), *А. Демидов* (Москва), *А. Зеленый* (Измаил Одесской обл.), *О. Заумыслова* (Зеленоград Московской обл.), *Г. Зайцев* (Гагра), *В. Белов* (Вологда), *Н. Сиделев* (Цюрюпинск Херсонской обл.), *О. Трупов* (Джалал-Абад Кирг. ССР), *Г. Фурман* (Черновцы УССР), *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.).

Л. Г. Асламазов

Ф88

Сосуд, частично заполненный ртутью, движется с горизонтальным ускорением, вследствие чего поверхность ртути наклонена к горизонту под некоторым углом. Сверху сосуд закрыт крышкой. Как изменится этот угол, если сосуд доверху заполнить водой?

Рассмотрим элемент жидкости с массой Δm (рис. 9). На него действуют две силы: сила тяжести $\Delta m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{N}$ — равнодействующая сил давления со стороны окружающей жидкости. Под действием этих сил элемент жидкости движется горизонтально с ускорением $\mathbf{a}$. Это означает, что равнодействующая сил $\Delta m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}$ направлена горизонтально и равна $\Delta m\mathbf{a}$. Чтобы это было возможно, сила $\mathbf{N}$ должна составлять с вертикалью угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{g}$.

Эти рассуждения не зависят от того, где именно выделен элемент жидкости. Выберем его на поверхности. Тогда ясно, что он находится в равновесии относительно сосуда и воды только в том случае, если поверхность жидкости перпендикулярна силе $\mathbf{N}$: иначе составляющая силы $\mathbf{N}$, параллельная поверхности жидкости, заставит выделенный нами элемент жидкости двигаться вдоль поверхности. Итак, поверхность жидкости в движущемся сосуде наклонена к горизонту под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{g}$.

Пусть теперь элемент жидкости с массой Δm находится внутри жидкости. Предположим, что мы поместили вместо него тело с таким же объемом, но с плотностью, меньшей плотности воды. Ясно, что в этом случае наше тело будет всплывать по направлению силы $\mathbf{N}$. Следовательно, в отличие от покоящегося сосуда линии постоянного давления не горизонтальны, а составляют с горизонтом угол α. Очевидно, такими же будут линии постоянного давления и в воде, которую мы дольем в сосуд. Поэтому ясно, что угол наклона границы раздела жидкостей будет таким же, как и угол наклона поверхности ртути до доливания в сосуд воды: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{g}$.

Это и естественно. Наблюдатель, находящийся на тележке, скажет, что жидкость ведет себя так, как будто сосуд покоится, а сила тяжести и ускорение свободного падения $\mathbf{g}'$ в его системе координат направлены под углом α к вертикали. В покоящемся сосуде граница раздела жидкостей перпендикулярна силе тяжести вне зависимости от формы сосуда.

Правильное решение прислали *А. Александров* (Глазов, УАССР), *В. Белов* (Вологда), *Я. Интин* (Речица Гомельской обл., БССР), *В. Ковалев* (Коммунарск Ворошиловградской обл.), *А. Каримов* (Уфа), *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.), *А. Демидов* (Москва), *Н. Федин* (Омск), *Е. Долгов* (Москва), *Л. Брагинский* (Фрунзе).

И. Ш. Слободецкий

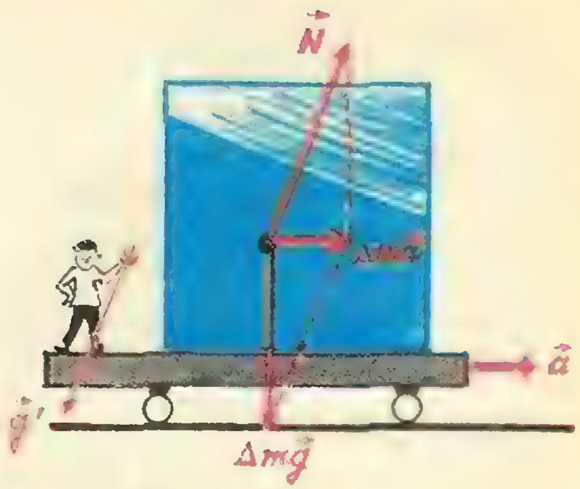


Рис. 9.

Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте

М. М. Козлов, И. Г. Кочнев

Устный экзамен по физике состоит из ответов по теории и решения задач. Мы не будем касаться ответов, поступающих на теоретические вопросы. Это важная тема, и она, безусловно, заслуживает особого рассмотрения.

Задача на вступительном экзамене преследует конкретную цель — проверить, насколько глубоко и не формально разбирается экзаменуемый в сущности физических явлений. Простой пример. Если абитуриент формулирует законы Ньютона, но не умеет использовать эти законы при решении задач, то его теоретический ответ, конечно, обесценивается. Таким образом, задача играет существенную роль при оценке знаний.

Абитуриент должен уметь проанализировать задачу, выбрать оптимальный путь ее решения, обосновать его и правильно выполнить техническую часть задачи.

Ниже приведен ряд задач, предлагавшихся в последние 3 года на вступительных экзаменах в ЛПИ. При решении задач особое внимание надо обратить на некоторые «трудные» вопросы и типичные ошибки, характерные для поступающих.

По механике, за исключением чисто кинематических задач, больше всего неприятностей абитуриентам доставляют задачи на работу переменной силы, силу трения и на расчет центростремительной силы. У многих отсутствует четкое представление о том, что центростремительная сила — это или результирующая (то есть равнодействующая) всех действующих на тело сил — при равномерном движении по окружности, или, в общем случае криволинейного движения,— проекция результирующей силы на радиус кривизны. Те, кто считает центростремительную силу силой особой природы, не могут решить даже самых простых задач на криволинейное движение, так как не могут использовать при решении II закон Ньютона.

При решении задач на молекулярно-кинетическую теорию, в частности на газовые законы, наибольшие трудности вызывали задачи, требующие некоторых преобразований объединенного газового закона, и задачи, в которых требовалось перейти от одних единиц измерения к другим (например, от *мм рт. ст.* перейти к *атм*).

В разделе «Электростатика» наибольшее число ошибок было связано с неумением производить численные расчеты. Не все абитуриенты имеют достаточные навыки в применении понятий и формул электростатики для решения задач на движение отдельных зарядов (например, электронов) в электростатическом поле. Довольно сложными для поступающих оказываются задачи, в которых нужно найти равнодействующую электростатической силы и других сил.

Важное место среди экзаменационных задач занимают задачи на постоянный электрический ток. Наиболее трудными для абитуриентов оказывались задачи, в которых нужно было рассматривать участок цепи с источником э.д.с., например с заряжающимся аккумулятором. Не всегда они могли выполнить правильный расчет для цепи, в которой электрическая энергия переходит в другие виды энергии, в частности в механическую.

Возникающие в таких задачах трудности можно легко преодолеть, опираясь на закон сохранения и превращения энергии (см.задачу 6).

Анализ решений задач по оптике показывает, что наибольшие затруднения вызывает последовательное применение формулы линзы в расчетах оптических систем, состоящих не из одной, а из двух линз. В таких задачах особую важность приобретает соблюдение правила знаков в формуле линзы (задача 7).

Приведем теперь несколько задач из экзаменационных билетов.

1. Маленький шарик массы m, несущий заряд q, подвешен на нити длиной l. Шарик движется по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, причем в центре окружности закреплен второй, неподвижный, шарик, несущий такой же заряд. Найти угловую скорость движущегося шарика.

2. Давление воздуха внутри бутылки, плотно закупоренной пробкой, при температуре 7° С было равно 1 *атм*. До какой температуры нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для того чтобы вынуть пробку из холодной бутылки при 7° С, необходимо совершить работу 1 *дж*. Длина пробки $l = 4$ *см*, сечение пробки $s = 4$ *см*^{2}.

3. При изотермическом увеличении давления на 0,5 *атм* плотность газа изменилась на 0,5 *кг/м*^{3}. Какой была первоначальная плотность газа, если первоначальное давление было равно 1 *атм*?

4. Металлический шар объемом 1 *см*^{3} имеет массу 8 *г* и содержит $8{,}6 \cdot 10^{22}$ свободных электронов. Какая часть этих электронов должна быть удалена с каждого из двух таких шаров, чтобы сила электростатического отталкивания полностью компенсировала силу гравитационного притяжения между ними ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *н·м*^{2}*/кг*^{2})?

5. Обмотка электродвигателя постоянного тока сделана из провода общим сопротивлением $R = 0{,}2$ *ом*. При включении в сеть с напряжением $U = 120$ *в* по обмотке работающего двигателя идет ток $I = 30$ *а*. Найти механическую мощность, развиваемую электродвигателем.

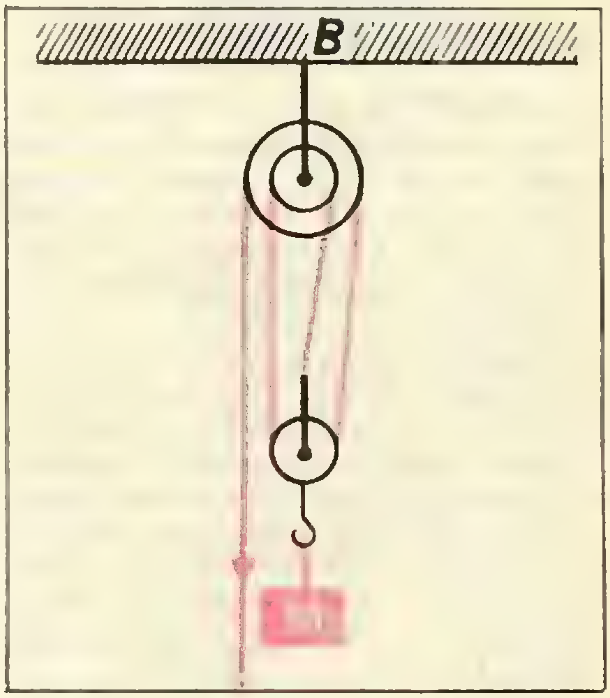
6. Изменение тока в колебательном контуре описывается уравнением

$$I = 0{,}3 \sin 15{,}7\, t.$$

Найти длину испускаемой контуром электромагнитной волны.

7. Окуляр состоит из двух одинаковых тонких двояковыпуклых линз, имеющих фокусное расстояние 5 *см* и находящихся на расстоянии 2,5 *см* друг от друга. Найти расстояние между фокусом окуляра и ближайшей к нему линзой.

8. Найти силу, действующую в точке закрепления подвижного блока к потолку, если груз массой 60 *кг*, подвешенный к блоку, показанному на рисунке, удерживается на весу человеком, который тянет за веревку вертикально вниз.



9. Какую работу надо совершить, чтобы поместить три одинаковых, находящихся в бесконечности в состоянии покоя, точечных заряда величиной $q = 5 \cdot 10^{-8}$ *к* в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 5 *см* ($\varepsilon = 1$)?

10. Разность потенциалов на клеммах аккумуляторной батареи равна 8,5 *в*, при этом через батарею идет ток 3 *а*. Если изменить направление тока на противоположное и величину тока уменьшить на 1 *а*, то абсолютная величина разности потенциалов возрастет на 2,5 *в*. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов.

11. Два электрических нагревателя, на которых написано 600 *вт*, 220 *в* и 400 *вт*, 220 *в*, соединены последовательно и включены в сеть 220 *в*. Какая электрическая мощность потребляется каждым нагревателем?

12. На расстоянии 15 *см* от центра посеребренного елочного шара находится елочная иголка длиной 1 *см*. Диаметр шара 8 *см*, а иголка расположена перпендикулярно оси симметрии шара, проходящей через середину иголки. Найти, на каком расстоянии от центра шара находится изображение иголки и определить величину изображения.

Метод площадей

И. Д. НОВИКОВ

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов — иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься. Почти каждая сколько-нибудь трудная геометрическая задача требует индивидуального подхода. А хотелось бы иметь общий метод решения, который к тому же позволял бы «прикинуть» решение до конца, не проводя выкладок явно.

К сожалению, такого универсального метода нет. Но существуют приемы, применимые ко многим задачам. Один из них мы и рассмотрим.

Начнем с совсем простой задачи, которую мы решим двумя способами.

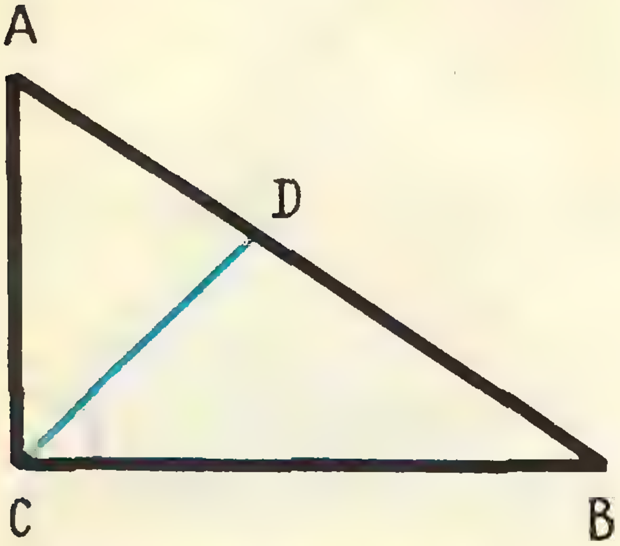


Рис. 1. $AC = 2$, $BC = 3$, $\angle ACD = \angle DCB = 45°$.

Задача 1. *Найти биссектрису CD прямого угла C в прямоугольном треугольнике ACB с катетами $AC = 2$ и $BC = 3$* (рис. 1).

Решение I. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

Из равенства $AD + DB = \sqrt{13}$ получаем $AD = \frac{2}{5}\sqrt{13}$. Далее, легко найти косинус угла A:

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Остается применить теорему косинусов для определения стороны CD треугольника ACD:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos A = \frac{72}{25}, \quad CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}.$$

Решение II. Подсчитаем площадь треугольника ACB разными способами. С одной стороны, $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 3$. С другой стороны,

$$S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle DCB} = \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin 45° + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin 45° = \frac{5\sqrt{2}}{4} CD.$$

Приравнивая правые части двух полученных выражений для $S_{\Delta ACB}$, получаем $CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Второе решение явно короче и проще. К тому же оно легко приводит к цели и в более общей ситуации. Чтобы убедиться в этом, выясните самостоятельно, как изменяются оба эти решения, если поставлена

Задача 2. *Найти биссектрису CD угла C треугольника ACB, если $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \alpha$.* (Ответ: $CD = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$.)

Однако главное достоинство второго решения — в его идейной «прозрачности». В первом решении строится некоторая «цепочка» элементов треугольника: каждый элемент этой цепочки вычисляется по данным задачи и другим, уже найденным элементам. Последним элементом цепочки служит искомая величина (в данном случае — биссектриса CD). При этом не сразу видно, какие именно элементы понадобятся при определении искомой величины, то есть какие элементы необходимо предварительно вычислить.

Во втором решении для величины, которую надо найти, мы получаем уравнение, выписывая выражения для площади треугольника через известные и искомые элементы треугольника. Этот прием — сравнение различных выражений для площади треугольника — оказывается очень плодотворным. Почему именно для площади? Дело в том, что площадь треугольника довольно просто выражается через разнообразные комбинации элементов этого треугольника.

Прежде чем приводить следующие примеры, напомним важнейшие из этих выражений. Сначала договоримся об обозначениях. В треугольнике ABC:

a, b, c — стороны, противолежащие углам A, B и C соответственно;

$$\left.\begin{array}{l} h_a, h_b, h_c \text{ — высоты,} \\ m_a, m_b, m_c \text{ — медианы,} \\ l_a, l_b, l_c \text{ — биссектрисы,} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{проведенные} \\ \text{к сторонам } a, b \text{ и } c \\ \text{соответственно;} \end{array}$$

r — радиус вписанной окружности;
R — радиус описанной окружности;
p — полупериметр;
S — площадь треугольника ABC.

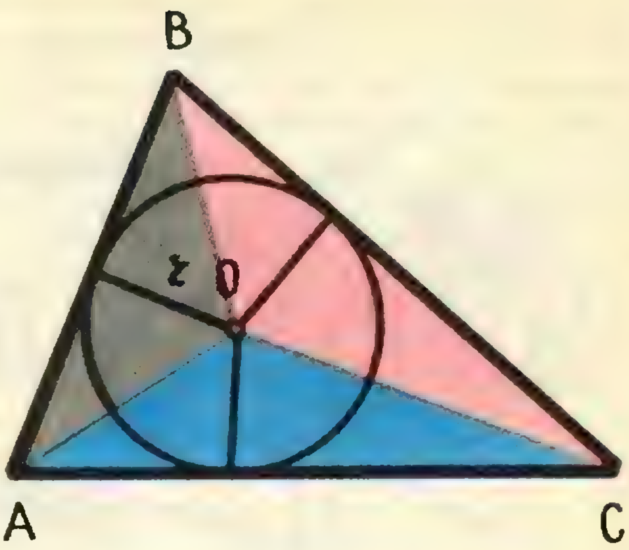


Рис. 2. O — центр вписанной окружности.

Формулы, которыми мы будем пользоваться, в этих обозначениях записываются так:

$$S = \frac{ah_a}{2}, \tag{1}$$

$$S = \frac{ab\sin C}{2}, \tag{2}$$

$$S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}, \tag{3}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \tag{4}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{5}$$

$$S = pr. \tag{6}$$

Все эти соотношения известны из школьного курса, поэтому мы не будем их подробно доказывать, а ограничимся лишь несколькими замечаниями. Чтобы вывести формулы (3) и (4) из (2), можно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Формулу (5) (формулу Герона) иногда удобнее использовать в преобразованном виде:

$$S = \frac{1}{4}\times$$
$$\times\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Формула (6) легко получается из очевидного (рис. 2) равенства

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA}.$$

Рассмотрим теперь еще несколько задач. В каждой из них применение метода площадей приводит к короткому и прозрачному решению.

Задача 3. *Внутри правильного треугольника со стороной a взята произвольная точка M. Найти сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.*

Решение. Надо найти сумму длин перпендикуляров MP, MQ и MR (рис. 3), опущенных из точки M на стороны AB, BC и CA соответственно. Если соединить точку M с вершинами треугольника, то ясно, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta CMA}$. Используя формулу для площади правильного треугольника $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и замечая, что (по формуле (I)).

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} a \cdot MP,$$

$$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} a \cdot MQ,$$

$$S_{\Delta CMA} = \frac{1}{2} a \cdot MR,$$

немедленно получаем ответ:

$$MP + MQ + MR = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 4. *Прямая AD делит треугольник ABC на два. Доказать, что радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, меньше суммы радиусов r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD соответственно.*

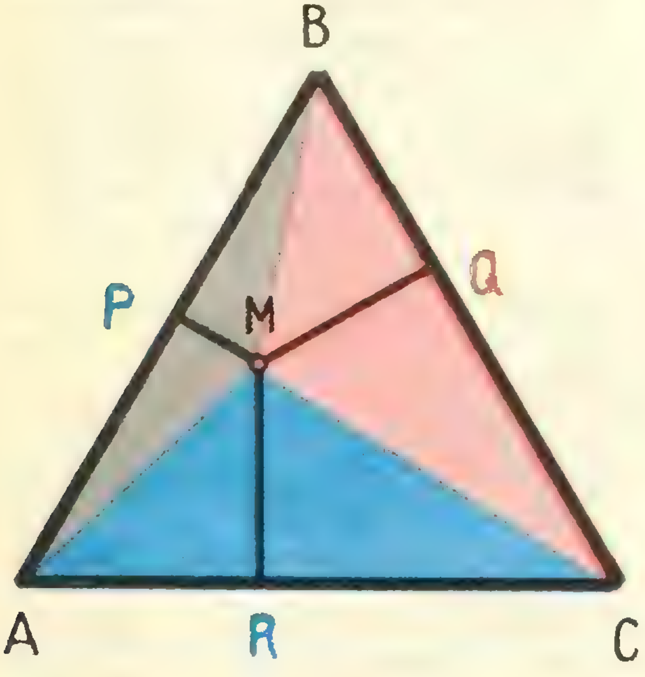


Рис. 3.

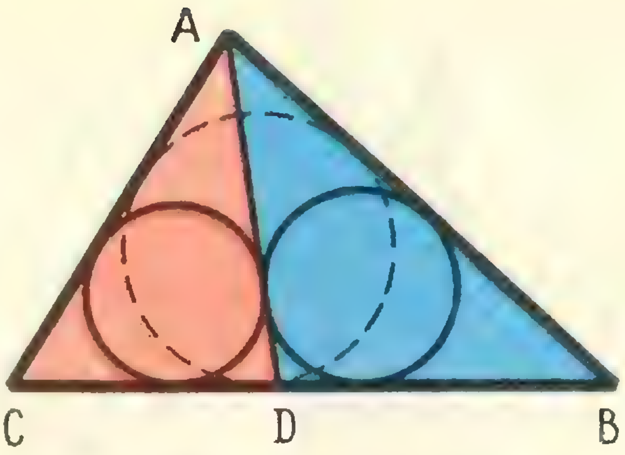


Рис. 4.

Решение. В равенстве $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$ (рис. 4) представим все члены с помощью формулы (6): $rp_{\Delta ABC} = r_1 p_{\Delta ABD} + r_2 p_{\Delta ACD}$.

Так как

$p_{\Delta ABD} < p_{\Delta ABC}$ и $p_{\Delta ACD} < p_{\Delta ABC}$ (докажите), то $rp_{\Delta ABC} < r_1 p_{\Delta ABC} + r_2 p_{\Delta ABC} = (r_1 + r_2) p_{\Delta ABC}$, а потому

$$r < r_1 + r_2.$$

Задача 5. (МГУ, физфак. 1969 г.) *В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найти отношение длин отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.*

Решение. Пусть CD и CE — лучи, о которых идет речь в условии задачи (рис. 5). Очевидно, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB} = S_{\Delta ACE} + S_{\Delta ECB}$.

Воспользуемся формулой (2), учитывая, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \frac{\alpha}{3}$:

$$\frac{AC \cdot DC \sin\frac{\alpha}{3}}{2} + \frac{DC \cdot BC \sin\frac{2\alpha}{3}}{2} = \frac{AC \cdot EC \sin\frac{2\alpha}{3}}{2} + \frac{EC \cdot BC \sin\frac{\alpha}{3}}{2}.$$

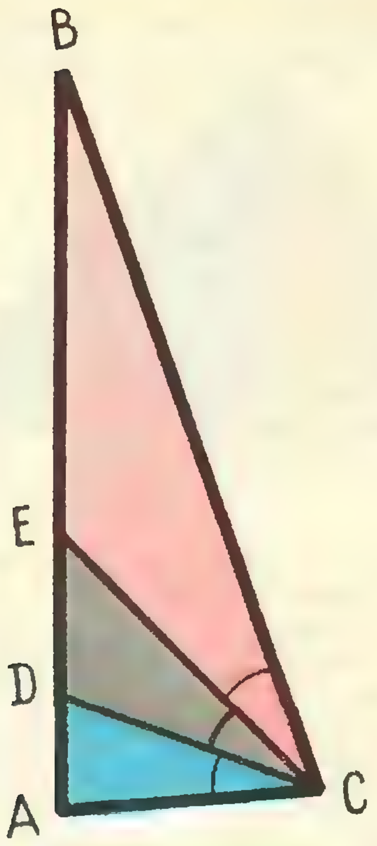


Рис. 5.

Отсюда немедленно получаем

$$\frac{DC}{EC}=\frac{AC\sin\frac{2\alpha}{3}+BC\sin\frac{\alpha}{3}}{AC\sin\frac{\alpha}{3}+BC\sin\frac{2\alpha}{3}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}.$$

Вот пример более трудной задачи. Хотя в ней надо просто «решить треугольник», то есть определить его стороны по трем известным элементам, получить решение привычным путем — с помощью теорем синусов и косинусов — не удается.

Задача 6. *Найти стороны треугольника ABC, если $h_a=6$, $r=2$, $R=5$.*

Решение. Воспользуемся формулами (1), (4), (5) и (6) и запишем следующую систему уравнений относительно неизвестных сторон a, b, c треугольника ABC и его площади S:

$$\begin{cases} S=3a, \\ S=\dfrac{abc}{20}, \\ S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}\times \\ \qquad\times\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}, \\ S=a+b+c. \end{cases}$$

Приравнивая правые части первого и последнего уравнений, получаем, что $b+c=2a$. Приравнивая правые части первого и второго уравнений, получаем, что $bc=60$. Наконец, приравнивая правые части первого и третьего уравнений, получаем (после возведения в квадрат), что

$$144a^2=(a+b+c)(b+c-a)\times$$
$$\times(a+c-b)(a+b-c).$$

Преобразуем правую часть этого равенства, учитывая полученные выше соотношения $b+c=2a$ и $bc=60$:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)\times$$
$$\times(a+b-c)=[(b+c)^2-a^2]\times$$
$$\times[a^2-(b-c)^2]=[(b+c)^2-a^2]\times$$
$$\times[a^2-(b+c)^2+4bc]=(4a^2-a^2)\times$$
$$\times(a^2-4a^2+240)=3a^2(240-3a^2).$$

Следовательно, для определения a получаем уравнение

$$144a^2=3a^2(240-3a^2),$$

откуда $a=8$. Из системы уравнений

$$b+c=16,\ bc=60$$

теперь легко найти две пары значений b и c (*два* ответа):

$$a=8,\ b=6,\ c=10 \text{ или } a=8,$$
$$b=10,\ c=6,$$

которые геометрически определяют *один* треугольник (с точностью до обозначения сторон b и c).

На этом примере особенно хорошо видна основная особенность метода площадей — из геометрической задачи он «делает» алгебраическую, сводя все к решению некоторой системы уравнений.

Задача 7. (МГУ, физфак, 1966 г.) *Доказать, что если длины сторон треугольника образуют ариф-*

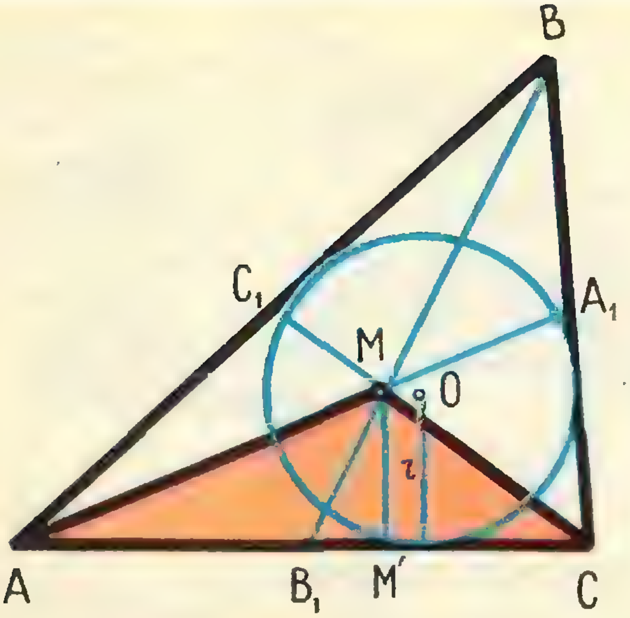


Рис. 6а.

метическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

Решение. Пусть стороны треугольника ABC обозначены так, что $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда по условию задачи $a+c=2b$. Пусть O — центр вписанной окружности, а M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 6а).

Сначала выведем одно полезное свойство точки M пересечения медиан треугольника ABC. На рисунке 6б треугольник ABC разбит медианами на 6 меньших треугольников. Площадь каждого из них равна $^1/_6$ площади всего треугольника ABC. Доказать это очень просто: используя формулу (1), запишем равенства

$$S_{\triangle BB_1C}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},\ B_1M=\frac{1}{3}BB_1,$$

$$S_{\triangle MCB_1}=\frac{1}{3}\ S_{\triangle BB_1C}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}.$$

Аналогично находятся площади остальных треугольников.

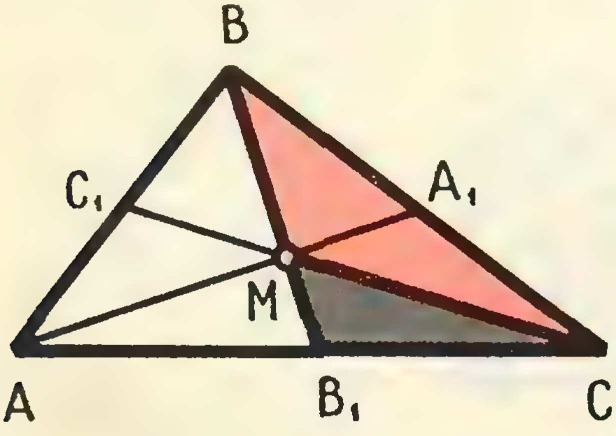


Рис. 6б.

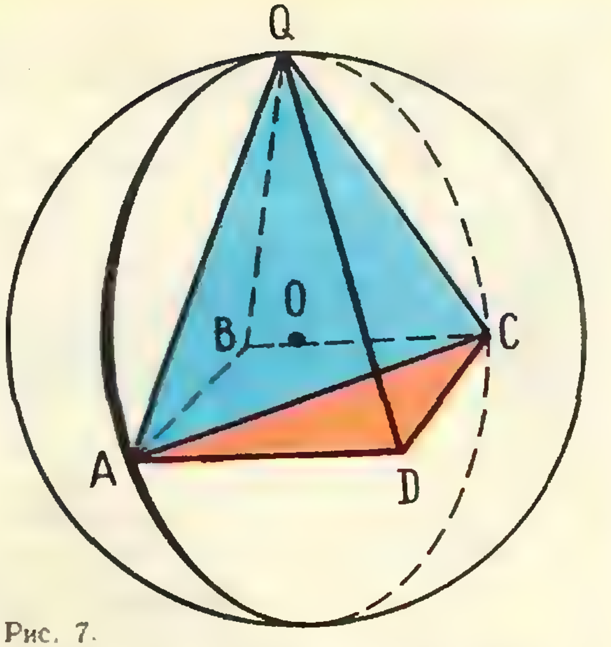


Рис. 7.

Теперь найдем длину перпендикуляра MM', опущенного из точки M на сторону AC:

$$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}MM'\cdot AC=$$

$$=\frac{1}{2}MM'\cdot b,\ \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}rp=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{1}{3}r\left(\frac{2b+b}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}rb,$$

откуда $MM'=r$, то есть $MO \parallel AC$.

Метод площадей часто оказывается удобным и на отдельных этапах решения стереометрических задач.

Задача 8. (МГУ, мехмат, 1969 г.) *В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны с. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определить радиус описанного шара.*

Решение (рис. 7). Так как вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, то

$$\angle DQC = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AQD = \frac{\beta}{2}.$$

Поэтому $DC = 2c\sin\frac{\alpha}{4}$,

$$AD = 2c\sin\frac{\beta}{4}.$$

Рассмотрим сечение шара плоскостью AQC. Так как центр шара лежит в этой плоскости (докажите!), то радиус шара равен радиусу R окружности, описанной около треугольника AQC. Но $AQ = QC = c$, а $AC = 2c\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\beta}{4}}$ (как диагональ прямоугольника $ABCD$). Поэтому для определения радиуса R достаточно воспользоваться выражениями для площади треугольника AQC по формулам (4) и (5).

В результате очевидных преобразований получаем ответ:

$$R = \frac{c}{\sqrt{2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)}}.$$

Метод площадей удобно применять также в задачах, в которых требуется найти разного рода оценки для геометрических величин.

Задача 9. *В каких пределах может изменяться отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу?*

Решение. Если c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC, то можно записать (см. формулы (1) и (6)):

$$\frac{ch_c}{2} = pr, \text{ откуда } \frac{r}{h_c} = \frac{c}{2p}.$$

Таким образом, необходимо оценить отношение

$$\frac{c}{2p} = \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1} = \frac{1}{\sin A + \sin B + 1}.$$

Так как $A+B=90^\circ$, то

$$\sin A + \sin B + 1 = \sin A + \cos A + 1 = \sqrt{2}\cos(45^\circ - A) + 1.$$

Острый угол A прямоугольного треугольника может принимать любое значение между 0 и 90°. Поэтому угол $45^\circ - A$ меняется в пределах от -45° до $+45^\circ$ и, как легко получить из свойств косинуса, при этом

$$2 < \sqrt{2}\cos(45^\circ - A) + 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}.$$

Следовательно, в любом прямоугольном треугольнике всегда выполнены неравенства

$$\sqrt{2} - 1 \leqslant \frac{r}{h_c} < \frac{1}{2}.$$

Как мы убедились, метод площадей действительно приводит к простым решениям многих задач. Конечно, он не заменяет все остальные методы, но представляет собой подход, о котором не следует забывать, приступая к решению той или иной задачи.

Упражнения

1. Найти медиану m_a треугольника, зная его стороны a, b, c.

2. Доказать, что в произвольном треугольнике

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

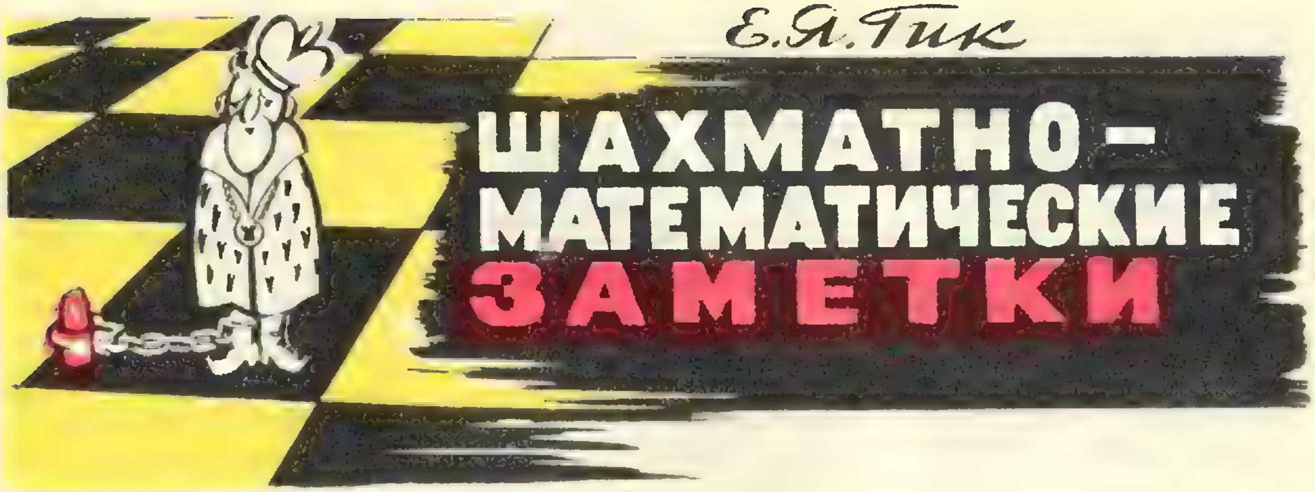
3. (МГУ, экономич. ф-т, 1969 г.). В остроугольном треугольнике ABC дано: $AB = c$, проведенная из вершины B медиана $BD = m$. Угол BDA острый и равен β. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. (МГУ, ф-т психологии, 1969 г.). Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен сумме гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

5. Известно, что в треугольнике ABC: $S_{\triangle ABC} = 16$, $m_a = 6$, $m_b = 4$. Доказать, что медианы m_a и m_b перпендикулярны.

6. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до сторон этого треугольника заключена между наименьшей и наибольшей из высот треугольника.

7. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра) служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найти расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D боковой грани ADD_1A_1.



Е.Я.Гик

ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

НЕПРИКОСНОВЕННЫЙ КОРОЛЬ

Ранее мы рассмотрели множество самых разнообразных математических задач на шахматной доске. Теперь мы остановимся на задачах, которые также можно отнести к математическим, однако их шахматное содержание богаче, чем раньше. Другими словами, нас будут интересовать элементы математики, которые встречаются непосредственно в самой шахматной игре.

Сначала напомним связанную с расстояниями особенность «геометрии шахматной доски». Поля e1 и a5 на рисунке 1 находятся на «диагональном» расстоянии. Король с e1 может достигнуть поля a5 за 4 хода. Оказывается, путь по диагонали является самым коротким из всех возможных; никаким другим маршрутом его заменить нельзя.

Теперь рассмотрим два поля, расположенные на одной прямой: поля e1 и e8 на вертикали **e**. Двигаясь по ней, король e1 может достигнуть поля e8 за 7 ходов. Ясно, что маршрут короля мог бы быть и другим. Существует ровно 393 (!) способа, позволяющих достигнуть поля e8 за те же 7 ходов. Король может двигаться к полю e8 самыми причудливыми зигзагообразными маршрутами, лишь бы они находились в рамках очерченной на рисунке 1 фигуры и лишь бы король переходил на каждом ходе с одной горизонтали на следующую. Для доказательства можно подсчитать число маршрутов, содержащих 0, 2, 4 или 6 ходов по диагонали. Воспользовавшись некоторыми сведениями из комбинаторики (см. «Квант» № 1, 1971 г.), легко его найти:

$$1+A_7^2+C_7^2\cdot C_5^2+C_7^3\cdot C_4^3=393.$$

Итак, движение короля по прямой в случае надобности можно заменить движением по ломаной линии. Вот практическая иллюстрация этого важного соображения.

На рисунке 2 пешка a7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное Кр:a7 ответить Крс7 с ничьей, так как белый король не сможет выйти из заточения. Путь белого короля до пешки занимает 5 ходов. Однако существует лишь один выигрывающий маршрут: **1. Крf7—e6! Крb2—c3 2. Крe6—d5!!**, и не-

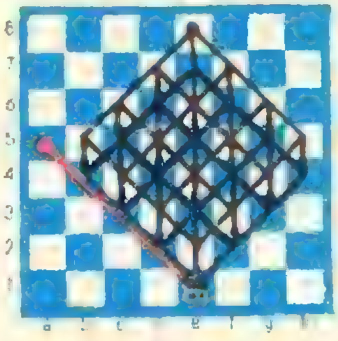


Рис. 1.

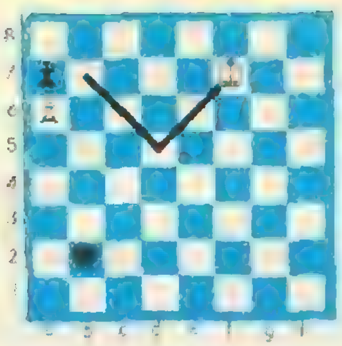


Рис. 2. Н. Майзелис, 1921 г. Белые начинают и выигрывают.

возможность хода 2... Крd4 оказывается для черных губительной. (Не проходит, например, 1. Кре6 Крс3 2. Крd6 Крd4 3. Крс6 Кре5! 4. Крb7 Крd6 5. Кр: а7 Крс7).

Конечно, на практике встречаются и более тонкие случаи.

Математики уже давно отчаялись создать строгую математическую теорию шахматной игры и ограничиваются лишь частными вопросами. Впрочем, исследование многих шахматных позиций носит вполне математический характер. Приведем несколько примеров, все они относятся к теории пешечных окончаний.

В позиции на рисунке 3 белый король не принимает участия в игре, и все зависит от того, успевает ли черный король догнать пешку h3. Неопытные шахматисты обычно рассуждают так: пешка идет сюда, король туда, пешка сюда, король туда..., то есть, что называется «на пальцах». При этом они, как правило, путаются (особенно когда на доске есть еще какие-нибудь пешки) и просчитываются. Оказывается, исход игры очень легко оценить при помощи «правила квадрата»: достаточно выяснить, может ли король при своем ходе вступить в «квадрат» пешки, в данном случае изображенный на рисунке 3: **c3—c8—h8—h3**. Еще проще провести мысленно всего одну линию — диагональ квадрата **(h3—c8)**. Из этого следует, что в позиции на рисунке 3 черные при своем ходе делают ничью (попадают в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

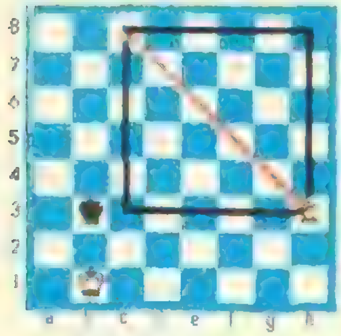


Рис. 3.

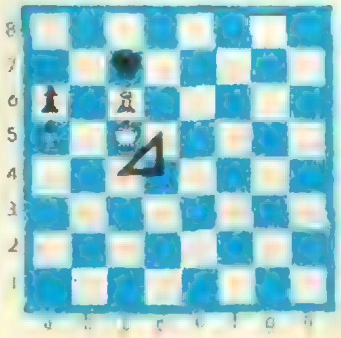


Рис. 4.

Рассмотрим теперь позицию на рисунке 4. Черные при своем ходе сразу проигрывают, так как белый король идет на b6 и съедает пешку а6. Таким образом, белым надо передать очередь хода противнику. Как это сделать? После 1. Крd5 Крс8 ничего не дает 2. Крd6 (2... Крd8 3. с7+ Крс8 4. Крс6 пат!), а 2. Крс5 Крс7 приводит к исходной позиции. Выигрыш темпа достигается при помощи так называемого «метода треугольника». Для данного случая этот треугольник **(c4—d4—d5)** изображен на том же рисунке 4.

После **1. Крс5—d5 Крс7—с8 2. Крd5—d4 Крс8—b8 3. Крd4—с4! Крb8—с8 4. Крс4—d5** белые достигают своей цели, так как на 4... Крс8—d8 теперь выигрывает 5. Крd5—d6, а на 4... Крс8 — с7 — 5. Крd5 — с5.

Обратимся теперь к позиции на рисунке 5а. Хотя у белых здесь две лишние пешки, выиграть чрезвычайно сложно. Для анализа позиций с блокированной пешечной структурой применяются различные методы: «критические расстояния Бианкетти», «координатная система Эберса» и другие. Общая теория блокированных пешечных окончаний носит название теории соответственных полей. Исследование каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи, но общей математической теории пока создать не удалось. Разумеется, и мы не в состоянии оста-

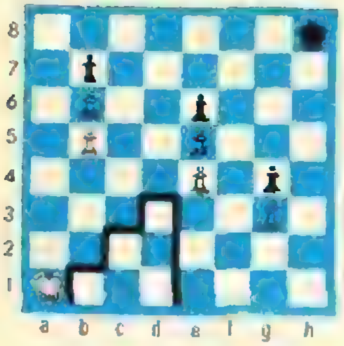


Рис. 5а. Р. Бианкетти, 1925 г. Белые начинают и выигрывают.

новиться в наших заметках на всех деталях теории соответственных полей *),ограничимся лишь исследованием позиции рисунка 5а, отмечая результаты анализа на рисунке 5б.

Белые намерены прорваться либо через поле d6, либо через f4, черный король должен стараться успеть воспрепятствовать обоим этим планам. Таким образом, если белый король попадает на c5, то черный должен встретить его на поле e7 (при короле на d7 черные не успевают защитить пешку g4: Крс5—d4—e3—f4).Другими словами, полю c5 соответствует поле e7. При положении белого короля на f4 черный должен успеть на h5, то есть полю f4 соответствует поле h5.

Очень важным для белых является поле d4. Нетрудно убедиться, что в этом случае король

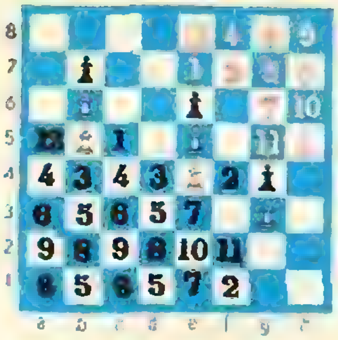


Рис. 5б.

должен стоять на f7, чтобы на Крd4—c5 ответить Крf7—e7, а на Крd4—e3 иметь ответ Крf7—g6. С поля c4 белые могут пойти как Крс5, так и Крd4. Черный король в этом случае должен быть расположен на f8, откуда возможно как Кре7 (при Крс4—c5), так и Крf7 (при Крс4—d4). С поля d3 возможны ходы Крс4, Крd4, Кре3. Поэтому полю d3 соответствует поле g7. С поля c3 возможны ходы Крd4, Крс4, Крd3. При этом единственное поле, откуда черный король может попасть на f7, f8, g7, — это поле g8.

Обходя последовательно все наиболее важные поля, имеющиеся в распоряжении белого короля, и подыскивая поля соответствия для его черного коллеги, получаем рисунок 5б. Соответственные поля здесь обозначены одним и тем же номером. Заметим, что найденное соответствие не однозначно, что и видно на рисунке. Например, полям b4 и d4 для белого короля соответствует одно и то же поле f7 для черного.

Теперь решение находится почти автоматически. При этом следует руководствоваться лишь одним правилом: ставить белого короля на такое поле, которому соответствует в данный момент поле нахождения черного короля, либо на такое поле, на соответствующее которому черный король не может попасть в один ход. Так как полю b1 соответствует поле g7, полю b2—h7, а полю a2—h8, то решает только **1. Крa1—a2!!**. После 1. Крb1? Крg7! или 1. Крb2? Крh7! черные в обоих случаях добиваются ничьей.

Поскольку дальнейший ход игры прост, то приведем лишь основной вариант (если черные играют по-другому, то, как вы без труда установите сами, они проигрывают еще быстрее):

1. Крa1—a2!! Крh8—h7
2. Крa2—b2! Крh7—g7
3. Крb2—b3! Крg7—g8
4. Крb3—c3! Крg8—f8
5. Крc3—c4! Крf8—f7
6. Крc4—d4! По лестнице, изображенной на рисунке 5а, белый король совершил «путь наверх», и черные беззащитны.

Очевидно, с помощью рисунка 5б легко оценить позицию и при других начальных положениях королей, но только для данной пешечной конфигурации.

---

*) Подробнее об этом можно прочесть, например, в книге «Шахматные окончания», т. 1, под редакцией Ю. Авербаха, М., 1956 г.

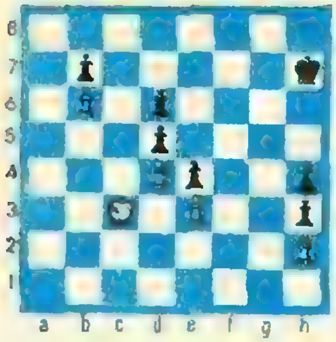


Рис. 6. В. Лейк, 1939 г. Белые начинают и делают ничью.

Заканчивая этот небольшой экскурс в теорию шахматных окончаний, предлагаем вам самостоятельно исследовать позицию рисунка 6. Заметим, что если кому-нибудь из вас удалось бы создать строгую математическую теорию эндшпиля рассмотренного типа, то это было бы существенным вкладом и в теорию шахмат.

Неприкосновенный король. *Белый король находится на поле c3 и не имеет права двигаться (поэтому он и называется неприкосновенным). У белых имеется в распоряжении еще ферзь. Могут ли они дать мат одинокому королю черных?*

Эту задачу придумал доктор физико-математических наук А. Брудно. Любопытно, что ни сам автор, ни многие из высококвалифицированных шахматистов не смогли решить эту задачу. На помощь пришла... вычислительная машина.

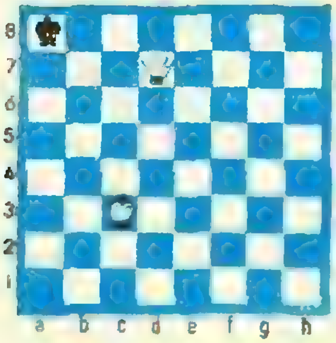


Рис. 7.

Сначала король загоняется в угол, например, на a8 — рисунок 7, — это в состоянии сделать один ферзь. Если теперь ход черных, то после 1... Крb8 2. Фc6 белые выигрывают в 10 ходов (убедитесь в этом самостоятельно).

Итак, белым нужно передать очередь хода противнику. Это достигается методом, очень напоминающим метод «треугольника»: **1. Фd7—d5+Крa8—a7** (1... Крa8—b8 2. Фd5—c6!) **2. Фd5—b5 Крa7—a8 3. Фb5—a6+ Крa8—b8 4. Фa6—c6!**

Попробуйте выяснить, можно ли заматовать вражеского короля в том случае, если королевский трон белых водрузить на поле c2.

* * *

В 1968 году в Москве состоялся традиционный матч Москва — Ленинград. При счете $39^{1}/_{2} : 39^{1}/_{2}$ (матч проводился на 40 досках в два круга) оставалась одна незаконченная партия, которая и решала судьбу матча. Черными играл ленинградец, имевший лишнюю пешку, и в случае его успеха побеждала команда Ленинграда. Доигрывание партии длилось ровно до той минуты, когда ленинградцы уже рисковали опоздать на поезд. В результате возникла позиция, изображенная на рисунке 8.

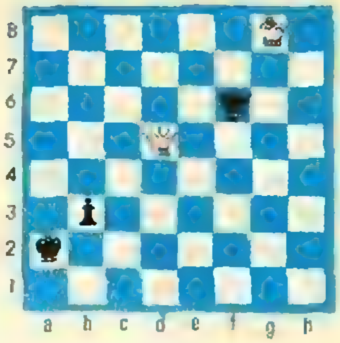


Рис. 8. А. Волович — В. Лявданский.

Партию должна была присудить авторитетная гроссмейстерская комиссия. Однако вся беда в том, что позицию «ферзь и коневая пешка против ферзя» шахматисты исследуют уже много десятков лет, а к окончательному мнению прийти так и не могут. Описанный случай послужил толчком для новых исследований, однако каждый последующий анализ опровергал предыдущий. Тем временем жюри решило признать партию ничьей, что вызвало возражения со стороны ленинградских шахматистов. Дело кончилось тем, что ответный визит москвичей в Ленинград не состоялся. Вот уже три года, как многолетняя традиция нарушилась. А умела бы машина оценивать такие окончания, как на рисунке 8, «ссоры» между городами не произошло бы...

Впрочем, мы договорились не рассматривать программирование шахмат, математических задач на шахматной доске и так очень много.

ОБЗОР ЧИТАТЕЛЬСКИХ ПИСЕМ

В 1971 году почта доставила в редакцию «Кванта» вдвое больше писем, чем в предыдущем. Общее их число в отдельные месяцы достигало 350 и не падало ниже 250 писем в месяц. Конечно это не так много, но мы надеемся, что число писем будет увеличиваться.

Авторами подавляющего числа писем являются, как и следовало ожидать школьники, активно интересующиеся математикой и физикой или обеими науками. Пишут не только старшеклассники, и ученики 7-х и 8-х классов. На задачи «Кванта» для младших школьников» отвечают ученики начальной школы. Есть даже письмо от дошкольника, написанное отцом под его диктовку (Сережа Абаимов из г. Куйбышева).

Об активности читателей особенно красноречиво свидетельствует то особое внимание, которое они уделяют задачам, помещаемым в журнале под рубрикой «Задачник «Кванта». Если в январе число читательских писем с решениями задач из этого раздела составляло всего лишь около 30 процентов, то в феврале было уже 40 процентов, а в марте 50, в апреле 60, а в последующие месяцы их число достигло 65 процентов от общего числа всех писем. Добавим к сказанному, что большинство писем содержит решения не одной, а сразу нескольких задач, степень трудности которых значительно превышает среднюю. Таким образом, многие школьники с пользой для себя поработали, стремясь найти идеи решений, а также четко и оригинально их выразить. Иногда эти читатели продолжают участвовать в работе этого раздела журнала и после окончания средней школы.

Школьники, присылающие решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта» приучаются работать в науке на доступном им сейчас уровне.

На читательских конференциях отдельными читателями было высказано мнение, что было бы желательно несколько снизить научный уровень статей и задач, помещаемых в «Задачнике «Кванта».

Однако большинство школьников, настроившихся на науку, резко возражают против снижения уровня трудности помещаемых в «Кванте» материалов. Например, вот что по этому поводу написал нам киевлянин *Н. Можаровский*: «Журнал лично мне очень нравится. Это, по-моему, единственный журнал у нас в стране, который на достаточном научном уровне публикует статьи, предназначенные для тех, кто избрал физику и математику своей будущей специальностью... Я уверен, что жаловаться на слишком тяжелые статьи могут лишь школьники, которые почти не открывают... учебников и книжек по физике и математике, мало решают задач. Ведь в статьях по физике редко можно встретить, к сожалению, хоть какую-нибудь формулу. Куда же более популяризировать? Хочу сказать, что лично я знаю еще 20—30 товарищей по учебе, которые разделяют это мнение...»

А вот мнение *Л. Суворовой* из г. Александровска, представителя других читателей «Кванта» — учителей: «Я работаю учителем физики 5-й год. Веду в школе факультативные занятия по физике. В этом году работаю с десятыми классами. Мы регулярно следим за всеми номерами «Кванта». Именно научность журнала нас привлекает». С ней солидаризуется *А. Колпаков*, учитель физики из Курска: «С большим вниманием и пользой применяю материалы Вашего журнала для факультативных занятий и для подготовки наиболее способных учащихся к олимпиадам. Ваш журнал выписывают многие учителя и учащиеся нашей школы. Школьники делятся между собой прочитанным в «Кванте». Вот что написал, например *Е. Завьявкин* из г. Кирово-Чепецка: «...Ваш журнал как хороший, нет,— как отличный учитель и помощник. Он во многом меня заинтересовал и во многом помог разобраться. Наверное, я не очень литературно приношу Вам свою благодарность, но не это главное... Когда дал его почитать ребятам, то и они и многие учителя его выписали в этом году. Наверное, спрос на «Квант» каждый год будет расти».

Однако, наряду с этими письмами мы получаем и такие письма, в которых читатели, не без основания, жалуются на недоступность для ясного понимания и трудность отдельных статей по физике.

«Меня зовут Турбина Галина, я учусь в 9 классе средней школы 22 г. Воронежа. По математике и физике за 8 класс у меня 5. Но, читая Ваш журнал, я многого не понимаю. Даже, точнее сказать, почти в каждой статье я не понимаю физического смысла формул. Например, в 9 номере за 1971 г. в статье «Беседа о принципе неопределенности» Азбеля не понятно, что означает фраза: «По теории относительности

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}».$$

Ведь теорию относительности Эйнштейна изучают в высших учебных заведениях. Трудно поверить, чтобы каждый, или хотя бы половина читателей — учеников из 200 тыс. человек (тираж 266135) поняли сущность указанной формулы.

Я вообще не знакома с такими словами как «нерелятивистская» квантовая механика и др. Поэтому мне бы хотелось, чтобы материал излагался в более простой форме и был рассчитан действительно на учащихся неспециализированных школ 9—10 классов».

Мы очень благодарны Гале за это письмо. Ведь такие письма помогают нам в нашей работе.

Редакция считает, что претензии Гали справедливы. Помещая статьи повышенной трудности, мы будем каждый раз это оговаривать и, конечно, разъяснять смысл непонятных выражений.

Мы хотели бы, чтобы большее число читателей высказалось по этому поводу.

Иногда «Квант» оказывается журналом для семейного чтения. Вот что пишет *Наташа Сукиасова* из Харькова: «Я люблю математику, брат увлекается физикой; мы собираем библиотечку, в которой ваш журнал занимает важное место. Все номера «Кванта» мы храним, нередко приходится перечитывать отдельные статьи по нескольку раз». Радует и то, что некоторые читатели благодарят редакцию за «конкретную большой эффективности помощь» (*С. Беренштейн*, Москва). Так, *В. Балабанов* из Новокузнецка сообщил, что работа над материалами, помещенными в «Кванте» под рубрикой «Практикум абитуриента» помогла ему поступить в институт. Еще конкретнее высказался *Г. Зайцев* (г. Гагра): «В дни сдачи вступительных экзаменов в университет я встретил товарищей, которые были едины со мной во мнении о большой пользе журнала «Квант», особенно его разделов под рубриками «Задачник «Кванта» и «Практикум абитуриента». В этом нас окончательно убедил опыт вступительных экзаменов».

Ряд писем содержит пожелания редакции. Так, научный сотрудник из Брянска *В. Чмутов* высказал мнение: «Хотелось бы, чтобы было больше материала о новейших, так сказать, самых последних достижениях математики, статей обзорного характера на популярном уровне по различным современным разделам математики». Некоторые читатели подчеркивают свое желание видеть более полным раздел «Лаборатория «Кванта», другие просят расширить раздел головоломок, парадоксов, игр и фокусов...

Эти пожелания наших читателей вполне оправданы, и мы в будущем году постараемся их удовлетворить.

Редакция благодарна читателям, приславшим конкретные критические замечания по материалам, помещаемым в «Кванте».

Мы глубоко признательны всем читателям, написавшим нам, с нетерпением ждем писем в будущем году.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

Математическая олимпиада в МЭСИ

В 1932 году был создан Московский экономико-статистический институт. Сейчас он занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов, связанных с машинной обработкой данных, необходимых для управления сложными системами.

В этом учебном году будет осуществлен первый выпуск факультета экономической кибернетики. Факультет готовит инженеров-математиков по математическому обеспечению ЭВМ, а также специалистов по использованию математических методов в экономике.

Использование современных вычислительных машин немыслимо без математики. Вот почему при поступлении в институт абитуриенты сдают два экзамена по математике. Впервые в этом году экзамены по математике и физике принимали при помощи ЭВМ.

В этом году МЭСИ проводит II математическую олимпиаду для учащихся выпускных классов средних школ. Олимпиада проводится в два тура: I — заочный, II — очный.

К участию во втором туре допускаются школьники, успешно справившиеся с задачами первого тура и приславшие решения не позднее 15 января 1972 года (по штемпелю почты). Очный тур будет проводиться с участием ЭВМ (см. «Квант» № 10, 1971 г.). Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет оповещен по указанному им адресу. Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в институт.

Решение задач должно быть выполнено на русском языке в ученической тетради. Наш адрес: Москва, Г-435, Б. Савинский пер., 14, «Олимпиада».

Задачи первого тура

1. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанного круга.

2. Решить уравнение $x! + y! = (x+y)!$ (если $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots n$).

3. Доказать, что если два угла треугольника связаны равенством,

$$\sin A + \sin B = \cos A + \cos B,$$

то треугольник прямоугольный.

4. Сколько надо взять слагаемых суммы $1+2+3+\ldots$, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

5. Шары одинакового радиуса уложены один раз в форме квадрата, а другой раз — в форме правильного треугольника. Найти количество шаров, если известно, что вдоль стороны квадрата располагается на два шара меньше, чем вдоль стороны треугольника.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

ИНФОРМАЦИЯ

МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

XIII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 7 по 20 июля 1971 года в Чехословакии состоялась XIII Международная математическая олимпиада учащихся средних школ. Непосредственным организатором олимпиады было Министерство школ Словацкой социалистической республики.

Предварительная работа жюри, в котором были представлены все страны — участники и председателем которого был академик Словацкой Академии наук Штефан Шварц, проходила с 8 по 11 июля в курортном местечке Тале в Средней Словакии. Жюри отобрало 6 задач, по 3 задачи на каждый день соревнований. По мнению большинства членов жюри, задачи XIII олимпиады в среднем превосходили по трудности задачи предыдущих международных олимпиад. К сожалению, впоследствии выяснилось, что задачи, представленные Болгарией (задача № 5) и Швецией (задача № 6), были ранее опубликованы. Однако с общей оценкой трудности задач прошедшей олимпиады можно согласиться, тем более, что большинство команд стран — участниц набрало существенно меньшее число очков, чем на предшествующих олимпиадах.

Соревнования участников олимпиады состоялись в течение двух дней 13 и 14 июля в городе Жилине. Там же проходила и дальнейшая работа жюри по проверке работ и присуждению премий. Олимпиада была четко организована местным оргкомитетом. Очень квалифицированно работали выделенные для координации оценок чешские и словацкие математики.

В XIII математической олимпиаде участвовало 15 стран — наибольшее число за всю историю международных олимпиад. Дебютантом соревнований была Куба. Второй раз в олимпиаде участвовала Австрия. Остальные страны: Болгария, Венгрия, Великобритания, ГДР, Голландия, Монголия, Польша, Румыния, СССР, Франция, Чехословакия, Швеция, Югославия, — являются уже традиционными участниками этого математического клуба. Каждая страна выставила команду из 8 учащихся (Куба была представлена лишь четырьмя участниками). В каждой стране формирование команд проводилось на основе результатов различного рода национальных соревнований.

Для нашей страны международная олимпиада явилась естественным продолжением Всесоюзной олимпиады, состоявшейся в Риге в апреле этого года.

Советский Союз на XIII математической олимпиаде представляли: *Алексей Александров* (школа-интернат №45 при ЛГУ), *Сергей Гашков* (школа-интернат № 18 при МГУ), *Василий Ерохин* (Ленинград, школа № 30), *Дмитрий Логачев* (Москва, школа № 2), *Олег Ляшко* (Харьков, школа № 27), *Евгений Саллинен* (школа-интернат № 45 при ЛГУ), *Михаил Цфасман* (Москва, школа № 2) и *Александр Чистов* (Ленинград, школа № 239).

Все члены советской команды являлись победителями Всесоюзной олимпиады, успешно они выступили и на XIII Международной олимпиаде. *Сергей Гашков* получил первую премию. Вторую премию получили *Дмитрий Логачев*, *Олег Ляшко*, *Василий Ерохин*, *Алексей Александров* и *Михаил Цфасман*. Третью премию получили *Александр Чистов* и *Евгений Саллинен*.

Все наши «олимпийцы» хорошо себя зарекомендовали и были зачислены без сдачи вступительных экзаменов на механико-математические факультеты Московского или Ленинградского университетов.

Всего по итогам олимпиады было присуждено 48 премий: 7 первых, 12 вторых, 29 третьих. Кроме Сергея Гашкова первую премию получили *Руже Имре* (Венгрия), *Гондош Ференц* (Венгрия), *Бурмайстер Вольфганг* (ГДР), *Шарек Станислав* (Польша), *Комят Петер* (Венгрия) и *Франко Петер* (Венгрия).

Особо отметили успех венгерского школьника Руже Имре, набравшего максимально возможное число очков. Он в третий раз является участником этого международного состязания. Другим ветераном олимпиады является уже известный читателям «Кванта» школьник из ГДР Вольфганг Бурмайстер, в пятый раз отстаивавший честь своей команды.

По традиции на международных математических олимпиадах официально подводятся лишь итоги личного первенства участников. Однако всегда большой интерес вызывают неофициальные итоги командного первенства по сумме очков, набранных командами различных стран.

Лучший результат показала команда Венгрии, набравшая 255 очков из 336 возможных, команда СССР имеет 205 очков. Затем следуют команды ГДР — 142 очка, Польши — 118 очков, Великобритании — и Румынии — по 110 очков. Каждая из остальных команд набрала менее 100 очков.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось в Братиславе в университете имени Яна Амоса Каменского, где победителям олимпиады были вручены дипломы и премии. Нет сомнений, что для многих юных участников олимпиады эта международная математическая встреча является лишь началом большой интересной жизни в современной математике.

На заключительном заседании руководитель Польской делегации пригласил все страны, участвовавшие в XIII олимпиаде, на XIV олимпиаду в Польскую Народную Республику.

Задачи XIII Международной олимпиады

Первый день соревнований

1. Доказать, что следующее утверждение:

«Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)+$$
$$+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)+$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0»$$

справедливо при $n=3$ и $n=5$ и не справедливо ни при каком другом натуральном $n>2$ (Венгрия, 5 очков).

2. Пусть имеется выпуклый многогранник P_1 с девятью вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Обозначим через $P_2, P_3, \ldots, P_9$ многогранники, полученные из P_1 параллельными переносами, которые перемещают точку A_1 соответственно в точки $A_2, A_3, \ldots, A_9$. Доказать, что по крайней мере два из многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_9$ имеют хотя бы одну общую внутреннюю точку (СССР, 7 очков).

3. Доказать, что последовательность $\{2^n-3\}$ ($n=2, 3, 4, \ldots$) содержит бесконечное множество чисел, каждые два из которых взаимно просты (Польша, 9 очков).

Второй день соревнований

4. У тетраэдра $ABCD$ все грани — остроугольные треугольники. Рассмотрим все замкнутые ломаные линии $XYZTX$, определенные следующим образом: X — точка на ребре AB, отличная от A и B. Аналогично Y, Z, T — внутренние точки ребер BC, CD, DA соответственно. Доказать, что

а) если $\measuredangle DAB+\measuredangle BCD\neq\neq\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$, то среди этих ломаных нет ни одной кратчайшей;

б) если $\measuredangle DAB+\measuredangle BCD==\measuredangle ABC+\measuredangle CDA$, то существует бесконечно много ломаных минимальной длины и эта длина равна $2AC\sin\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha=\measuredangle BAC+\measuredangle CAD++\measuredangle DAB$ (Голландия, 6 очков).

5. Доказать, что для любого натурального числа m существует непустое конечное множество S точек плоскости такое, что для любой точки A из S имеется ровно m точек из S, которые находятся на единичном расстоянии от A (Болгария, 7 очков).

6. Рассмотрим квадратную таблицу

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}, \end{array}$$

состоящую из неотрицательных целых чисел и удовлетворяющую следующему условию: как только $a_{ij}=0$, так справедливо неравенство $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}+a_{1j}++a_{2j}+\ldots+a_{nj}\geqslant n$. Доказать, что сумма всех элементов таблицы не меньше чем $\frac{1}{2}n^2$ (Швеция, 8 очков).

И. С. Петраков,
В. А. Скворцов

ВПЕЧАТЛЕНИЯ УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ

10 июля наша команда приехала в Братиславу. На вокзале нас встречали организаторы, которым удалось сразу же создать на олимпиаде теплую и непринужденную атмосферу. В гостинице мы смогли познакомиться со своими соперниками. Члены других команд, как только с нами встретились, начали давать свои задачи. Среди задач, условия которых нам удалось разобрать, выделялась одна, предложенная югославскими ребятами: «Ползут три черепахи. Первая говорит: «За мной ползут две черепахи», вторая говорит: «Передо мной ползет одна черепаха и за мной ползет одна черепаха», а третья: «Передо мной ползут две черепахи и за мной ползет одна черепаха». Как это может быть?». Решение ее поражает своей силой и убедительностью*).

Утром следующего дня участников повезли в Жилину, где должна была состояться олимпиада. По пути все с удовольствием осмотрели современный курорт Пештяны и старинный городок Тренчин. Фотоаппараты работали без перерыва. В Жилине мы первым делом осмотрели здание строительного техникума, где должно было состояться соревнование, затем поехали на озеро Бойнице. На обратном пути на одной из горных дорог автобус с командами Австрии, Болгарии, Кубы и ГДР «прилег» на бок. Все бросились

---

*) Ответ: третья черепаха лжет.

Члены советской команды. Слева направо: В. Ерохин, Д. Логачев, О. Ляшко, И. С. Петраков, А. Александров; второй ряд: С. Гашков, Е. Саллинен, А. Чистов, М. Цфасман.

на помощь, но когда выяснилось, что никто не пострадал, вновь защелкали фотоаппараты. Происшествие отвлекло нас от мысли о предстоящем соревновании и убедило, что жесты, означающие «автобус перевернулся», на всех языках «звучат» примерно одинаково.

Наступили главные дни — дни соревнований. 13-го состоялось официальное открытие олимпиады. В президиуме находились организаторы и руководители команд, в том числе руководители нашей сборной В. А. Скворцов и И. С. Петраков. Нам пожелали успехов. Еще до этого были сообщены порядковые номера участников (по словацкому алфавиту): 1. Александров Алексей. 2. Цфасман Михаил. 3. Чистов Александр. 4. Гашков Сергей. 5. Ерохин Василий. 6. Логачев Дмитрий. 7. Ляшко Олег. 8. Саллинен Евгений. Аналогичные номера получили ребята других команд. Всех участников, имеющих номер 1, разместили в комнате 1, номер 2— в комнате 2 и так далее. В конвертах, лежавших на столах, были задачи первого дня соревнований.

Первая задача довольно проста. Наша команда получила за нее 34 очка. Случай $n=3$ доказывается алгебраически. Для $n=5$ заметим, что при $a_1 > a_2 > \ldots > a_5$ (для определенности) первый, третий и пятый члены суммы положительны, второй и четвертый отрицательны, причем по модулю первый больше второго, а пятый больше четвертого. Для других n строятся противоречащие примеры.

Самыми сложными для нашей команды оказались вторая и третья задачи. Вторая задача имеет нетривиальную идею: все многогранники $P_1, P_2, \ldots, P_9$ содержатся в многограннике, получаемом из P_1 гомотетией с коэффициентом 2 относительно точки A_1. За эту задачу команда получила всего 21 очко. В третьей задаче доказывается, что по первым k членам такой последовательности можно построить $k+1$-й член. Возьмем все простые делители этих k членов последовательности: $p_1, p_2, \ldots, p_m$; число

$$2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-1$$

делится на $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Но так как все эти простые делители нечетны, число $2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-3$ не делится ни на одно из них, следовательно, взаимно просто со всеми членами последовательности. За эту задачу мы также получили маловато, всего 27 очков. Вечером того же дня состоялась какая-то экскурсия, воспоминаний о ней не осталось, так как все наши мысли были поглощены задачами.

Задачи второго дня, по мнению советской команды, были проще, чем первого. Четвертая задача, вероятно, была бы сложнее, если бы в ее вопросе не содержалось подсказки: тот факт, что в выражении для длины ломаной фигурирует угол α, вызывает естественное желание «создать» его на плоскости. Решается она «разворачиванием» тетраэдра на плоскость. Эта задача дала команде 34 очка.

Пожалуй, самой легкой из всех задач была пятая. Даже не верится, что за ее решение давалось 7 очков, столько же, сколько за вторую. Она решается методом математической индукции. Надо лишь доказать, что для системы S, удовлетворяющей условию задачи для k точек, существует такой параллельный перенос, который образует (вместе с S) систему S_1, для которой выполнено условие задачи для $k+1$ точки. За эту задачу наша команда получила 51 очко.

В задаче 6 проще всего, предположив противное, записать все возможные неравенства для строки с минимальной суммой стоящих в ней чисел и, аналогично, для столбца. Затем надо сложить все неравенства и учесть, что сумма в выбранной строке (столбце) не превышает $\frac{n}{2}$. За шестую задачу наша команда получила 38 очков.

Эти результаты мы узнали позднее, а сразу после соревнования всей команде казалось, что выступили весьма неудачно. Немного утешил нас только разговор с членами других команд: почти все, по их словам, выступили хуже.

Сразу после олимпиады была организована поездка в Высокие Татры по очень красивым горным дорогам. Многочисленные старинные за́мки выглядели как бы естественным продолжением гор. Нам показали горы не только снаружи, но и изнутри: участники олимпиады побывали в Деменовских пещерах, где прекрасные природные сооружения умело дополняются искусной подсветкой.

Восемнадцатого все вновь выехали в Братиславу. В поезде мы впервые после соревнований увидели наших руководителей В. А. Скворцова и И. С. Петракова, которые жили отдельно от команды и, пока мы ездили на экскурсии, проверяли наши работы и участвовали в заседаниях жюри. Они сообщили наши результаты, которые в сравнении с результатами других команд оказались выше, чем мы предполагали.

19 июля состоялось закрытие. Прозвучал гимн ЧССР как страны-организатора. Жюри сообщило итоги соревнований, высказав мысль, которую подсказал нам весь ход олимпиады: на олимпиаде есть победители, но нет и не может быть побежденных, все уедут из Чехословакии с самыми хорошими воспоминаниями об этом празднике дружбы юных математиков разных стран. Победителям и призерам олимпиады были вручены дипломы и умело подобранные премии. В заключение прозвучал международный студенческий гимн. Руководитель Польской делегации пригласил все страны - участницы в Польшу на XIV Международную математическую олимпиаду. Я заканчиваю рассказ о XIII ММО пожеланием успеха участникам XIV ММО. Первых Вам мест, «сборная — 72».

М. А. Цфасман

V МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Со 2 по 11 июля 1971 года в Болгарии проходила V Международная физическая олимпиада школьников социалистических стран. От каждой страны приглашалось по 5 участников. Два школьника (один из Польши и один из Чехословакии) по болезни не смогли приехать. Всего в олимпиаде участвовало 33 школьника из 7 стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии.

Программа олимпиады целиком была подготовлена Организационным комитетом Болгарии. В программу входило решение 4 теоретических задач (для их решения отводилось 5 часов) и выполнение 1 экспериментальной задачи (на нее отводилось тоже 5 часов).

Достижения оценивались суммарным количеством набранных участниками баллов, присуждаемых Международным жюри, учрежденным из руководителей каждой команды от 7 стран-участниц олимпиады. Наивысшее число баллов за каждую теоретическую задачу — 10, за экспериментальную— 20 (10 за выполнение ее теоретической части и 10 за эксперимент и его оформление). Таким образом, максимальное число баллов было 60.

Никто из участников 60 баллов не набрал. Наибольшее число — 48 — имеют два школьника: *Адам Тихи* из Венгрии и *Карел Шаферник* из Чехословакии. Оба они получили первые премии.

Всего было выдано 5 первых премий.

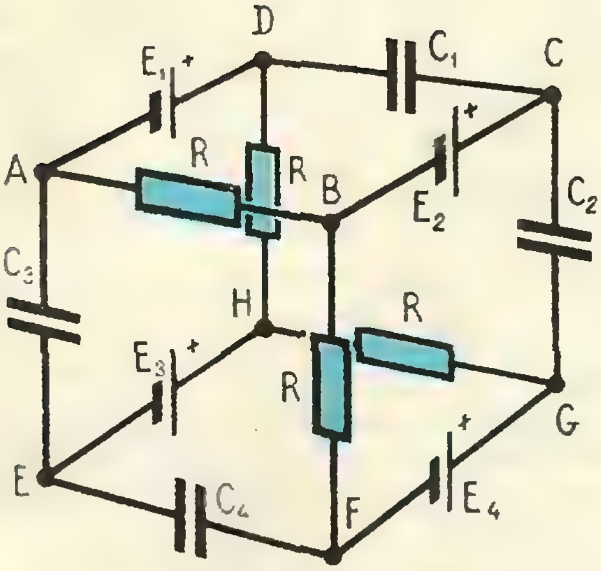
От Советского Союза в олимпиаде участвовало 5 десятиклассников: *Алексей Абрикосов* (Москва), *Сергей Будник* (Днепропетровск), *Андрей Варламов* (Киев), *Витас Сальджюкас* (Вильнюс), *Александр Снигирев* (село Осиновка Могилевской обл.). Все они — победители Всесоюзной физической олимпиады 1971 года.

Все наши школьники успешно выступили в V Международной физической олимпиаде и получили соответствующие грамоты и премии. Первую премию получил *Андрей Варламов* (45 баллов), вторую премию — *Алексей Абрикосов* (44 балла). А. Абрикосов был удостоен также специального приза за наибольшее число безупречно выполненных заданий (4 из 6 заданий были отмечены наивысшими баллами и похвалой). В этом году, как и на предыдущих олимпиадах, в соответствии с уставом, рассматривалось только личное первенство и не было командных соревнований.

Ниже приводятся задачи V Международной физической олимпиады 1971 года.

1. Гладкий клин с массой M имеет треугольное сечение с углами при основании θ_1 и θ_2. На клине находятся два груза с массами m_1 и m_2, гладкие, связанные между собой нерастяжимой нитью, перекинутой через маленький блок, прикрепленный к вершине клина. Массами нити и блока пренебречь по сравнению с массами грузов и клина. Вся система первоначально покоится. С каким ускорением a_0 будет скользить клин, если он находится на идеально гладкой горизонтальной плоскости и если система предоставлена сама себе? Выразить ускорение грузов по отношению к клину a' через ускорение клина. При каком соотношении масс m_1 и m_2 клин будет неподвижен, а грузы будут скользить по клину?

2. Стеклянная трубка сечением $S = 1$ *см*^{2} запаяна с одного конца, заполнена водородом и расположена вертикально так, что верхний конец запаян, а нижний опу-



щен в ванну со ртутью. Все это находится в герметизированной камере, заполненной воздухом с температурой $T_0 = 273°$ K и давлением $p_0 = 1{,}334 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Ртуть в трубке поднялась на высоту $h_0 = 700$ *мм* над уровнем ртути в ванне.

Перемещением одной из стенок камеры давление воздуха изотермически понижается до $p_1 = 8 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}, при этом высота ртутного столбика снижается до $h_1 = 400$ *мм*. Затем, посредством нагрева при постоянном объеме камеры, температура повышается до T_2 и высота ртутного столбика становится при этом $h_2 = 500$ *мм*. После этого происходит изобарическое расширение воздуха в камере, причем ртутный столбик устанавливается на высоту $h = 450$ *мм*.

При условии, что данная система всегда находится в состоянии термодинамического равновесия, вычислить: массу водорода m, температуру T_2, давление водорода в конечном состоянии p. Плотность ртути при T_0 $\rho_0 = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м*^{3}, коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}84 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$, газовая постоянная $R = 8{,}317 \cdot 10^3$ *дж/кмоль·град*. Температурное расширение стекла и изменение уровня ртути в ванне — не учитывать.

Замечание. Пусть ΔT — максимальная разность температур между состояниями системы. Так как $\beta \Delta T = x \ll 1$, то можно воспользоваться приближением $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

3. Подсчитать общую энергию W, накопленную от источников постоянного напряжения E_1, E_2, E_3, E_4 в конденсаторах емкостью C_1, C_2, C_3, C_4, если они подключены, как показано на схеме. Все сопротивления имеют одинаковую величину. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Какой заряд q_2 будет иметь конденсатор C_2, если точки H и B соединить накоротко?

Числовые данные: $E_1 = 4$ *в*, $E_2 = 8$ *в*, $E_3 = 12$ *в*, $E_4 = 16$ *в*; $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$ *мкф* (см. рисунок).

4. Перед вертикально расположенным плоским зеркалом находится наполненный водой аквариум шарообразной формы из тонкого стекла. Радиус аквариума R, расстояние между его центром и зеркалом $3R$. Наблюдатель, находящийся на большом расстоянии перед аквариумом и зеркалом, смотрит по направлению, проходящему через центр аквариума, перпендикулярно зеркалу. В диаметрально противоположной от наблюдателя точке аквариума находится маленькая рыбка, которая начинает перемещаться перпендикулярно оси вдоль стены аквариума со скоростью v. С какой относительной скоростью $v_{отн}$ будут расходиться изображения рыбки, видимые наблюдателем? Показатель преломления воды $n = \frac{3}{4}$.

Экспериментальная задача. Даны: источник постоянной э. д. с., амперметр, вольтметр, реостат и соединительные провода. Соберите схему, которая позволит вам получить графическую зависимость полезной мощности P, развиваемой источником на реостате, в зависимости от силы тока I.

Используя данные из полученного графика:

1) найдите внутреннее сопротивление источника э.д.с.,

2) определите э. д. с. источника,

3) начертите график зависимости полезной мощности P от внешнего сопротивления,

4) начертите зависимость полной мощности от внешнего сопротивления,

5) начертите зависимость коэффициента полезного действия данного источника от внешнего сопротивления.

Замечание. Основную графическую зависимость — зависимость полезной мощности от силы тока — построить, используя не менее 30—35 точек.

Решения этих задач помещены в журнале «Физика в школе» № 6, 1971 г.

М. Д. Карасев,
Г. С. Тарасюк

V ГОРОДСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ШКОЛЬНИКОВ КИЕВА

А. И. Шапиро

> *«Первое открытие всегда заключается в том, что есть вещи, которые стоит открывать».*
>
> *Д. Томсон* «Дух науки»

В конце апреля в Киеве проходила V ежегодная городская научная конференция школьников. В ней приняли участие юные любители физики, занимающиеся в физических кружках Дворца пионеров и школ города. На конференции были заслушаны доклады и сообщения, приняты новые члены в городское научное общество школьников и подведены итоги конкурса на лучшую ученическую работу.

Основные цели конференции — привлечь школьников к научно-исследовательской работе, выявить талантливую молодежь, глубоко и серьезно интересующуюся наукой, помочь учащимся проявить свои способности и правильно выбрать профессию.

В работе секции физики приняли участие ученые города, учителя, 540 школьников Киева и области, делегации юных физиков из Харькова, Донецка и Хмельницкого.

На конкурс было подано 143 работы. Жюри конкурса, в которое входили видные ученые институтов АН УССР, отметило высокий научный уровень 30 работ. Из-за недостатка времени всего было заслушано 14 докладов. Основные требования, предъявленные к работам при отборе, сводились к следующему: непременное наличие элемента творчества, осмысленное изучение научной литературы, точное и лаконичное изложение результатов работы. Приведем некоторые доклады, отмеченные премиями.

В докладе члена физического кружка Дворца пионеров Сергея Кривошлыкова было дано теоретическое объяснение интересному экспериментальному эффекту — увеличению времени всплывания тел во вращающейся жидкости. Электрический счетчик потока жидкости в трубопроводе разработал ученик 171 школы, член физического кружка Дворца пионеров Владимир Малкин. Доклады учеников 145 школы Андрея Варламова и Сергея Парновского (оба занимаются в кружке Дворца пионеров) были посвящены применению методов виртуальных перемещений и принципа Ферма для решения задач. Простому способу определения периода гармонических колебаний был посвящен доклад ученика 47 школы Евгения Шкляр.

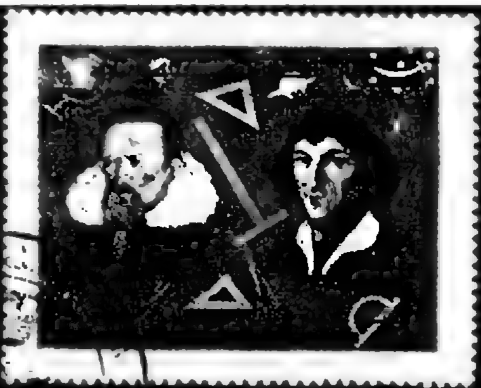
Многие работы выполнялись совместно, небольшой группой школьников. Так, группа учащихся киевской физико-математической школы при КГУ разработала модель транспортного устройства с двигателем шагающего типа, а члены физического общества 173 киевской школы создали установку для определения концентрации растворов с помощью ультразвука и так далее. Ученица 9 класса 109 школы г. Волгограда Надя Поленичкина рассказала в своем сообщении о том, как под руководством ученых учащиеся этой школы получают новые электропроводные материалы на полимерной основе.

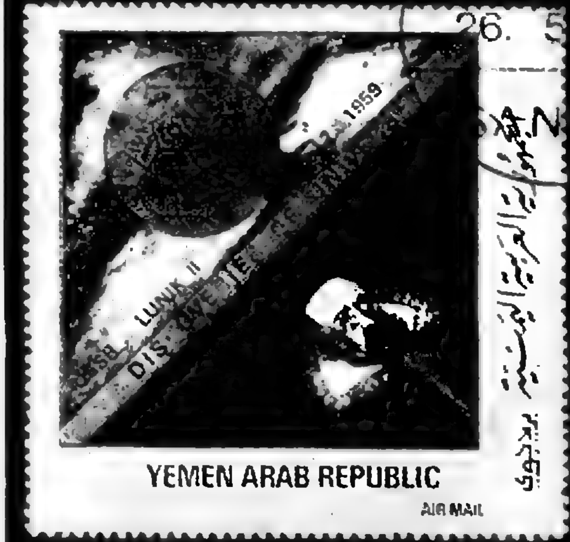
Премиями были отмечены и некоторые работы, которые из-за недостатка времени не были доложены на конференции. Из них хочется выделить реферативную работу ученика 8 класса 108 школы Володи Винецкого «Методы определения скорости света».

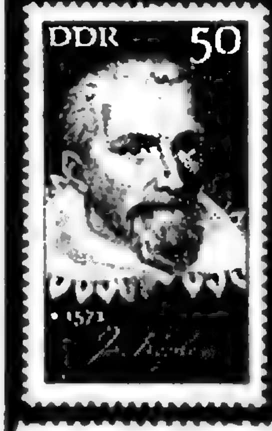
Конференция показала, что серьезное увлечение школьников физикой далеко от игры в науку. Тематика лучших работ свидетельствует о желании их авторов с максимальной степенью полноты разобраться в заинтересовавшем их явлении.

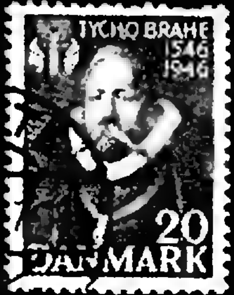
К сожалению, однако, часть работ, поданных на конкурс, страдала повторением чужих мыслей и пустословием. Встречались работы, авторы которых, начитавшись популярных брошюр, считали багаж своих знаний достаточным, чтобы сразу решать глобальные проблемы современной физики. Особенно в этом отношении «повезло» лазерам и ускорителям.

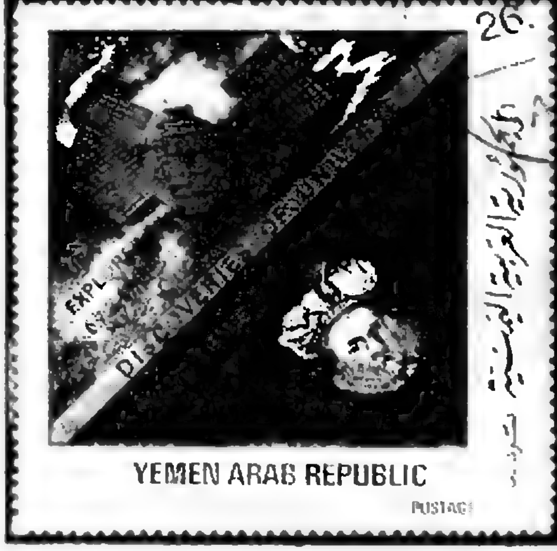
Конференция была очень интересна и, несомненно, принесла пользу всем участникам.




26. 5
LUNIK II
DISCOVERIES
YEMEN ARAB REPUBLIC
AIR MAIL




TYCHO BRAHE
1546
1946
20
DANMARK


26.
EXPL
DISCOVERIES
YEMEN ARAB REPUBLIC
POSTAGE

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИОГАННУ КЕПЛЕРУ И ТИХО БРАГЕ

Иоганн Кеплер (1571—1630), 400 лет со дня рождения которого исполняется в этом году, был выдающимся астрономом и великолепным математиком.

Он открыл три закона движения планет, на которых вечно будет покоиться планетарная астрономия.

Кеплер был сторонником теории Коперника, защищал его во время университетских дискуссий. Он писал: «Я люблю Коперника не за одни его высшие дарования, но и за ум, твердый и спокойный».

На фото приведены марки Йеменской арабской республики, на одной из которых дан портрет Иоганна Кеплера рядом с портретом Николая Коперника, а на второй, взятой из серии, посвященной открывателям космоса, помещен портрет Кеплера и советский вымпел, доставленный на Луну. Портрет Кеплера вы видите также на марке Германской демократической республики, выпущенной в 1971 г.

На фото приведены еще две марки (Дании и Йеменской арабской республики) с портретом известного астронома XVI века Тихо Браге, у которого несколько лет работал помощником Иоганн Кеплер.

Тихо Браге был блестящим наблюдателем и гениальным изобретателем точных астрономических приборов. Он построил первую в Европе большую обсерваторию и составил удивительно точные таблицы движения планет.

В. А. Алтыкис

ЗНАЧКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

В июле 1959 года по инициативе Румынского математического и физического общества и Министерства просвещения Румынии была проведена 1-ая Международная математическая олимпиада (ММО). В ней приняли участие команды Болгарии, Венгрии, Германской Демократической республики, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии. С тех пор традиционно в июле месяце каждого года проводятся Международные математические олимпиады в одной из социалистических стран.

Делегация каждой страны состоит из 8 участников, руководителя команды и его заместителя. Все руководители команд являются членами международного жюри. Участники команды — учащиеся выпускных классов средних школ не старше 19 лет, являющиеся, как правило, победителями национальных олимпиад (см. «Квант», № 11, 1971 г.).

До начала олимпиады каждая страна присылает в оргкомитет страны-организатора свои задачи. Из их числа международное жюри отбирает 6—7 задач, идущих на олимпиаду. Трудность каждой задачи оценивается в очках. Жюри устанавливает максимальное число очков, которое может быть присуждено за каждую задачу. Для награждения участников олимпиады, набравших соответствующее число очков (число очков определяется международным жюри), учреждены первая, вторая и третья премии и почетные грамоты.

В честь олимпиад выпускаются специальные значки, которые вручаются всем участникам олимпиады.

I ММО проходила с 23 по 31 июля 1959 года в Румынии.

В составе советской команды выступали *А. Тоом* (3-я премия), *В. Федорец*, *В. Фролов* и *А. Четаев*.

II ММО проходила с 18 по 25 июля 1960 года в селении Синая (Румыния).

На рисунке 1 изображен значок Румынской национальной олимпиады, вручавшийся участникам I и II Международных математических олимпиад.

III ММО проходила с 7 по 13 июля 1961 года в Будапеште (Венгрия). Специального значка к этой олимпиаде не выпускали.

Советская команда во II и III олимпиадах участия не принимала.

IV ММО проходила с 7 по 13 июля 1962 года в Праге (Чехословакия). На рисунке 2 изображен значок, посвященный этой олимпиаде.

В составе советской команды выступали *И. Бернштейн* (первая премия), *Л. Гончарова* (первая премия), *А. Потепун* (вторая премия), *Г. Маргулис* (вторая премия), *Г. Куранов* (третья премия), *Д. Муштари* (третья премия), *Е. Панкратьев* и *А. Шерменев*.

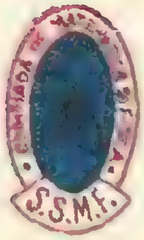


Рис. 1.

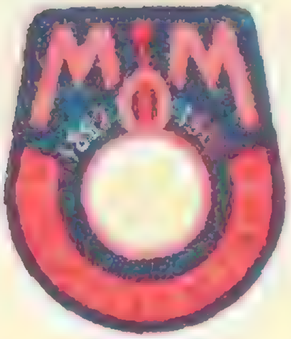


Рис. 2.

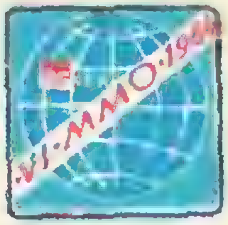


Рис. 3.

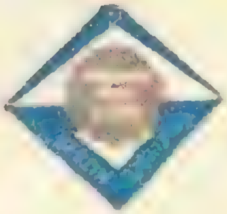


Рис. 4.

BeatriceGloria_personal library

Рис. 5.

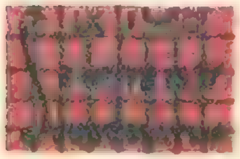


Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

V ММО проходила с 5 по 13 июля 1963 года, во Вроцлаве (Польша). Кроме ранее перечисленных стран в ней приняла участие команда Югославии.

В составе советской команды выступали *Г. Малолеткин* (первая премия). *А. Толпыго* (первая премия), *А. Зайцев* (первая премия), *В. Фишман* (вторая премия), *А. Звягинцев* (вторая премия), *С. Смирнов* (вторая премия) и *К. Андреев* (третья премия). Специального значка не было.

VI ММО проходила с 30 июня по 10 июля 1964 года в Москве. На рисунке 3 приведен значок, посвященный этой олимпиаде. Дебютантом олимпиад была команда Монголии.

В составе команды Советского Союза выступали *Д. Бернштейн* (первая премия), *Г. Архипов* (первая премия), *Ю. Матиясевич* (первая премия), *В. Алексеев* (вторая премия). *А. Виленкин* (третья премия). *В. Ивлев* (третья премия). *А. Флоренсов* (третья премия). *И. Рипс.*

VII ММО проходила с 3 по 13 июля 1965 года в Берлине (ГДР). Впервые в этой олимпиаде приняла участие команда Финляндии. Значок, выпущенный к этой олимпиаде, изображен на рисунке 4.

В составе команды Советского Союза выступали *П. Блехер* (первая премия), *С. Валландер* (первая премия). *А. Зубков* (первая премия), *А. Пересецкий* (первая премия), *Н. Широков* (первая премия), *А. Карзанов* (вторая премия), *В. Стояновский* (вторая премия), и *Ю. Муравьев.*

VIII ММО проходила с 3 по 13 июля 1966 года в Софии (Болгария). На рисунке 5 изображен значок, выпущенный к этой олимпиаде.

В составе команды Советского Союза выступали *Ю. Богданский* (первая премия). *С. Гусейн-Заде* (первая премия), *А. Марченко* (первая премия), *М. Фокин* (первая премия), *Г. Розенблюм* (первая премия), *Б. Матикайнен* (вторая премия), *А. Заимских* (третья премия), *С. Либер.*

IX ММО проходила с 2 по 13 июля 1967 года в Цетинье (Югославия). На рисунке 6 изображен значок, выпущенный к этой олимпиаде. Впервые в олимпиаде приняли участие команды Англии, Италии, Франции и Швеции.

В состав советской команды вошли: А. Лившиц (первая премия). *В. Турчанинов* (первая премия), *А. Суслин* (первая премия), *М. Бошерницан* (вторая премия), *Ю. Жаринов* (вторая премия), *И. Кричевер* (вторая премия), *С. Соболев* (третья премия), *В. Харламов* (третья премия).

X ММО проходила с 5 по 18 июля 1968г. в Москве. Значок этой олимпиады показан на рисунке 7.

В составе советской команды выступали: *М. Блюдзе* (первая премия), *П. Курчанов* (первая премия), *В. Пономаренко* (первая премия), *С. Соболев* (первая премия), *В. Федотов* (первая премия), *В. Кумарин* (вторая премия), *В. Макарычев* (третья премия), *Г. Белый* (третья премия).

На рисунке 8, 9, 10 приведены соответственно значки XI, XII и XIII ММО. Подробно об этих олимпиадах вы сможете прочесть в «Кванте» № 4 за 1970 г., №№ 2, 12 за 1971 г.

М. Л. Смолянский

К статье «Метод площадей»

1. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

2. Используйте формулы (1) и (6).

3. $S = \frac{1}{2} m^2 \sin 2\beta + m \sin\beta \sqrt{c^2 - m^2 \sin^2 \beta}$.

4. Докажите, что если радиус окружности, касающейся гипотенузы c и продолжений катетов a и b треугольника ABC, равен ρ, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(a + b - c)\rho}{2}.$$

5. Выведите формулу $S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} m_a m_b \sin \varphi_{ab}$,

где φ_{ab} — угол между медианами m_a и m_b.

6. Заметьте, что если a — наименьшая, а c — наибольшая из сторон треугольника, то h_a — наибольшая, а h_c — наименьшая из его высот.

7. $\frac{a\sqrt{h^2 + a^2 \sin^2\varphi}}{\sqrt{h^2 + a^2}}$.

К статье «Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте»

1. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \sin\alpha} - \frac{kg^2}{m\varepsilon l^3 \sin\alpha}}$.

2. $T_x = T_1 \frac{p_2}{p_1} = T_1 + \frac{2T_1 A}{e p_1 s} = 630^\circ K_1$.

3. 0,5 *кг/м*^{3}.

4. $\frac{N}{N_0} = 5 \cdot 10^{-17}$.

5. $N = UI - I^2R = 4{,}48$ *квт*.

6. $\lambda = cT = 1{,}2 \cdot 10^8 m \left(T = \frac{2\pi}{15{,}7} сек = 0{,}4 сек\right)$.

7. 1,67 *см*.

8. 784 *н*.

9. $A = \frac{3g^2}{r} = 1{,}35 \cdot 10^4$ *эрг*.

10. $\varepsilon = 10$ *в*, $r = 0{,}5$ *ом*.

11. 96 *вт* и 144 *вт*.

12. Расстояние от центра шара до изображения иголки равно 2,04 *см*. Размеры изображения иголки 0,18 *см*.

НАПЕЧАТАНО В 1971 ГОДУ

СТАТЬИ ПО ФИЗИКЕ

Азбель М. Я. Диалог о температуре	2	11
Азбель М. Я. Беседа о принципе неопределенности	9	7
Асламазов Л. Г. Эффект Доплера	4	30
Асламазов Л. Г. Снежные заносы	6	23
Асламазов Л. Г. Лунные дорожки	9	18
Беспалов О. Г., Настюха А. И. Геоакустическая разведка подводных месторождений полезных ископаемых	10	6
Воробьев И. А. Межзвездные корабли на гравитационных рессорах	10	26
Жуковский Н. Е. Основы теории вихрей	4	21
Зайцев И. А. V Всесоюзная физическая олимпиада	11	42
Зильберман А. Р. Преобразование электрических цепей	3	10
Капица П. Л. Из воспоминаний о профессоре Резерфорде	8	17
Кикоин А. К. Вращательное движение тел	1	1
Кикоин А. К. История изобретения электрического конденсатора	9	56
Китайгородский А. И. Модели молекул	12	18
Кривошлыков С. А. Механика вращающегося волчка	10	21
Коган Б. Ю. Удивительные катки	3	21
Кузнецов В. И. Великий закон	7	1
Куллити Б. Диффузия в металлах	10	10
Лившиц М. С. Парадоксы реактивного движения	7	11
Минц Р. Г. Графики потенциальной энергии	5	8
Мякишев Г. Я. Взаимодействие атомов и молекул	11	1
Огиевецкий И. И. Поле тяжести сферически-однородного тела	11	16
Резерфорд Э. Некоторые космические аспекты радиоактивности	8	9
Смородинский Я. А. Движение планет	1	20
Смородинский Я. А. Закон Ома	4	8
Смородинский Я. А. «Похожие» движения	9	15
Смородинский Я. А. Дви-		

жение комет и открытие атомного ядра 12 1
Стасенко А. Л. Этот ужасный космический холод 8 51
Фабрикант В. А. Парадокс С. И. Вавилова 2 1
Федоров М. А. Полупроводниковые диоды и триоды 6 8
Фуллман Р. Рост кристаллов 6 16
Хейфец С. А. Блеск в природе, или почему у кошки глаза светятся 9 20
Эйнштейн А. Иоганн Кеплер 12 8

СТАТЬИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Башмаков М. И. Нравится ли вам возиться с целыми числами? 3 15
Башмаков М. И. О постулате Бертрана 5 4
Бендукидзе А. Д. Архимед и квадратура параболы 7 7
Березин В. Н. Луночки Гиппократа 5 17
Виленкин Н. Я. Комбинаторика 1 13
Гервер М. Л. Задача о числах в таблице 12 24
Гик Е. Я. Шахматно-математические заметки
От персидского шаха до наших дней 8 55
Конь Аттилы 9 52
Ферзь-часовой 10 49
Неприкосновенный король 12 47
Гутенмахер В. Л. V Всесоюзная математическая олимпиада 11 35
Гутер Р. С. Вычислительные машины и системы счисления 9 1
Гутер Р. С. Язык человека и язык машины 10 1
Депман И. Я. Совершенные числа 8 1
Каток А. Б. Экономика и линейные неравенства 3 1
Каток А. Б. Экономика и линейные неравенства (продолжение) 4 1
Колесников Н. Н. П. Л. Чебышев (1821—1894) 5 1
Копылов Г. И. Логические кубики 9 60
Лиман М. М. Заспорили два друга 5 39
Марон И. А. М. В. Остроградский 9 11
Матиясевич Ю. В. Первое знакомство с номограммами 5 25
Раскин В. В. Может ли машина переводить? 9 25
Раскин В. В. Еще раз о машинном переводе 12 11
Фукс Д. Б., Фукс М. Б. О наилучших приближениях 6 1
Фукс Д. Б., Фукс М. Б. О наилучших приближениях (продолжение) 11 8
Цинман Л. Л. Логические задачи и алгебра высказываний 4 14
Ширшов А. И. Об одном свойстве биномиальных коэффициентов 10 16
Яглом И. М. Две игры со спичками 4 2
Янкелевич В. Г. «Неприводимый» случай 11 20

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Готман Э. Г. Вспомогательная окружность 1 28
Коган Б. Ю. Физика помогает геометрии 5 22
Лоповок Л. М. Полуправильные многоугольники 3 25
Орлов А. И. Принцип Дирихле 7 17
Савин А. П. Инверсия и задача Аполлония 8 23
Скопец З. А. Сравнение различных средних двух положительных чисел 2 20
Тоом А. Л. Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 6 25

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Бахмин В. И. Фотографирование невозможных объектов 5 27
Вуд Р. Искусственные миражи 10 29
Вуд Р. Демонстрация орбит тел, движущихся под действием центрального притяжения 11 22
Вуд Р. Вихревые кольца 12 28
Грегг Дж. Четыре опыта со зрением 8 29
Косоуров А. Г. Волны в мелкой тарелке 1 32
Пенроуз Л., Пенроуз Р. Невозможные объекты 5 26
Минц Н. А. Странный маятник 6 30

Задачник «Кванта»

Задачи

M61 — M65; Ф72 — Ф76 1 39
M66 — M70; Ф77 — Ф82 2 24
M71 — M75; Ф83 — Ф87 3 30
M76 — M80; Ф88 — Ф92 4 33
M81 — M85; Ф93 — Ф97 5 30
M86 — M90; Ф98 — Ф102 6 33
M91 — M95; Ф103 — Ф107 7 22
M96 — M100; Ф108 — Ф112 8 33
M101 — M105; Ф113 — Ф117 9 31
M106—M110; Ф118 — Ф122 10 33
M111 — M115; Ф123 — Ф127 11 24
M116 — M120; Ф128 — Ф132 12 31
Премии «Кванта» 9 33

Решения задач

M21 — M25; Ф29 — Ф34 2 26
M26 — M28; Ф35 — Ф40 3 32
M29 — M30; Ф41 — Ф47 4 35
M31 — M33; Ф43, Ф48 — Ф51 5 32
M34 — M38; Ф52—Ф58 6 35
M39 — M49; Ф45, Ф59 — Ф65 7 24

М45, М50 — М60; Ф66 — Ф71 8 35
М61 — М63; Ф72 — Ф74 9 34
М64 — М69; Ф75 — Ф78 10 35
М70 — М73; Ф79 — Ф82 11 26
М74 — М76; Ф83 — Ф88 12 33

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Агеев А. Н., Рудой Ю. Г. Письменный экзамен по физике в Московском автодорожном институте 3 51
Алимов Ш. А., Васильев Ф. П., Моденов В. П. Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики в МГУ в 1970 году 5 42
Асламазов Л. Г. Статика 11 54
Атамукас М. С. Квадратный трехчлен 9 41
Белонучкин В. Е. О задачах по фотометрии 7 41
Белонучкин В. Е., Козел С. М. Письменный экзамен по физике в МФТИ в 1970 году 6 60
Беляев С. А. Кинематика и связи 2 44
Берхина Т. И., Кан Э. М. Вступительные экзамены по математике в Московском текстильном институте в 1970 году 7 45
Гольдберг В. В. Показательные уравнения 3 40
Гольдберг В. В. Логарифмические уравнения 6 46
Демьянов В. Б. Тригонометрические неравенства 4 43
Зайчиков Ю. В. Задачи на законы Ньютона 5 50
Зайцев И. А. Кинематика 9 47
Козлов М. М., Кочнев И. Г. Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте 12 39
Колесников Н. Н. Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году 3 45
Колесников Н. Н., Тихомиров В. М. Письменный экзамен по математике на химическом факультете МГУ в 1970 году 6 56
Кордемский Б. А. Графики в задачах на равноценные процессы 11 48
Кушниренко А. Г., Фомин С. В. Письменный экзамен по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1970 году 7 48
Меледин Г. В. Письменный экзамен по физике в НГУ 1 51
Мордкович А. Г. Две дюжины задач на прогрессии 2 37
Новиков И. Д. Метод площадей 12 42
Петров В. А. Что здесь — теряем или находим? 5 40
Рыжков В. В. Вступительные экзамены по математике в Университет дружбы народов 2 47
Савин А. П., Федосов Б. В. Вступительный письменный экзамен в МФТИ в 1970 году 5 46
Сидоров Ю. В. Задачи по геометрии 6 52
Сканави М. И. Метод подстановки при решении уравнений и систем уравнений 1 41
Тонян В. А. Вступительные экзамены по математике в Московском институте электронного машиностроения 4 51
Шабунин М. И. Системы алгебраических уравнений 10 45
Щегольков Е. А. Вступительные экзамены по математике в МГПИ им. В. И. Ленина 1 45

ИНФОРМАЦИЯ

Березин В. Н., Смолянский М. Л. Обзор читательских писем. 12 51
Брук Ю. М., Минц Н. А. IV Международная физическая олимпиада школьников 2 56
V Всесоюзная математическая олимпиада 8 7
V Всесоюзная физическая олимпиада 8 22
Заочная олимпиада Азиатской части СССР 11 58
Карасев М. Д., Тарасюк Г. С. V Международная физическая олимпиада школьников 12 56
Новости физики 3 57
Олимпиады, олимпиады 4 57
Петраков И. С. XII Международная математическая олимпиада школьников 2 54
Петраков И. С., Скворцов В. А. XIII Международная математическая олимпиада школьников 12 53
Раббот Ж. М. Заочная математическая школа 1 56
Раскин В. В. Лингвистика и математика встречаются на олимпиаде 10 56
Розентуллер В. М. Заочный математический турнир 4 56
Смолянский М. Л., Дьяченко Г. Н., Гольдберг В. В. О математической подготовке абитуриентов 7 57
Соркин Ю. И., Шкунлина Н. Б. Олимпиаду проводит машина 10 58

Терушкин А. Г. Московский математический… 5 58
Хренов Л. С. Форум астрономов и геодезистов 7 16
Цфасман М. А. Впечатления участника олимпиады 12 54
Шапиро А. И. V городская научная конференция школьников Киева 12 58

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Ащеулов С. В., Барышев В. А. Не учебник и не задачник 10 54
Балк М. Б. Полезная книга 7 62
Брук Ю. М. Полет огненных стрел 2 52
Брук Ю. М. По обе стороны зеркала 4 58
Гутер Р. С. Если вам нужно что-нибудь посчитать… 3 57
Лешковцев В. А. Всегда ли прав наш глаз? 8 60
Лешковцев В. А. Как видят невидимое 9 57
Лешковцев В. А. От галактик до элементарных частиц 11 63
Лишевский В. П. Задачи, игры, опыты 1 64
Мишкевич Г. И. Чародей с Плуталовой улицы 3 58
Хрусталев А. Ф. Сборники ошибок автора 10 53

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Алтыкис А. В. Марки, посвященные Н. Копернику 1 62
Алтыкис А. В. Марки, посвященные Н. Е. Жуковскому 3 64
Алтыкис А. В. СССР — родина космонавтики 4 60
Алтыкис А. В. Марки, посвященные Галилею 6
Алтыкис А. В. Марки, посвященные Марии и Пьеру Кюри 7 60
Алтыкис А. В. Марки, посвященные создателям ядерной физики 8 62
Алтыкис А. В. На марках — атомные реакторы 10 63
Алтыкис А. В. Марки, посвященные Иоганну Кеплеру и Тихо Брэге 12 59
Дьяченко Г. Н. Значки Всероссийских и Всесоюзных олимпиад 11
Колесников Н. Н. Марка и этикетка, посвященные М. В. Остроградскому 9 59
Копылов Г. И. Логические кубики 9 60
Смолянский М. Л. Значки, посвященные международным математическим олимпиадам 12 60

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора — *академик* **А. Н. Колмогоров**

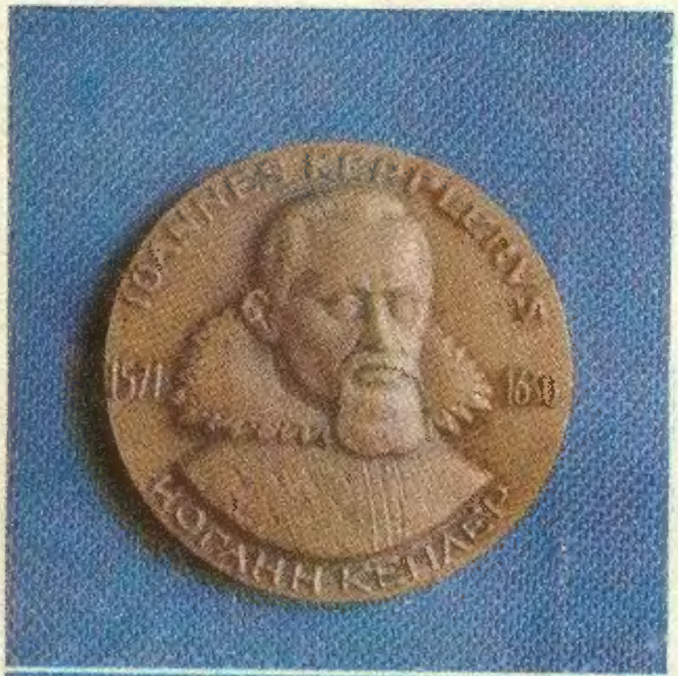
Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/VIII 1971 г.
Подписано в печать 3/XI 1971 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,95.
Тираж 266980 экз. Т-16845.
Цена 30 коп. Заказ 1672
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 12



26—28 августа в Ленинграде состоялся Международный симпозиум, посвященный 400-летию со дня рождения великого физика, астронома и математика Иоганна Кеплера. С докладами выступали ученые многих стран.

К этому юбилею была выбита мемориальная медаль, снимок с которой мы здесь помещаем. На ее оборотной стороне отмечено, что симпозиум состоялся в рамках XIII Интернационального конгресса по истории науки, проходившего в нашей стране.

Ленинград был не случайно выбран местом юбилейного симпозиума. В архиве Академии наук в Ленинграде хранятся 18 томов, переплетенных в белый пергамент и содержащих почти все рукописи Кеплера. Еще 3 тома хранятся в библиотеке в Вене. Рукописи Кеплера были куплены русским правительством в 1774 году. Многие из рукописей до сих пор не опубликованы. Рукописи Кеплера были представлены на специальной выставке в ленинградском планетарии, где происходили заседания симпозиума.